
MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

TEORIE GRAFŮ

EDUARD FUCHS

Brno 2003

PŘEDMLUVA

Prvotní impulzy, které posléze lidstvo přivedly k vybudování matematiky, byly bezpochyby dvojího druhu: *početní* a *geometrické*. Tyto impulzy také předznamenaly jeden z centrálních protikladů, které lze vypořádat v celé dosavadní historii matematiky – vztah *diskrétního* a *spojitého*.

Typickými reprezentanty matematických objektů nacházejících se na straně diskrétního proudu jsou *přirozená*, respektive *celá čísla*, *konečné množiny*, *konečné geometrie* apod., spojitý směr reprezentují objekty jako *množina všech reálných čísel*, *přímka*, *eukleidovská rovina*, *spojitá funkce* apod.

Jak již název napovídá, zabývá se *diskrétní matematika* první z výše uvedených stránek našich modelů reality.

Je svým způsobem paradoxní, že poté, co matematika na sklonku 19. století zvládla v Cantorově *teorii množin* problematiku matematického nekonečna, patří mezi matematické disciplíny, které se ve 20. století rozvíjely nejdynamičtěji, právě diskrétní matematika, jejíž značná část se zabývá studiem *konečných množin*.

To, že zejména v poslední třetině 20. století prodělala diskrétní matematika přímo bouřlivý rozvoj, bylo způsobeno řadou faktorů. Mezi klíčové patří:

- neustále se rozšiřující škála aplikací nejen v matematice samotné, především však mimo ni, a to nejen v „tradičních“ přírodovědných oblastech, ale zejména v nových a mnohdy nečekaných souvislostech;
- intenzivní rozvoj výpočetní techniky, která umožňuje provádět výpočty a analýzy, které se ještě před několika desetiletími zdály nemožné a nadlouho přesahující hranice lidských možností.

V předloženém textu jsou vyloženy úvodní partie centrální disciplíny moderní diskrétní matematiky – *teorie grafů*. K základnímu textu jsou připojeny dva dodatky. V prvním jsou uvedeny základní biografické údaje osobností, které jsou v textu zmiňovány, ve druhém jsou tabulky některých studovaných funkcí.

Čtenářům budu vděčný, když případné chyby a nedostatky, které v textu zjistí, zašlou na mou mailovou adresu: fuchs@math.muni.cz. Za jejich připomínky jim předem děkuji.

OBSAH

PŘEDMLUVA	3
1 TEORIE GRAFŮ	7
1 Co to je teorie grafů a kdy vznikla	7
2 Základní pojmy	11
3 Souvislé grafy	18
4 Stromy	22
5 Mosty, artikulace a některé grafové charakteristiky	32
6 Eulerovské a hamiltonovské grafy	38
7 Rovinné grafy	46
8 Barvení grafů	56
9 Zobecnění pojmu graf	65
DODATEK 1: BIOGRAFIE	68
DODATEK 2: TABULKY	73

Kapitola 1

TEORIE GRAFŮ

1 Co to je teorie grafů a kdy vznikla

Teorie grafů je relativně samostatná část diskretní matematiky; pochopení základních pojmů této teorie nevyžaduje hluboké znalosti jiných matematických disciplín. Většina pojmů o nichž budeme hovořit, má vcelku jednoduchou a názornou interpretaci. Musíme si však uvědomit, že se budeme zabývat pouze těmi nejjednoduššími pojmy a že jednoduchá formulace problematiky vůbec nepředznamenává jednoduchost řešení daných problémů.

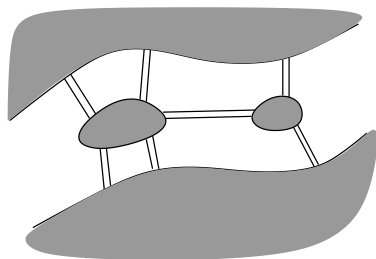
V matematice se s pojmem „graf“ setkáváme často a v nejrůznějších souvislostech. Běžně například hovoříme o „grafech funkcí“. Teorie grafů se však zabývá objekty zcela jiného druhu. V tomto paragrafu ještě nepodáme zcela přesnou definici pojmu „graf“. Pokusíme se pouze o vysvětlení intuitivního velmi názorného smyslu tohoto pojmu, stručně uvedeme, jak a kdy se tento pojem v matematice objevil a naznačíme, proč má teorie grafů četné aplikace nejen v matematice, ale i v řadě nematematických oborů.

Ve světové literatuře patrně neexistuje učebnice teorie grafů, v níž by se dříve nebo později neobjevila známá *úloha o sedmi mostech města Královce*, neboť v souvislosti s touto úlohou se v matematice pojem „graf“ objevil poprvé.

Jak tato úloha zní? Městem Königsberg (česky Královec, dnešní Kaliningrad v Rusku) teče řeka Pregel. V této řece jsou dva ostrovy, které byly s pevninou a vzájemně propojeny sedmi mosty. Schéma této situace je na obrázku 1.1.

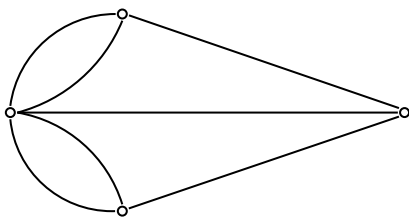
Úkolem je zjistit, zda je možné vyjít z jednoho místa, projít po každém mostě právě jednou a skončit procházku ve výchozím bodě.

Tuto úlohu řešil (a vyřešil) v roce 1736 L. Euler. Ten samozřejmě dobře věděl, že řešení nezávisí na délce mostů, šířce řeky a podobně, ale pouze na tom, které části města jsou jednotlivými mosty propojeny. Znázorníme-li si



Obr. 1.1: Schéma 7 mostů v Königsbergu

jednotlivé části města jako kroužky v rovině a mosty jako spojnice příslušných částí, je okamžitě zřejmé, že vyřešit uvedenou úlohu znamená, názorně řečeno, „namalovat jedním tahem“ „graf“ na obr. 1.2.

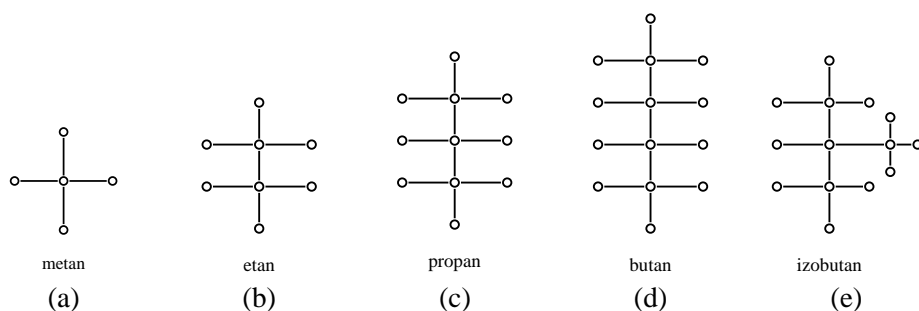


Obr. 1.2: Grafová interpretace úlohy o 7 mostech

Euler samozřejmě řešil nejen uvedenou úlohu (čtenář pravděpodobně ví, že požadovanou procházku uskutečnit nelze), ale vyřešil obecně, které „grafy“ lze jedním tahem namalovat (jak o tom budeme hovořit v paragrafu 6).

Po uvedeném Eulerově výsledku se více než 100 let „grafová“ problematika v matematice neobjevila. Až v polovině 19. století se anglický matematik A. Cayley zabýval otázkou, kolik existuje izomerů uhlovodíku C_nH_{2n+2} . (Jak čtenář patrně ví, první tři členy uhlovodíkové řady, tj. metan, etan, propan, mají jediný izomer, čtvrtý člen již má izomery dva – butan a izobutan). Cayley udělal v podstatě tutéž abstrakci jako Euler. Když si znázornil jednotlivé atomy jako kroužky v rovině a spojil „hranou“ kroužky znázorňující ty atomy, mezi nimiž je chemická vazba, převedl „chemický“ problém na problém nalezení počtu „různých“ grafů předepsaného typu, jak je uvádíme na obr. 1.3. (Kroužky, z nichž „vycházejí“ čtyři hrany, odpovídají atomům uhlíku, kroužky, z nichž vychází jediná hrana, odpovídají atomům vodíku. Jak uvidíme v paragrafu 4, jsou uvedené grafy případem tzv. „stromů“.)

Analogicky se přirozeným způsobem k pojmu „graf“ dostal G. Kirchhoff



Obr. 1.3: Grafy izomerů uhlovodíku

ve svých pracech o elektrických obvodech.

V téže době, tj. zhruba v polovině 19. století, začíná historie jednoho z nejslavnějších problémů teorie grafů, tzv. *problému čtyř barev*. O tomto problému budeme podrobněji hovořit v paragrafu 8.

První „grafovou“ práci v české matematické literatuře publikoval v roce 1926 O. Borůvka, když vyřešil otázku, jak elektrifikovat danou skupinu měst sítí minimální délkou (o tomto problému budeme obecněji hovořit v paragrafu 4).

První monografii o teorii grafů uveřejnil v roce 1936 maďarský matematik D. König. Jeho kniha *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* byla vpravdě průkopnická a po dlouhá desetiletí ve světě prakticky jediná.

Doslova bouřlivý rozvoj prodělává teorie grafů v posledních zhruba čtyřiceti letech, kdy se neustále rozšiřuje spektrum aplikací této teorie.

Nyní je snad již alespoň částečně zřejmé, jaké objekty se tedy v teorii grafů studují.

Bud' dána nějaká množina $V \neq \emptyset$ (ve většině případů konečná). Její prvky nazveme *vrcholy* nebo též *uzly*. Představme si tyto vrcholy jako malé kroužky v rovině. Některé dvojice vrcholů mohou být vzájemně spojeny tzv. *hranou*. V některých „grafech“ mohou být dva vrcholy spojeny i více než jednou hranou (takový je například graf na obr. 1.2), někdy je přípustná mezi vrcholy nejvýše jedna hrana (jako například v grafech na obr. 1.3). V některých grafech jsou hrany „orientovány“, tj. je vyznačen směr, od kterého uzlu ke kterému příslušná hrana vede; takové hrany nazýváme *šipky*. V některých grafech se připouštějí tzv. *smyčky*, tj. hrany vedoucí z uzlu do sebe samého. Někdy se dokonce připouštějí „hrany“ spojující více než dva uzly. (Pak hovoříme obvykle o tzv. *hypergrafu*.)

Přitom je jistě zřejmé (a později to přesně ukážeme), že „grafy“ ve výše uvedeném smyslu lze definovat abstraktně, nezávisle na způsobu jejich konkrétního „nakreslení“. Toto kreslení bude důležité jen v některých případech

(například v paragrafu 7, kde se budeme zabývat tzv. *rovinnými grafy*).

Některé případy, které lze popsat pomocí grafů, jsme uvedli na začátku tohoto paragrafu. Čtenář si jistě dovede představit řadu dalších situací, které lze takto charakterizovat.

Grafem je například automapa ČR. Vrcholy jsou jednotlivé obce, hrany jsou příslušné silnice. Tento graf je navíc tzv. *ohodnocený* – jednotlivým hranám jsou připsána kladná čísla (vzdálenosti). Grafem je schéma zapojení barevného televizoru i plán vodovodní sítě města Brna. Pomocí grafů lze popsat výrobní procesy i vztahy mezi pracovníky v daném závodě. Pomocí pojmů teorie grafů lze charakterizovat strukturu programu pro počítač i rozpis sportovní soutěže atd. Za grafy lze považovat hasseovské diagramy uspořádaných množin a vůbec každou množinu, na níž je definována binární relace.

I pro teorii grafů platí to, co jsme uvedli již v 1. kapitole. Chceme-li například v konečném ohodnoceném grafu najít „nejkratší cestu“ z jednoho vrcholu do druhého, mohlo by se zdát nejjednodušší všechny cesty vypsát (je jich přece pouze konečně mnoho), a pak mezi nimi vybrat tu nejkratší. Nemožnost tohoto postupu vyplývá z toho, že již pro poměrně „malé“ grafy je všech možností tak mnoho, že ani pomocí počítačů není uvedený postup realizovatelný.

U řady jednoduše formulovatelných úloh není dodnes nalezen „efektivní“ algoritmus pro jejich řešení. Jmenujme za mnohé alespoň tzv. *problém obchodního cestujícího*: *Obchodní cestující má projít danou množinou měst a vrátit se tam, odkud vyšel. Náklady na jeho cestu přitom mají být co nejmenší.*

Je zřejmé, že tuto situaci lze popsat ohodnoceným grafem, v němž vrcholy jsou jednotlivá města, hranou spojíme města mezi nimiž je přímé dopravní spojení a každé hraně přiřadíme náklady spojené s cestováním mezi danými vrcholy.

Jakkoliv jednoduchý se uvedený problém zdá, jde o jeden z nejkomplovanějších problémů diskrétní matematiky.

V závěru tohoto paragrafu je nutno ještě uvést, že terminologie v této oblasti není ustálená a jednotná ani ve světové ani v české matematické literatuře. Dokonce i samotný pojem „graf“ může mít v různých knihách odlišný význam, podle toho, jaký cíl autor sleduje.

My budeme v dalším grafem rozumět to, co se často nazývá *obyčejný graf* (neorientovaný graf bez smyček a bez násobných hran). Vzájemný poměr jednotlivých typů grafů (orientovaných, neorientovaných, multigrafů, hypergrafů atd.) popíšeme v paragrafu 9.

2 Základní pojmy

2.1 Definice. Buď $U \neq \emptyset$ libovolná množina, buď $H \subseteq \mathcal{P}_2(U)$. Uspořádanou dvojici $[U, H]$ nazýváme *graf*.
Prvky množiny U nazýváme *uzly* (nebo též *vrcholy*) grafu, prvky množiny H *hrany* grafu $[U, H]$.

2.2 Poznámka. (a) Uvědomme si, že podle definice je množina uzlů vždy neprázdná, avšak množina hran může být prázdná.

(b) Necht' U je tříprvková množina $\{x, y, \{x, y\}\}$, H buď množina $\{\{x, y\}, \{x, \{x, y\}\}\}$. Pak je podle definice 2.1 $[U, H]$ graf. Popis tohoto grafu je však nepřehledný, neboť $\{x, y\}$ je současně jeden z uzlů i jedna z hran. Abychom se vyhnuli podobným nepříjemnostem, budeme nadále automaticky předpokládat (respektive označení volit tak), že $U \cap H = \emptyset$.

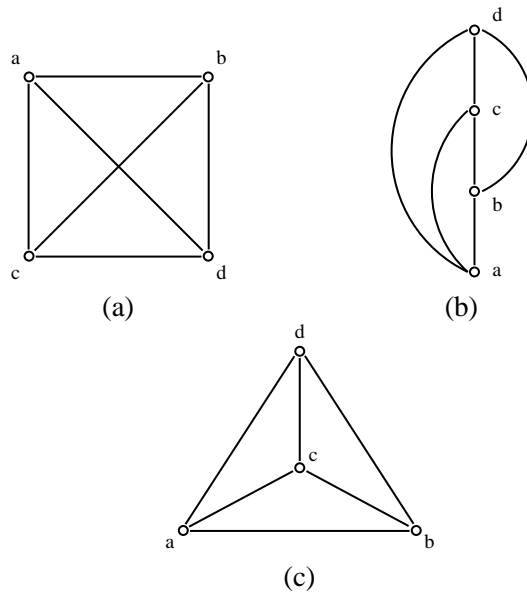
(c) Uvědomme si, že v grafu $[U, H]$ každé dva uzly tvoří nejvýše jednu hranu.

(d) Je-li $[U, H]$ graf, pak jsou hrany dvouprvkové podmnožiny množiny U . Místo $\{x, y\} \in H$ budeme obvykle užívat jednoduššího zápisu $xy \in H$, tj. budeme hovořit o hranách xy, uv, ab a podobně. (Přitom je zřejmé, že $xy \in H$ právě tehdy, když $yx \in H$, tj. hrany jsou podle definice „neorientované“.) Je-li $x \in U$, není xx hrana (tj. v našem grafu neexistují „smyčky“).

(e) Podle definice může být množina uzlů grafu $[U, H]$ konečná i nekonečná. Říkáme, že $[U, H]$ je *konečný graf*, je-li U konečná množina. V dalším budeme převážně hovořit o konečných grafech.

(f) Grafy si budeme často představovat tak, jak jsme to uvedli již v paragrafu 1. Je-li $[U, H]$ graf, představíme si uzly jako malé kroužky v rovině, dva uzly x, y pak spojíme nějakou křivkou (nejčastěji – ne však nutně – úsečkou) právě tehdy, když $xy \in H$. Získaný obrázek je v mnoha případech užitečný, uvědomme si však, že jeden a tentýž graf lze znázornit obrázky, z nichž nemusí být vůbec zřejmé, že jsou to nakreslení téhož grafu. Je-li například $U = \{a, b, c, d\}$ a $H = \mathcal{P}_2(U)$, je na všech obrázcích 2.4a–c nakreslen tento graf $[U, H]$.

(g) Terminologie teorie grafů často vychází z takto konstruovaných obrázků. Tak například říkáme, že x, y jsou *koncové uzly* hrany xy , o uzlech $u, v \in U$ říkáme, že jsou *sousední*, pokud $uv \in H$, hrana ab spojuje uzly a, b , hrana xy je *incidentní* s uzly x, y atd.

Obr. 2.4: Různá nakreslení grafu K_4

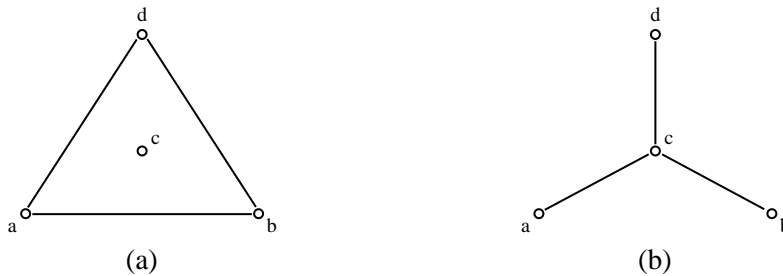
2.3 Definice. Úplným grafem na množině $U \neq \emptyset$ rozumíme graf $[U, \mathcal{P}_2(U)]$. (Tzn., že v úplném grafu jsou každé dva uzly spojeny hranou.) Úplný graf na množině U je obvyklé značit symbolem K_n , kde $n = |U|$.

Na obrázcích 2.4a–c je tedy nakreslen graf K_4 .

2.4 Definice. Budte dány grafy $\mathcal{G}_1 = [U_1, H_1]$, $\mathcal{G}_2 = [U_2, H_2]$. Pak říkáme, že:

- (a) $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$, jestliže $U_1 = U_2$, $H_1 = H_2$,
- (b) \mathcal{G}_1 je *podgrafem* grafu \mathcal{G}_2 , jestliže $U_1 \subseteq U_2$, $H_1 \subseteq H_2$,
- (c) \mathcal{G}_1 je *faktorem* grafu \mathcal{G}_2 , je-li podgrafem grafu \mathcal{G}_2 a $U_1 = U_2$,
- (d) \mathcal{G}_1 je *vlastním podgrafem* grafu \mathcal{G}_2 , je-li podgrafem tohoto grafu a přitom $\mathcal{G}_1 \neq \mathcal{G}_2$,
- (e) $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ jsou *disjunktní*, jestliže $U_1 \cap U_2 = \emptyset$,
- (f) $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ jsou *komplementární*, jestliže $U_1 = U_2$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $H_1 \cup H_2 = \mathcal{P}_2(U)$.

2.5 Příklad. Na obr. 2.5a,b jsou vzájemně komplementární vlastní podgrafy grafu K_4 . Oba uvedené grafy jsou současně faktory grafu K_4 .



Obr. 2.5: Komplementární podgrafy grafu K_4

2.6 Definice. Bud' $[U, H]$ graf. Řekneme, že uzel $x \in U$ je *konečného stupně*, jestliže inciduje s konečným počtem hran. V opačném případě je x uzel *nekonečného stupně*.

Je-li x uzel konečného stupně, označíme počet hran, které s tímto uzlem incidují, symbolem $st\ x$. Toto číslo nazýváme *stupeň uzlu x* . Je-li $st\ x = 0$, nazývá se uzel x *izolovaný*.

2.7 Poznámka. (a) Platí

$$st\ x = |\{y \in U; xy \in H\}|.$$

(b) V grafu na obr. 2.5a platí $st\ a = st\ b = st\ d = 2$, $st\ c = 0$, takže c je izolovaný uzel tohoto grafu.

V grafu na obr. 2.5b platí $st\ a = st\ b = st\ d = 1$, $st\ c = 3$.

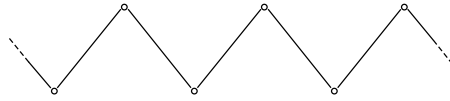
V grafu K_n je zřejmě stupeň každého uzlu roven číslu $n - 1$.

(c) Je zřejmé, že v konečném grafu je každý uzel konečného stupně. I v nekonečném grafu však mohou být samozřejmě všechny uzly konečného stupně. Například na obr. 2.6 je nekonečný graf, jehož každý uzel má stupeň 2.

Zvolíme-li však za množinu uzlů například množinu \mathbb{R} všech reálných čísel a definujeme-li množinu H hran takto:

$$x, y \in \mathbb{R}, xy \in H \iff |x - y| \in \mathbb{Q},$$

je zřejmě $[\mathbb{R}, H]$ nekonečný graf, v němž jsou všechny uzly nekonečného stupně. Tento graf samozřejmě nakreslit (ani schématicky) dost dobře není možné.



Obr. 2.6: Graf, jehož všechny uzly mají stupeň 2

2.8 Věta. *Bud' $[U, H]$ konečný graf. Pak platí*

$$\sum_{x \in U} \text{st } x = 2 \cdot |H|.$$

Důkaz. Indukcí vzhledem k číslu $|H|$. Je-li $|H| = 0$, tj. $H = \emptyset$, je tvrzení zřejmé, neboť $\text{st } x = 0$ pro každý uzel $x \in U$. Nechť tvrzení platí pro každý graf na množině uzlů U , který má nejvýše h hran. Bud' nyní $\mathcal{G} = [U, H]$ takový graf, že $|H| = h+1$. Bud' $xy \in H$ libovolná hrana. V grafu $\mathcal{G}^* = [U, H - \{x, y\}]$ je h hran, takže v \mathcal{G}^* platí $\sum_{x \in U} \text{st } x = 2 \cdot h$. Stupně všech uzlů v \mathcal{G} a \mathcal{G}^* jsou však stejné až na uzly x, y , které mají v \mathcal{G} stupeň o jedničku větší než v \mathcal{G}^* . Odtud zřejmě plyne, že v \mathcal{G} platí $\sum_{x \in U} \text{st } x = 2 \cdot h + 2 = 2 \cdot (h + 1)$. •

V důkazu věty 2.11 využijeme následujícího označení.

2.9 Definice. Bud' $\mathcal{G} = [U, H]$ konečný graf, $k \in \mathbb{N}_0$ buď libovolné. Pak klademe

$$\sigma_k(\mathcal{G}) = |\{x \in U; \text{st } x = k\}|.$$

Symbol $\sigma_k(\mathcal{G})$ tak udává počet uzlů stupně k v grafu \mathcal{G} . Je evidentní, že pouze pro konečně mnoho $k \in \mathbb{N}_0$ je $\sigma_k(\mathcal{G}) \neq 0$. (Předpokládáme, že \mathcal{G} je konečný!)

Například v grafu na obrázku 2.5a je $\sigma_0 = 1$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_k = 0$ pro $0 \neq k \neq 2$. V grafu na obr. 2.5b platí $\sigma_1 = 3$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_k = 0$ pro ostatní k .

Z definice čísel σ_k je zřejmé, že platí

2.10 Pomocná věta. *Bud' $\mathcal{G} = [U, H]$ konečný graf. Pak*

$$\sum_{x \in U} \text{st } x = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \sigma_k(\mathcal{G}).$$

Následujícího elementárního tvrzení budeme často využívat.

2.11 Věta. *Počet uzlů lichého stupně v každém konečném grafu je sudý.*

Důkaz. Buď $\mathcal{G} = [U, H]$ konečný graf. Počet uzlů lichého stupně je roven číslu

$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1}$. Přitom

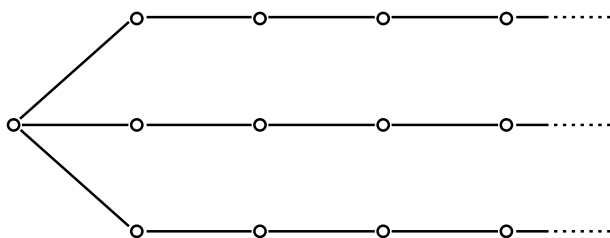
$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \sigma_j &= \sum_{j=0}^{\infty} 2j \cdot \sigma_{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \cdot \sigma_{2j+1} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} 2j \cdot (\sigma_{2j} + \sigma_{2j+1}) + \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1}. \end{aligned}$$

Odtud celkem

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1} = 2 \cdot |H| - \sum_{j=0}^{\infty} 2j \cdot (\sigma_{2j} + \sigma_{2j+1}).$$

Protože na pravé straně poslední rovnosti stojí prokazatelně číslo sudé, je i číslo $\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1}$ sudé. •

2.12 Poznámka. (a) Pro nekonečné grafy tvrzení 2.11 zřejmě neplatí. Například v grafu na obr. 2.7 existuje právě jeden uzel lichého stupně.



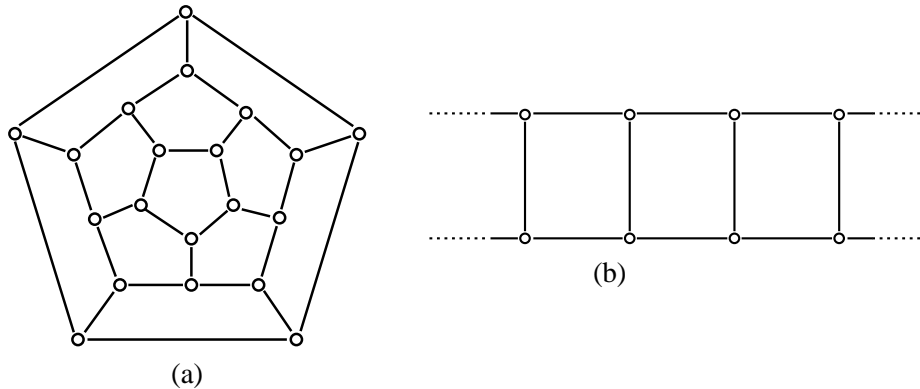
Obr. 2.7: Graf s jediným uzlem lichého stupně

(b) Stupně uzlů grafu hrají důležitou roli v řadě úvah. Jedna z typických úloh spočívá v následujícím: buď dána konečná posloupnost a_1, a_2, \dots, a_n nezáporných celých čísel. Tato posloupnost se nazývá *grafová*, když existuje graf $[U, H]$ takový, že $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, st $u_i = a_i$, $i = 1, \dots, n$. Snadno lze ukázat, že existují posloupnosti, které nejsou grafové. Nutná a dostatečná podmínka toho, aby posloupnost byla grafová, je uvedena například v [6], str. 37.

2.13 Definice. Řekneme, že graf $[U, H]$ je *pravidelný graf k -tého stupně* (nebo stručně jenom *k -pravidelný graf*), jestliže st $x = k$ pro každý uzel $x \in U$.

2.14 Příklad. (a) Úplný graf K_n je pravidelný graf stupně $n - 1$.

(b) Na obr. 2.8a je konečný a na obr. 2.8b nekonečný pravidelný graf 3. stupně.



Obr. 2.8: Pravidelné grafy 3. stupně

2.15 Poznámka. Z věty 2.11 bezprostředně plyne, že v konečném pravidelném grafu lichého stupně je počet uzlů sudý.

V závěru tohoto paragrafu se stručně zmíníme o tom, jakým způsobem je možno graf zadat.

Uvažujme například graf na obr. 2.9. Tento graf je jistě přehledný a z obrázku je čtenáři okamžitě jasné, o jakém grafu hovoříme. Zadání grafu jeho nakreslením je proto jedno z nejčastějších. Mnohdy je však nutno volit zadání jiné. Obrázek může být nepřehledný a například jako vstup do počítače je (alespoň prozatím) prakticky nepoužitelný. V těchto případech je nejobvyklejší graf zadat pomocí vhodně sestavené posloupnosti nebo pomocí jistých matic. Ukažme si alespoň některé z nejběžnějších možností.

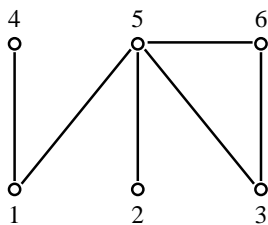
Pro zadání grafu je vhodné označit uzly přirozenými čísly $1, \dots, n$ (jak jsme to udělali na obr. 2.9). Označíme-li graf na obr. 2.9 jako $[U, H]$, je

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$H = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}\}$$

Zápis tohoto grafu lze „zakódovat“ následující posloupností:

$$(6, 6, 1, 4, 1, 5, 2, 5, 3, 5, 3, 6, 5, 6).$$



Obr. 2.9:

(Jak čtenář jistě postřehl, udává první číslo počet uzlů, druhé počet hran, a pak následuje soupis všech hran, přičemž závorky v označení hran můžeme pochopitelně vynechat.)

Tentýž graf však můžeme popsat i jinou posloupností například takto:

(6, 6, 2, 4, 5, 1, 5, 2, 5, 6, 1, 1, 4, 1, 2, 3, 6, 2, 3, 5).

První číslo udává počet uzlů, druhé počet hran; pak postupně následuje stupeň uzlu 1 (který je roven 2) a výčet s ním sousedících uzlů (což jsou uzly 4 a 5), dále stupeň uzlu 2 (který je roven 1) a sousední uzel (tj. 5) atd.

Matici sousednosti grafu $[U, H]$ sestavíme z nul a jedniček tak, že $a_{ij} = 1$ právě tehdy, když $ij \in H$.

Matice sousednosti grafu na obr. 2.9 je uvedena v tabulce 2.1.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tab. 2.1: Matice sousednosti grafu z obr. 2.9

Tak zvanou *znaménkovou matici* obdržíme tak, že v matici sousednosti místo jedniček napíšeme znaménko + a místo nul znaménko –.

Dalšími možnostmi – a je jich celá řada – se nebudeme zabývat.

3 Souvislé grafy

3.1 Definice. Buď $[U, H]$ graf, $x_0, x_n \in U$ buďte libovolné uzly. Posloupnost uzlů a hran tvaru

$$x_0, x_0x_1, x_1, x_1x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}x_n, x_n$$

se nazývá *sled* začínající v uzlu x_0 a končící v uzlu x_n . Uzly x_1, \dots, x_{n-1} nazýváme *vnitřní uzly* tohoto sledu, číslo n (tj. počet hran ve sledu) nazýváme *délkou* tohoto sledu.

3.2 Příklad. V grafu na obr. 2.9 je například

$$1, 15, 5, 52, 2, 25, 5, 53, 3$$

sled délky 4 začínající v uzlu 1 a končící v uzlu 3.

3.3 Poznámka. (a) Podle definice je každý uzel sledem nulové délky.

(b) Existuje-li mezi dvěma různými uzly sled, existuje mezi nimi zřejmě nekonečně mnoho sledů. Můžeme totiž, jednoduše řečeno, kteroukoliv hranu v daném sledu libovolně mnohokrát opakovat. Například v grafu na obr. 2.9 existují mezi uzly 1 a 2 sledy

$$1, 15, 5, 52, 2$$

$$1, 15, 5, 52, 2, 25, 5, 52, 2$$

$$1, 15, 5, 52, 2, 25, 5, 52, 2, 25, 5, 52, 2 \text{ atd.}$$

Vzhledem k tomu, že ve sledu se mohou hrany i uzly opakovat, má smysl následující definice.

3.4 Definice. Sled, v němž se neopakuje žádná hrana, se nazývá *tah* v daném grafu. Je-li počáteční uzel tahu roven koncovému, nazývá se tah *uzavřený*. V opačném případě se tento tah nazývá *otevřený*. Sled, v němž se neopakuje žádný uzel, se nazývá *cesta*.

3.5 Poznámka. Je zřejmé, že každá cesta je tahem, avšak opačné tvrzení obecně neplatí.

Například v grafu na obrázku 2.9 je 2, 25, 5, 53, 3, 36, 6, 65, 5, 51, 1 otevřený tah, avšak není to cesta, neboť se opakuje uzel 5.

3.6 Věta. *Necht' v grafu $[U, H]$ existuje mezi uzly $x, y \in U, x \neq y$ sled. Pak mezi nimi existuje v daném grafu alespoň jedna cesta.*

Důkaz. Tvrzení je vcelku zřejmé. Necht' je dán sled mezi uzly x, y :

$$x = x_0, x_0x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}x_n, x_n = y.$$

Pokud tento sled není cestou, existují $x_i, x_j, i < j$, tak, že $x_i = x_j$. Pak ale je $x_0, \dots, x_i, x_jx_{j+1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ opět sled mezi uzly x, y . (Z původního sledu jsme „výškrtnli“ úsek od x_i do x_j .) Není-li takto získaný sled cestou, musí se v něm nějaký uzel opakovat. Příslušnou část sledu pak můžeme opět vyškrtnout. Po konečném počtu kroků pak z původního sledu jistě zůstane cesta z x do y .

•

3.7 Příklad. V grafu na obr. 2.9 existují mezi uzly 1 a 3 dvě cesty: jedna má délku 2, druhá délku 3.

3.8 Definice. Graf, v němž mezi každými dvěma uzly existuje sled, se nazývá *souvislý*.

3.9 Poznámka. Podle poznámky 3.3a je každý graf tvořený jediným uzlem souvislý. Souvislý je i graf na obr. 2.9, avšak graf na obr. 2.5a souvislý není, neboť v něm neexistuje sled například mezi uzly a a c .

V dalším budeme potřebovat následující tvrzení.

3.10 Věta. *Bud' $[U, H]$ souvislý graf, $x \in U$, st $x = 1, xy \in H$ hrana incidentní s uzlem x . Pak je graf $[U - \{x\}, H - \{xy\}]$ souvislý.*

Důkaz. Budte $u, v \in U - \{x\}$ libovolné dva navzájem různé uzly. (Kdyby takové dva uzly neexistovaly, bylo by $U = \{x, y\}, H = \{xy\}$ a graf $[U - \{x\}, H - \{xy\}]$ by byl $[\{y\}, \emptyset]$, což je souvislý graf podle poznámky 3.9). Protože je $[U, H]$ souvislý, existuje v něm sled mezi uzly u, v a podle věty 3.6 existuje mezi těmito uzly alespoň jedna cesta. Nyní si stačí uvědomit, že na žádné cestě mezi uzly u, v nemůže ležet hrana xy . (Uzel x by totiž musel být vnitřním uzlem této cesty. Protože x inciduje pouze s hranou xy , obsahuje daná cesta úsek $\dots, y, yx, x, xy, y, \dots$. Pak to ale není cesta, neboť v daném sledu se opakuje uzel y .) Každá cesta mezi u, v je tedy sledem v $[U - \{x\}, H - \{xy\}]$, takže tento graf je souvislý.

•

3.11 Poznámka. Graf $[U - \{x\}, H - \{xy\}]$ je tedy souvislý vlastní podgraf grafu $[U, H]$ (za předpokladů věty 3.10).

Bud' $[U, H]$ libovolný graf. Definujeme-li na množině U relaci \sim takto:

$$x \sim y \iff \text{existuje sled mezi uzly } x, y,$$

je zřejmé, že relace \sim je ekvivalence na množině U . (Reflexivita plyne z poznámky 3.9, symetrie a tranzitivita je zřejmá.) Tato ekvivalence určuje rozklad U/\sim na množině U . Pro každý uzel $x \in U$ označme $U(x)$ tu třídu tohoto rozkladu, v níž leží uzel x . Je tedy

$$U(x) = \{t \in U; \text{ existuje sled mezi uzly } t, x\}.$$

Označíme-li

$$H(x) = \{uv \in H; u \in U(x), v \in U(x)\},$$

je zřejmé $[U(x), H(x)]$ podgraf grafu $[U, H]$ (pro každý uzel $x \in U$).

3.12 Definice. Bud' $[U, H]$ graf, $x \in U$ libovolný uzel. Podgraf

$$[U(x), H(x)]$$

grafu $[U, H]$ se nazývá *komponenta grafu $[U, H]$ příslušná uzlu x* .

3.13 Poznámka. Je zřejmé, že graf $[U, H]$ je souvislý právě tehdy, když má právě jednu komponentu.

Komponenty grafu jsou – jinak řečeno – maximální souvislé podgrafy daného grafu.

3.14 Poznámka. Souvislé grafy lze rovněž považovat za metrické prostory. Je-li totiž $[U, H]$ souvislý graf a $x, y \in U$ libovolné uzly, existuje mezi těmito uzly podle věty 3.6 alespoň jedna cesta. Mezi cestami z uzlu x do uzlu y jistě existuje cesta minimální délky. Označme její délku $\varrho(x, y)$. Pro čtenáře bude jistě snadným cvičením ověření toho, že pro každé tři uzly $x, y, z \in U$ platí:

- (a) $\varrho(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$,
- (b) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
- (c) $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$.

To však právě znamená, že (U, ϱ) je metrický prostor.

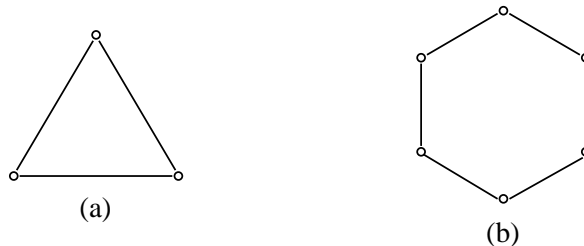
Lze tedy na souvislé grafy aplikovat i metody teorie metrických prostorů.

Jak uvidíme, budou v dalším hrát souvislé grafy důležitou roli. Zvláště významné pak budou souvislé pravidelné grafy.

Například na obr. 2.6 je souvislý pravidelný graf 2. stupně. Nás však budou zajímat především **konečné** souvislé pravidelné grafy 2. stupně.

3.15 Definice. Konečný souvislý pravidelný graf druhého stupně se nazývá *kružnice*.
Počet uzlů v kružnici nazýváme její *délkou*.

3.16 Příklad. Na obrázku 3.10a je kružnice délky 3, na obrázku 3.10b kružnice délky 6.



Obr. 3.10: Kružnice

Graf na obrázku 3.10a se – vcelku pochopitelně – rovněž nazývá *trojúhelník*. (V teorii grafů je tak trojúhelník zvláštním případem kružnice.)

V dalších úvahách uvidíme, že jednou z důležitých charakteristik grafu bude to, zda obsahuje jako podgraf nějakou kružnici. Například graf na obr. 2.9 obsahuje právě jednu kružnici (trojúhelník o vrcholech 3,5,6), graf na obr. 2.8a obsahuje kružnic celou řadu, avšak grafy na obr. 1.3 neobsahují jako podgraf žádnou kružnici.

Právě takovými grafy se nyní budeme zabývat.

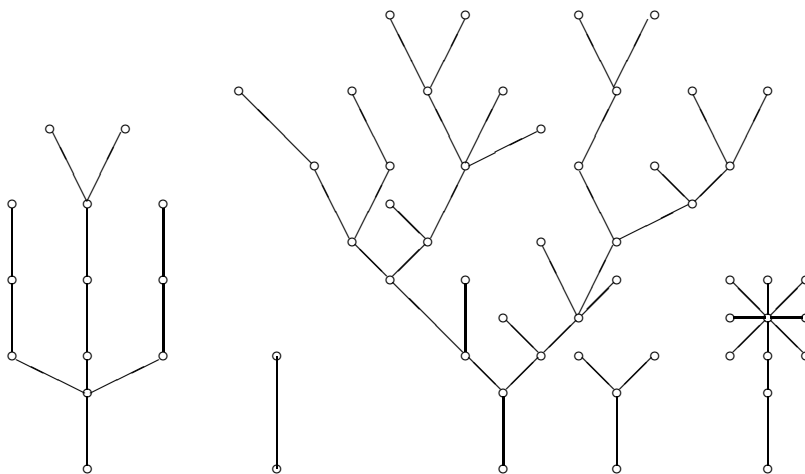
4 Stromy

Stromy tvoří jednu z nejdůležitějších tříd grafů. Mají řadu aplikací v nejrůznějších oborech. Jak jsme uvedli již v paragrafu 1, patří mezi první grafy, které byly v matematice zkoumány.

4.1 Definice. Konečný souvislý graf neobsahující jako podgraf žádnou kružnici, se nazývá *strom*.
Graf, jehož každá komponenta je stromem, se nazývá *les*.

4.2 Poznámka. Les je tedy graf neobsahující žádnou kružnici. Strom je konečný souvislý les.

Pojmenování „strom“ a „les“ souvisí s tím, jak lze tyto objekty nakreslit. Příklad „odpovídajícího“ nakreslení je na obr. 4.11.



Obr. 4.11: Les

Stromy lze charakterizovat různými způsoby. V následujícím tvrzení uvedeme některé nutné a dostatečné podmínky toho, aby graf byl stromem.

4.3 Věta. *Bud' $[U, H]$ konečný graf. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- (a) $[U, H]$ je strom.
- (b) Mezi každými dvěma uzly $v \in [U, H]$ existuje právě jedna cesta.
- (c) $[U, H]$ je souvislý a platí $|H| = |U| - 1$.
- (d) $[U, H]$ neobsahuje kružnici a $|H| = |U| - 1$.

Důkaz. Dokážeme postupně implikace (a) \Rightarrow (b), (b) \Rightarrow (c), (c) \Rightarrow (d), (d) \Rightarrow (a).

(a) \Rightarrow (b): Strom $[U, H]$ je souvislý, takže podle věty 3.6 existuje mezi každými dvěma uzly alespoň jedna cesta. Potřebujeme proto pouze dokázat, že nemohou existovat dva uzly, mezi nimiž je více cest. To je však zřejmé. Kdyby totiž existovaly uzly $u, v \in U$, mezi nimiž by existovaly dvě různé cesty, pak by zřejmě v $[U, H]$ existovala kružnice, což podle definice stromu není možné.

(b) \Rightarrow (c): Existuje-li mezi každými uzly $u, v \in U$ cesta, je $[U, H]$ souvislý. Zbývá tedy pouze dokázat rovnost $|H| = |U| - 1$. Důkaz provedeme indukcí vzhledem k $|U|$. Pro $|U| = 1$ je tvrzení zřejmé. Necht' tedy uvedená rovnost platí pro všechny grafy splňující (b) s počtem uzlů nejvýše n . Necht' $[U, H]$ je graf splňující (b) takový, že $|U| = n + 1$. Buď $uv \in H$ libovolná hrana. Graf $[U, H - \{xy\}]$ není souvislý a zřejmě má právě dvě komponenty (jsou to $U(x)$ a $U(y)$). Podle indukčního předpokladu je v každé z těchto komponent počet hran o jedničku menší než počet uzlů. V grafu $[U, H - \{xy\}]$ je tedy $n - 1$ hran, tj. v grafu $[U, H]$ je $n = |U| - 1$ hran, což jsme chtěli dokázat.

(c) \Rightarrow (d): Necht' graf $[U, H]$ splňuje podmínku (c). Potřebujeme dokázat, že v tomto grafu neexistuje kružnice. Připustíme tedy, že v grafu $[U, H]$ kružnice existuje. Je-li $xy \in H$ libovolná hrana ležící na této kružnici, pak jejím vynecháním vznikne souvislý graf $[U, H - \{xy\}]$. (Souvislost tohoto grafu je zřejmá; libovolné dva uzly dovedeme v tomto grafu jistě spojit vhodným sledem, roli hrany xy v případě potřeby supluje zbylá část kružnice.) Kdyby v grafu $[U, H - \{xy\}]$ opět existovala nějaká kružnice, vynecháme v ní rovněž některou hrana. Po konečném počtu kroků obdržíme souvislý graf neobsahující žádnou kružnici, tj. strom. Počet hran v tomto stromu je však menší než $|U| - 1$, neboť tolik hran měl podle předpokladu graf $[U, H]$. To je však spor, neboť jsme již dokázali, že (a) \Rightarrow (c), tj. strom obsahuje nutně $|U| - 1$ hran.

(d) \Rightarrow (a): Potřebujeme dokázat, že graf splňující (d) je nutně souvislý. Předpokládejme tedy, že graf $[U, H]$ splňuje podmínku (d) a není souvislý. Pak je tvořen komponentami $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ ($n \geq 2$). Každá z těchto komponent je stromem (neboť $[U, H]$ je podle (d) les). Označme $\mathcal{G}_i = [U_i, H_i]$. Protože (a) \Rightarrow (c), platí $|H_i| = |U_i| - 1$ pro $i = 1, \dots, n$. Odtud

$$|H| = \sum_{i=1}^n |H_i| = \sum_{i=1}^n (|U_i| - 1) = |U| - n,$$

kde $n \geq 2$. To je však spor, neboť podle předpokladu platí $|H| = |U| - 1$. •

4.4 Věta. Každý strom s alespoň dvěma uzly obsahuje alespoň dva uzly prvního stupně.

Důkaz. Buď $[U, H]$ strom, $|U| \geq 2$. Podle vět 2.8 a 4.3 platí

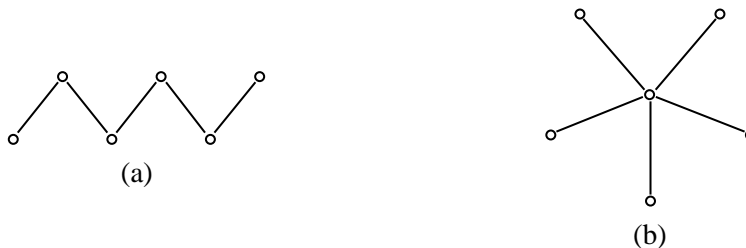
$$\sum_{x \in U} \text{st } x = 2 \cdot |H| = 2 \cdot (|U| - 1) = 2 \cdot |U| - 2.$$

Přitom $\text{st } x \geq 1$ pro každý uzel $x \in U$. Kdyby alespoň dva uzly neměly stupeň 1, bylo by číslo $\sum_{x \in U} \text{st } x$ větší než $2 \cdot |U| - 2$. •

4.5 Příklad. Buď $n \geq 2$ libovolné přirozené číslo. Pak jistě existuje strom o n uzlech, který obsahuje právě dva uzly 1. stupně. Takový strom se nazývá *had*.

Pro $n \geq 3$ může ve stromu o n uzlech evidentně existovat nejvýše $n - 1$ uzlů 1. stupně. Strom, který má právě $n - 1$ uzlů 1. stupně (z celkového počtu n), se nazývá *hvězda*.

Na obr. 4.12a je had a na obr. 4.12b hvězda pro $n = 6$.



Obr. 4.12: Had a hvězda

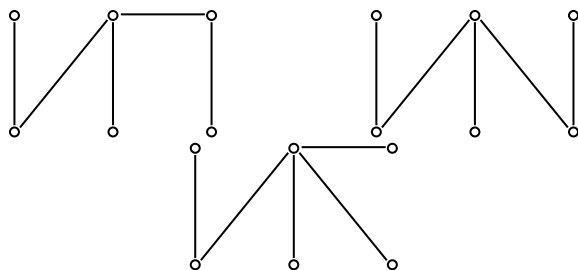
V definici 2.4 jsme definovali faktor grafu $[U, H]$ jako podgraf, jehož množina uzlů je rovněž U . V dalším nás budou zajímat podgrafy a faktory bez kružnic.

4.6 Definice. *Kostrou* grafu $[U, H]$ rozumíme takový faktor $[U, H_1]$, který je stromem.

4.7 Příklad. (a) Graf z obr. 2.9 obsahuje tři kostry, které jsou znázorněny na obr. 4.13.

(b) Kružnice délky n zřejmě obsahuje n koster; každá kostra vznikne vynecháním právě jedné hrany.

(c) Strom obsahuje právě jednu kostru – sebe sama.



Obr. 4.13: Kostry grafu z obr. 2.9

Nyní je přirozená otázka, které grafy kostru obsahují. Protože kostra grafu je souvislý podgraf, nemůže samozřejmě kostru obsahovat graf, který sám není souvislý. Jak je tomu v souvislých grafech uvádí následující tvrzení.

4.8 Věta. Každý konečný souvislý graf obsahuje alespoň jednu kostru.

Důkaz. Bud' $[U, H]$ konečný souvislý graf. V tomto grafu jistě existuje nějaký podgraf, který je stromem. Stačí totiž zvolit libovolný uzel $x \in U$ a podgraf $\{\{x\}, \emptyset\}$ je strom. Označme \mathcal{S} množinu všech stromů v $[U, H]$. Protože je graf $[U, H]$ konečný, obsahuje pouze konečně mnoho podgrafů, takže tím spíše je i množina \mathcal{S} konečná (a víme, že neprázdná). Protože \mathcal{S} je konečná, obsahuje alespoň jeden maximální prvek (tj. strom, který není podgrafem žádného jiného stromu). Bud' tedy $[U^*, H^*]$ některý maximální prvek v \mathcal{S} . Zřejmě stačí dokázat, že $U = U^*$ (pak je totiž $[U^*, H^*]$ faktor a tedy kostra v $[U, H]$).

Připustíme, že je $U \neq U^*$, tj. existuje $y \in U - U^*$. Zvolme $x \in U^*$ libovolně. Protože je $[U, H]$ souvislý, existuje v něm cesta z x do y . V této cestě pak ale nutně existuje alespoň jedna hrana $vw \in H$ taková, že $v \in U^*$, $w \notin U^*$. Pak je ale zřejmě $[U \cup \{w\}, H \cup \{vw\}]$ strom v $[U, H]$. (Souvislost je zřejmá, neboť $[U^*, H^*]$ je souvislý; přidáním hrany vw jsme přitom evidentně nemohli uzavřít žádnou kružnici.) To je však spor, neboť $[U^*, H^*]$ je vlastním podgrafem takto vzniklého stromu a tak není maximální v \mathcal{S} . •

V příkladu 4.7 jsme viděli, že graf může mít více koster. Proto je přirozená otázka, jak určit počet koster daného grafu. Jeden ze základních poznatků v tomto směru dokázal již v roce 1899 Cayley.

4.9 Věta. Počet koster v úplném grafu K_n je roven číslu n^{n-2} .

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení nebudeme provádět. •

4.10 Poznámka. Jak v dalším uvidíme, je zdánlivě jednoduchý postup, totiž postupné prověřování všech možností, již u poměrně „malých“ grafů prakticky neuskutečnitelný (i při použití počítačů).

Obecná metoda, pro praktický výpočet však nepříliš pohodlná, je založena na výpočtu determinantu vytvořeného z tzv. *Laplaceovy matice sousednosti* daného grafu. Tato matice je definována následovně: Je-li $[U, H]$ konečný graf, $U = \{1, \dots, n\}$, je příslušná matice $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ definována takto:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{jestliže } ij \in H, \\ \text{st } i, & \text{jestliže } i = j, \\ 0, & \text{jestliže } i \neq j, ij \notin H. \end{cases}$$

4.11 Poznámka. S určováním počtu koster v daném grafu úzce souvisí problém, *kolik vlastně existuje grafů na dané množině uzlů.*

Takto zformulovaná otázka je ovšem jednoduchá. Je-li $[U, H]$ graf na n uzlech, je podle definice $H \subseteq \mathcal{P}_2(U)$, přičemž víme, že $|\mathcal{P}_2(U)| = \binom{n}{2}$. Všech grafů s množinou uzlů U je tedy tolik, kolik má množina $\mathcal{P}_2(U)$ podmnožin. Označíme-li g_n počet grafů na n uzlech, platí podle uvedeného

$$g_n = 2^{\binom{n}{2}}.$$

Jak rychle roste posloupnost $(g_n)_{n=1}^\infty$, plyne z následující tabulky:

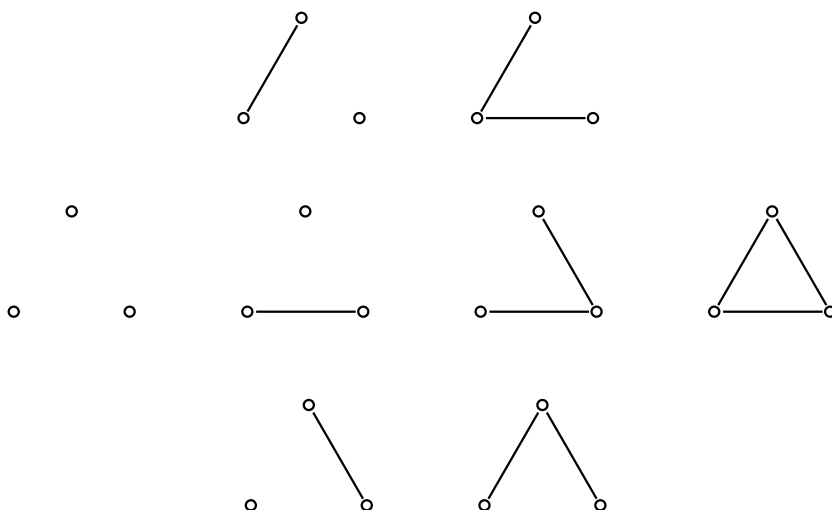
n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
g_n	1	2	8	64	1 024	32 768	2 097 152	2 684 354 544	...

Nyní je snad zřejmé, proč řešení grafových úloh nakreslením nebo vypsáním „všech možností“ nemá ve většině případů naději na úspěch.

Určování počtu grafů na n uzlech je však přirozené následujícím způsobem „zkomplikovat“.

Z právě uvedené tabulky plyne, že na třech uzlech existuje celkem 8 grafů. Všechny tyto grafy jsou uvedeny na obr. 4.14.

Z uvedeného obrázku je patrné, že některé z uvedených 8 grafů jsou si natolik „podobné“, že je nerozlišíme, pokud se nedíváme na označení uzlů. (Čtenář si jistě okamžitě uvědomil, že jde o grafy nakreslené „pod sebou“.) Tuto „podobnost“ nyní precizujeme.



Obr. 4.14: Grafy na třech uzlech

4.12 Definice. Budte $[U_1, H_1]$, $[U_2, H_2]$ grafy. Zobrazení $f: U_1 \rightarrow U_2$ se nazývá *izomorfismus* grafu $[U_1, H_1]$ na graf $[U_2, H_2]$, když platí:

1. f je bijekce,
2. $xy \in H_1$ právě tehdy, když $f(x)f(y) \in H_2$.

Dva grafy jsou *izomorfní*, když mezi nimi existuje alespoň jeden izomorfismus.

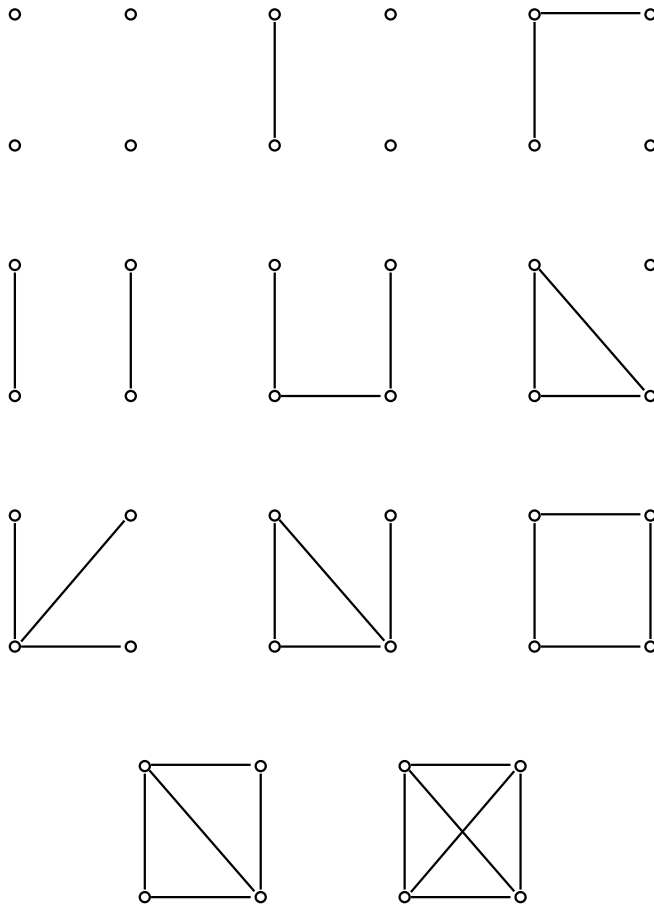
Čtenář si jistě okamžitě uvědomuje, že izomorfismus je ekvivalence na třídě všech grafů.

V jistém slova smyslu důležitější než otázka, kolik existuje na n uzlech všech grafů, je problém, kolik na n uzlech existuje **neizomorfních** grafů. Tak například na čtyřech uzlech existuje 64 grafů, avšak jen 11 neizomorfních grafů, jak je patrné z obr. 4.15.

Odvození metody pro výpočet počtu h_n neizomorfních grafů na n uzlech přesahuje naše možnosti. (Je to tzv. *Pólyova enumerační metoda*.) Existuje však jednoduchý odhad pro čísla h_n ; je totiž zřejmé, že platí

$$h_n \geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!},$$

neboť na n -prvkové množině jistě existuje nejvýše $n!$ vzájemně izomorfních grafů. Uvedený odhad je při své jednoduchosti pro velká n velmi přesný. Lze



Obr. 4.15: Neizomorfní grafy na čtyřech uzlech

totiž dokázat, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(h_n - \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \right) = 0.$$

I posloupnost $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ roste „velmi rychle“, jak lze vyčíst z následující tabulky:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
h_n	1	2	4	11	34	156	1 034	12 344	308 168	...

Dokonce i počet t_n *neizomorfních stromů* na n uzlech (při veškeré „jednoduchosti“ stromů) roste pořád ještě tak rychle, že i jejich systematický přehled pro poměrně malá n je nemožný (viz tabulku na straně 75).

Jak jsme uvedli již ve větě 4.8, obsahuje každý konečný souvislý graf alespoň jednu kostru. Viděli jsme, že kostra grafu obecně není určena jednoznačně. Uvědomme si však, že podle věty 4.3 mají všechny kostry stejný počet hran (roven počtu uzlů zmenšený o jedničku).

Abychom konečně uviděli nějakou aplikaci teorie grafů, budeme se nyní zabývat hledáním vhodných koster v tzv. ohodnocených grafech. K tomu však potřebujeme nejprve následující definici.

4.13 Definice. Necht' je $[U, H]$ graf. Bud' dáno zobrazení $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ (respektive $f : U \rightarrow \mathbb{R}$). Trojici $[U, H, f]$ nazýváme *hranově ohodnocený* (respektive *uzlově ohodnocený*) graf. Číslo $f(t)$ nazýváme *ohodnocení* hrany (respektive uzlu) t .

4.14 Definice. Bud' $[U, H, f]$ hranově ohodnocený konečný souvislý graf. Kostra $[U, H^*]$ grafu $[U, H]$ se nazývá *minimální kostra* v $[U, H, f]$, když pro každou kostru $[U, H_1]$ grafu $[U, H]$ platí

$$\sum_{h \in H^*} f(h) \leq \sum_{h \in H_1} f(h).$$

4.15 Poznámka. Protože konečný souvislý graf obsahuje pouze konečně mnoho koster, obsahuje nutně každý konečný souvislý hranově ohodnocený graf alespoň jednu minimální kostru. Současně je evidentní, že minimální kostra obecně není jednoznačně určena.

4.16 Příklad. Bud' dána množina měst A, B, C, D, E, F. V tabulce 4.2 necht' jsou uvedeny náklady na vybudování železnice mezi jednotlivými městy (v milionech Kč). Naším úkolem je nyní navrhnout mezi uvedenými městy železniční síť tak, aby každá dvě města byla vzájemně po železnici dosažitelná a aby přitom náklady na vybudování železnice byly minimální.

Grafová formulace zadané úlohy je jednoduchá. Naším úkolem je zřejmě nalezení minimální kostry v úplném grafu K_6 s uzly A, B, C, D, E, F, jehož hranové ohodnocení je dáno uvedenou tabulkou.

Ke konkrétnímu řešení této úlohy se vrátíme za chvíli. Uvědomme si, že v zadaném případě bychom pravděpodobně minimální kostru našli poměrně brzy i bez nějaké teorie. V komplikovanějším případě je však nalezení minimální kostry bez znalosti vhodného algoritmu velmi obtížné. Proto si nyní

	A	B	C	D	E	F
A	0	13	27	18	5	30
B	13	0	7	18	4	12
C	27	7	0	3	8	11
D	18	18	3	0	9	24
E	5	4	8	9	0	15
F	30	12	11	24	15	0

Tab. 4.2: Náklady na vybudování železnice mezi městy

jednoduchý algoritmus pro konstrukci minimální kostry uvedeme. (První algoritmus pro nalezení minimální kostry našel již v r. 1926 O. Borůvka. Podrobněji o historii tohoto algoritmu viz např. v [7]).

4.17 Věta. Algoritmus pro hledání minimální kostry: *Bud' $[U, H, f]$ konečný souvislý hranově ohodnocený graf. Všechny hrany sestavme do posloupnosti (h_1, \dots, h_n) tak, aby posloupnost $(f(h_1), \dots, f(h_n))$ byla neklesající. (Takové uspořádání hran vzhledem ke konečnosti grafu jistě existuje i když obecně není určeno jednoznačně.)*

Požadovaný algoritmus nyní můžeme popsat takto:

- (1) Polož $H_0 = \emptyset$, $i = 1$.
- (2) *Obsahuje graf $[U, H_{i-1} \cup \{h_i\}]$ kružnici? Pokud ano, přejdi k bodu (4). Pokud ne, přejdi k bodu (3).*
- (3) Polož $H_i = H_{i-1} \cup \{h_i\}$. Přejdi k bodu (5).
- (4) Polož $H_i = H_{i-1}$.
- (5) *Je $i = n$? Pokud ano, pokračuj podle bodu (6). Pokud ne, přejdi k bodu (8).*
- (6) Polož $H_i = K$.
- (7) *KONEC. $[U, K]$ je minimální kostra.*
- (8) *Zvětši hodnotu i o jedničku a vrat' se k bodu (2).*

Popsaným způsobem skutečně v $[U, H]$ sestrojíme minimální kostru $[U, K]$.

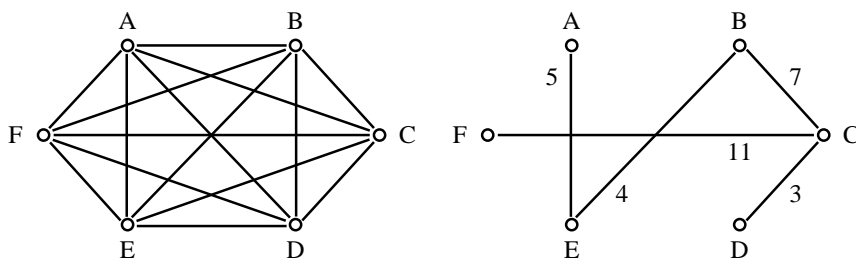
To, že $[U, K]$ je kostra, je evidentní. Nyní je však nutno dokázat, že tato kostra je minimální, tj. že pro každou kostru $[U, L]$ v $[U, H]$ platí $\sum_{h \in K} f(h) \leq \sum_{h \in L} f(h)$.

Tento důkaz nebudeme provádět. Jednoduše jej lze provést například pomocí teorie tzv. *matroidů*, o nichž v tomto textu nehovoříme.

Řešení příkladu 4.16. Hrany grafu K_6 uspořádáme do vhodné posloupnosti například následovně: (CD, BE, AE, BC, CE, DE, CF, BF, AB, EF, AD, BD, DF, AC, AF). Ohodnocení příslušných hran tvoří posloupnost

$$(3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 18, 18, 24, 27, 30).$$

Nyní podle algoritmu do kostry postupně vybereme hrany CD, BE, AE, BC, CF. (Viz obr. 4.16.) (Víme, že kostra musí obsahovat 5 hran.)



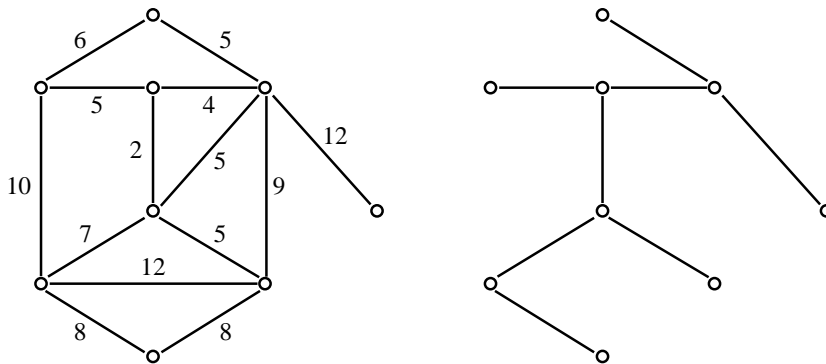
Obr. 4.16: Minimální kostra

Minimální náklady na železniční síť jsou tak 30 milionů Kč.

4.18 Příklad. Na obr. 4.17a je hranově ohodnocený graf, na obr. 4.17b jeho minimální kostra. Ponecháme čtenáři, aby si promyslel, zda je tato minimální kostra určena jednoznačně.

POZNÁMKY A CVIČENÍ

1. Najděte sedm neizomorfních podgrafů grafu K_3 .



Obr. 4.17: Minimální kostra v ohodnoceném grafu

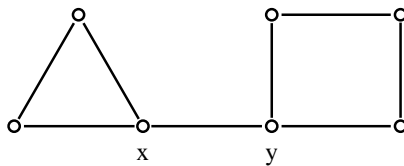
5 Mosty, artikulace a některé grafové charakteristiky

V předcházejícím paragrafu jsme hovořili převážně o grafech neobsahujících žádnou kružnici. „Většina“ grafů však pochopitelně kružnice obsahuje. V řadě úvah o grafech je nutno hrany rozlišovat podle toho, zda leží na nějaké kružnici nebo nikoliv.

5.1 Definice. Hrana grafu se nazývá *most*, když neleží na žádné kružnici.

5.2 Příklad. (a) Ve stromu je každá hrana mostem.

(b) Graf na obr. 5.18 obsahuje právě jeden most – hranu xy .



Obr. 5.18: Graf s jediným mostem

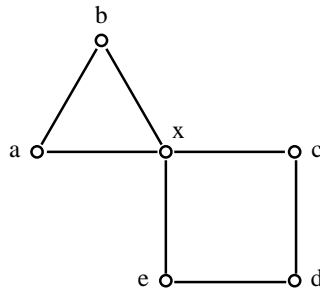
5.3 Věta. Bud' xy most v souvislém grafu $[U, H]$. Pak je graf $[U, H - \{xy\}]$ nesouvislý a má právě dvě komponenty.

Důkaz. V grafu $[U, H - \{xy\}]$ neexistuje sled mezi uzly x, y , takže tento graf je nesouvislý. Množina uzlů se rozpadne evidentně na dvě disjunktní množiny $U(x)$ a $U(y)$ (při označení z definice 3.12). •

5.4 Důsledek. Každá kostra konečného souvislého grafu obsahuje všechny mosty tohoto grafu.

5.5 Definice. Řekneme, že uzel $x \in U$ grafu $[U, H]$ je *artikulace*, když existují hrany $xy, xz \in H, xy \neq xz$, které neleží současně na žádné kružnici.

5.6 Příklad. (a) Ve stromu je artikulací každý uzel, jehož stupeň je alespoň 2.
(b) Graf na obr. 5.19 má právě jednu artikulaci – uzel x .



Obr. 5.19: Graf s jednou artikulací

5.7 Definice. Bud' $\mathcal{G} = [U, H]$ graf, $uv \in H$ libovolná hrana. Množinu $H(uv) \subseteq H$ definujeme takto: je-li hrana uv mostem, je $H(uv) = \{uv\}$. Pokud uv mostem není, pak

$$H(uv) = \{xy \in H; \text{ existuje kružnice v } \mathcal{G} \text{ obsahující } xy \text{ i } uv \}.$$

Dále položme

$$U(uv) = \{t \in U; t \text{ inciduje s některou hranou z } H(uv)\}.$$

Pak je zřejmé $[U(uv), H(uv)]$ podgrafem grafu \mathcal{G} . Tento podgraf nazýváme *člen grafu \mathcal{G} příslušný hraně uv* .

5.8 Příklad. Člen grafu z obr. 5.19 příslušný hraně ab je trojúhelník o vrcholech a, b, x , člen příslušný hraně cd je kružnice o vrcholech c, d, e, x .

Bud' $[U, H]$ graf a uv, xy jeho libovolné navzájem různé hrany takové, že $H(uv) \cap H(xy) \neq \emptyset$. Necht' například $ab \in H(uv) \cap H(xy)$. Pak v $[U, H]$ existuje kružnice R_1 obsahující hrany uv i ab . Necht' $R_1 = [U_1, H_1]$, $R_2 = [U_2, H_2]$. Podle předpokladu je $|U_1 \cap U_2| \geq 2$, neboť $a, b \subseteq U_1 \cap U_2$. Bud' $r, s \in U_1 \cap U_2$ libovolné navzájem různé uzly. Pak existuje v R_1 cesta z r do s obsahující hranu uv . Protože $U_1 \cap U_2$ je konečná množina, existují prvky $r_0, s_0 \in U_1 \cap U_2$ takové, že délka uvedené cesty je minimální. Označme tuto minimální cestu C_1 . Protože však $r_0, s_0 \in U_2$, existuje mezi r_0, s_0 cesta C_2 v R_2 obsahující hranu xy . Spojením cest C_1 a C_2 však zřejmě v $[U, H]$ obdržíme kružnici obsahující hranu uv i hranu xy . To však znamená, že $xy \in H(uv)$ a současně $uv \in H(xy)$. Odtud plyne $H(uv) = H(xy)$.

Právě jsme tak dokázali, že pro dvě hrany $uv, xy \in H$ platí buďto $H(uv) \cap H(xy) = \emptyset$ nebo $H(uv) = H(xy)$. Protože pro libovolnou hranu $uv \in H$ platí $uv \in H(uv)$, je $H(uv) \neq \emptyset$. Odtud celkem plyne

5.9 Věta. *Systém množin $\{H(uv); uv \in H\}$ tvoří rozklad na množině H .*

Zatímco komponenty grafu tvoří disjunktní podgrafy, členy grafu obecně disjunktní podgrafy daného grafu nejsou. Platí totiž

5.10 Věta. *Uzel x je artikulací grafu $[U, H]$ právě tehdy, když existují hrany $xy \neq xz$, z nichž každá patří do jiného členu grafu.*

Důkaz. Je-li x artikulace, pak existují hrany xy, xz neležící na jedné kružnici. Pak ale $H(xy) \neq H(xz)$. Patří-li naopak hrany xy, xz různým členům grafu, neexistuje kružnice, která by obě hrany obsahovala. To však znamená, že x je artikulace. ●

Důležitou charakteristikou grafů je tzv. „cyklomatické číslo“, nazývané též *Bettiho číslo* daného grafu.

5.11 Definice. Bud' $\mathcal{G} = [U, H]$ konečný graf. *Cyklomatickým číslem grafu nazýváme číslo*

$$\nu(\mathcal{G}) = |H| - |U| + k,$$

kde k je počet komponent grafu \mathcal{G} .

5.12 Věta. *Cyklomatické číslo každého konečného grafu je nezáporné.*

Důkaz. Buď $[U, H]$ konečný souvislý graf, tj. $k = 1$. Podle věty 4.8 existuje v $[U, H]$ kostra $[U, H_1]$. Podle věty 4.3 platí $|H_1| = |U| - 1$. Protože $|H_1| \leq |H|$, plyne odtud $|H| \geq |U| - 1$, tj.

$$|H| - |U| + 1 \geq 0.$$

(b) Nechť $[U, H]$ je konečný nesouvislý graf s komponentami $[U_1, H_1], \dots, [U_k, H_k]$. Podle (a) pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ platí $|H_i| - |U_i| + 1 \geq 0$, takže

$$\sum_{i=1}^k (|H_i| - |U_i| + 1) = |H| - |U| + k \geq 0.$$

•

Z důkazu věty 5.12 a věty 4.3 okamžitě plyne

5.13 Věta. *Cyklomatické číslo konečného grafu je rovno nule právě tehdy, když je tento graf lesem.*

5.14 Poznámka. Z výše uvedeného je zřejmé, že cyklomatické číslo grafu udává v jistém smyslu „míru složitosti“ tohoto grafu. Názorně řečeno, $\nu(\mathcal{G})$ udává, kolik hran je v \mathcal{G} nutno odstranit, aby v \mathcal{G} nezůstala žádná kružnice.

Tak jsme výše popsaným způsobem charakterizovali, alespoň v jistém smyslu, „složitost“ grafu. Je samozřejmě účelné umět vhodným způsobem popsat i jiné grafové charakteristiky. Ukažme si takovou charakteristiku alespoň na případě souvislosti grafů.

Elementární odhad „míry souvislosti“ grafu je evidentní – touto mírou je počet komponent. Popis „míry souvislosti“ souvislého grafu je komplikovanější, i když čtenář patrně má jistou intuitivní představu o tom, co to znamená, že jeden graf je „souvislejší“ než druhý.

5.15 Definice. Buď $\mathcal{G} = [U, H]$ souvislý graf. Množina $A \subseteq U$ se nazývá *uzlový řez* grafu $[U, H]$, jestliže se souvislost grafu poruší, vyškrtáme-li z $[U, H]$ všechny uzly množiny A a všechny hrany, které s těmito uzly incidují. (Tj. graf $[U - A, H - \{xy \in H; xy \cap A \neq \emptyset\}]$ je nesouvislý.)
Uzlový stupeň souvislosti $u(\mathcal{G})$ grafu \mathcal{G} je minimální mohutnost uzlového řezu v \mathcal{G} .

5.16 Poznámka. Podle definice 5.15 lze určit uzlový stupeň souvislosti každého konečného souvislého grafu kromě úplných grafů K_n (promyslete si,

které hrany musíme podle definice 5.15 vyškrtnout!). Pro tyto grafy definitoricky klademe

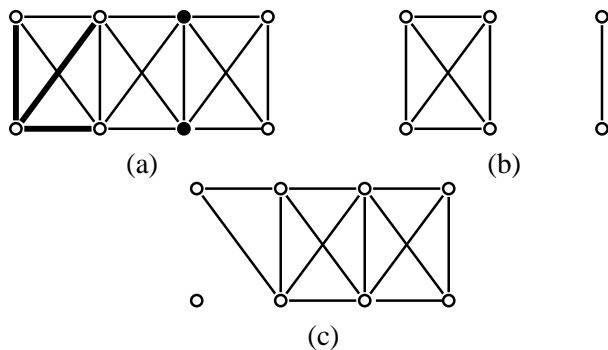
$$u(K_n) = n - 1.$$

Podobně jako uzlový se definuje i hranový stupeň souvislosti.

5.17 Definice. Bud' $\mathcal{G} = [U, H]$ souvislý graf. Množina $H_1 \subseteq H$ se nazývá *hranový řez* v \mathcal{G} , je-li graf $[U, H - H_1]$ nesouvislý. *Hranový stupeň souvislosti* $h(\mathcal{G})$ grafu \mathcal{G} je minimální mohutnost hranového řezu v \mathcal{G} .

5.18 Poznámka. Podle definice 5.17 lze určit $h(\mathcal{G})$ pro každý konečný souvislý graf kromě grafu K_1 (tj. grafu o jednom uzlu). Pro tento graf definitoricky klademe $h(K_1) = 0$.

5.19 Příklad. Pro graf \mathcal{G} na obr. 5.20a platí $u(\mathcal{G}) = 2$, $h(\mathcal{G}) = 3$. Jeden z minimálních uzlových řezů je vyznačen plnými kroužky, jeden z minimálních hranových řezů je vyznačen tučnými hranami. Na obr. 5.20b, respektive 5.20c, je graf vzniklý „odstraněním“ příslušného uzlového, respektive hranového, řezu.



Obr. 5.20: Hranový a uzlový řez v grafu

5.20 Věta. Bud' $\mathcal{G} = [U, H]$ konečný souvislý graf. Pak platí

$$u(\mathcal{G}) \leq h(\mathcal{G}) \leq \min \{st \ x; \ x \in U\}.$$

Důkaz. Je-li $h(\mathcal{G}) = 0$, je také $u(\mathcal{G}) = 0$, neboť \mathcal{G} je v tom případě K_1 . Je-li $h(\mathcal{G}) = 1$, existuje hrana $xy \in H$ taková, že $[U, H - \{xy\}]$ je nesouvislý graf.

Pak je však zřejmě $\mathcal{G} = K_2$ (a tedy $u(\mathcal{G}) = 1$ podle poznámky 5.16) nebo je $\{x\}$, respektive $\{y\}$ uzlový řez v \mathcal{G} (takže opět $u(\mathcal{G}) = 1$).

Předpokládejme proto, že $h(\mathcal{G}) > 1$. Buď H_1 hranový řez, $|H_1| = h(\mathcal{G})$. Zvolme hranu $h \in H_1$ libovolně. Na každé další hraně $e \in H_1$ zvolme uzel x_e tak, že x_e není incidentní s hranou h . Nyní z grafu \mathcal{G} odečteme všechny uzly x_e ($e \in H_1 - \{h\}$) a hrany s těmito uzly incidentní. Je-li takto vzniklý graf nespojitý, platí $u(\mathcal{G}) < h(\mathcal{G})$. V opačném případě obdržíme nutně uzlový řez, přidáme-li k uzlům x_e ještě jeden z uzlů tvořících hranu h . Pak ale $u(\mathcal{G}) = h(\mathcal{G})$.

Dokázali jsme tak, že $u(\mathcal{G}) \leq h(\mathcal{G})$. Druhá nerovnost ve větě je však zřejmá, neboť pro každý uzel $x \in U$ tvoří množina všech hran incidentních s x evidentně hranový řez. ●

Ve větě 2.8 jsme dokázali, že v konečném grafu $[U, H]$ platí $\sum_{x \in U} \text{st } x = 2|H|$. Odtud však okamžitě plyne, že $\min\{\text{st } x; x \in U\} \leq \frac{2|H|}{|U|}$. Z této nerovnosti a z věty 5.20 plyne důsledek.

5.21 Důsledek. *Buď $\mathcal{G} = [U, H]$ konečný souvislý graf. Pak*

$$h(\mathcal{G}) \leq \frac{2|H|}{|U|}.$$

Pro uzlovou i hranovou souvislost jsou známy významné charakterizační věty (Mengerova a Fordova-Fulkersonova). Vzhledem k jejich závažnosti v řadě aplikací je uvedeme, i když jejich důkazy přesahují rámec našeho textu. K formulaci těchto vět však potřebujeme následující jednoduchou definici.

5.22 Definice. Graf \mathcal{G} se nazývá *uzlově*, respektive *hranově k -souvislý*, jestliže platí $u(\mathcal{G}) \geq k$, respektive $h(\mathcal{G}) \geq k$.

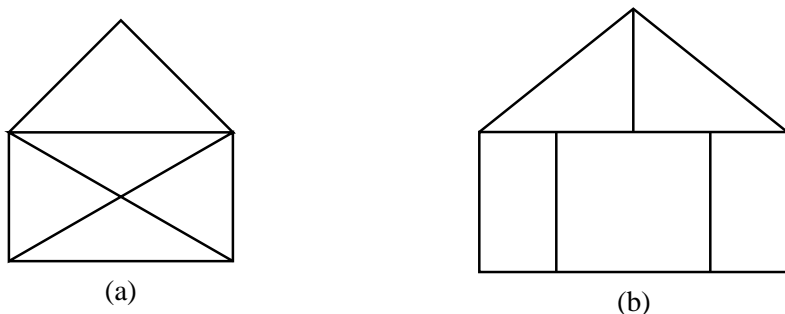
5.23 Věta. (Mengerova věta.) *Graf \mathcal{G} je uzlově k -souvislý právě tehdy, když pro každé dva uzly x, y existuje k cest z x do y , které jsou až na uzly x, y vzájemně disjunktní.*

5.24 Důsledek. *Graf \mathcal{G} je uzlově 2-souvislý právě tehdy, když ke každým dvěma uzlům x, y existuje kružnice v \mathcal{G} , která je obsahuje.*

5.25 Věta. (Fordova-Fulkersonova věta.) *Graf \mathcal{G} je hranově k -souvislý právě tehdy, když pro každé dva uzly x, y existuje k cest z x do y , které jsou hranově disjunktní.*

6 Eulerovské a hamiltonovské grafy

Kreslení obrázků „jedním tahem“ je obvyklou součástí tzv. rekreační matematiky. Pravděpodobně každý čtenář si již jako dítě vyzkoušel, že „domeček“ na obr. 6.21a lze jedním tahem nakreslit; a snadno lze ověřit, že obr. 6.21b jedním tahem nakreslit nelze.



Obr. 6.21: Kreslení grafů jedním tahem

Jak jsme uvedli již v paragrafu 1, vyřešil tuto problematiku již v 18. století Euler v souvislosti s problémem sedmi mostů města Královce.

Připomeňme si ještě, že „tah“ v grafu jsme definovali v definici 3.4.

6.1 Definice. Řekneme, že graf \mathcal{G} lze sestrotit jedním tahem, když v \mathcal{G} existuje tah obsahující všechny hrany tohoto grafu.

V dalším udáme popis všech grafů, které lze jedním tahem sestrotit.

6.2 Definice. Konečný graf bez izolovaných uzlů, jehož každý uzel je sudého stupně, se nazývá *eulerovský*.

6.3 Věta. Každý uzel eulerovského grafu je obsažen alespoň v jedné kružnici.

Důkaz. Bud' $[U, H]$ eulerovský graf, $x \in U$ libovolný uzel. Protože x není izolovaný, existuje hrana xy s tímto uzlem incidentní. Tato hrana však nemůže být mostem, neboť v tom případě by podle věty 5.3 graf $[U, H - \{xy\}]$ byl nesouvislý a komponenta obsahující bod x by obsahovala jediný uzel lichého

stupně (totiž uzel x). To však podle věty 2.11 není možné. Odtud plyne, že hrana xy leží na nějaké kružnici, a tedy i x leží na kružnici. •

6.4 Věta. *Konečný souvislý graf lze sestavit jedním uzavřeným tahem právě tehdy, když je tento graf eulerovský.*

Důkaz. I. Lze-li konečný graf sestavit jedním uzavřeným tahem, je tento graf nutně souvislý. V uzavřeném tahu přitom z každého uzlu tolikrát vystoupíme, kolikrát jsme do něj vstoupili. Je tedy stupeň každého uzlu sudý.

II. Bud' $\mathcal{G} = [U, H]$ souvislý eulerovský graf. Dokážeme, že \mathcal{G} lze sestavit jedním uzavřeným tahem.

Zvolme libovolně uzel $u \in U$. Podle věty 6.3 leží tento uzel na nějaké kružnici, přičemž kružnice je uzavřeným tahem v \mathcal{G} . Množina A všech uzavřených tahů obsahujících uzel u je tedy neprázdná. Protože je A konečná, obsahuje tahy maximální délky. Nechť tedy $\alpha_0 \in A$ je některý tah maximální délky.

Předpokládejme nyní, že existuje hrana $xy \in H$, která není obsažena v tahu α_0 . Označme

$$\begin{aligned} H^* &= \{xy \in H; xy \text{ není obsažena v tahu } \alpha_0\}, \\ U^* &= \{x \in U; \text{ existuje } y \in U \text{ tak, že } xy \in H^*\}. \end{aligned}$$

Pak je $[U^*, H^*]$ podgraf grafu \mathcal{G} . Z definice grafu $[U^*, H^*]$ je přitom okamžitě zřejmé, že je to eulerovský graf.

Protože je \mathcal{G} souvislý, existuje nutně uzel $v \in U^*$, který je obsažen v tahu α_0 . Protože je $[U^*, H^*]$ eulerovský, je uzel v obsažen v nějaké kružnici C grafu $[U^*, H^*]$. Když nyní v \mathcal{G} utvoříme sled začínající v u , pokračujeme v něm až do uzlu v , nyní projdeme kružnici C až do uzlu v a pak dokončíme tah α_0 až do uzlu u , vytvoříme v \mathcal{G} uzavřený tah obsahující uzel u , jehož délka je větší než délka tahu α_0 . To je však spor s definicí α_0 . To znamená, že $H^* = \emptyset$, a tak α_0 obsahuje všechny hrany. •

Pomocí věty 6.4 nyní snadno popíšeme i ty grafy, které lze sestavit jedním otevřeným tahem.

6.5 Věta. *Bud' \mathcal{G} konečný souvislý graf. Pak lze \mathcal{G} sestavit jediným otevřeným tahem právě tehdy, když \mathcal{G} obsahuje právě dva uzly lichého stupně.*

Obsahuje-li \mathcal{G} právě dva uzly lichého stupně, pak otevřený tah v jednom z těchto uzlů nutně začíná a ve druhém končí.

Důkaz. I. Nechť lze souvislý graf \mathcal{G} sestavit jedním otevřeným tahem začínajícím v uzlu x a končícím v uzlu y . Pak jsou uzly x, y evidentně lichého stupně a všechny ostatní uzly jsou stupně sudého.

II. Necht' $\mathcal{G} = [U, H]$ je konečný souvislý graf obsahující právě dva uzly x, y lichého stupně. Buď $z \notin U$ libovolný prvek. Položme $U_1 = U \cup \{z\}$, $H_1 = H \cup \{xz, yz\}$. Pak je $[U_1, H_1]$ souvislý eulerovský graf, takže podle věty 6.4 lze tento graf sestřít jedním uzavřeným tahem. Uvažme takový uzavřený tah; jistě můžeme předpokládat, že začíná a končí v uzlu z . Když nyní z tohoto tahu „vyškrtneme“ hrany xz, yz , dostaneme zřejmě požadovaný otevřený tah. •

Jak si čtenář jistě mnohokrát povšimnul i v jiných matematických disciplínách, lze tutéž skutečnost často popsat na první pohled zcela odlišnými způsoby. Samozřejmě, že je tomu tak i v teorii grafů. Proto i tak jednoduchá tvrzení jako jsou věty 6.4 a 6.5 lze v literatuře najít ve zcela odlišných formulacích. Ukažme si to alespoň na jednom příkladu.

6.6 Definice. Jsou-li $[U, H]$, $[U_1, H_1]$ grafy, nazveme zobrazení $f : U \rightarrow U_1$ *homorfismem* grafu $[U, H]$ do grafu $[U_1, H_1]$, jestliže pro každou hranu $xy \in H$ platí, že $f(x)f(y) \in H_1$ (tj. hrana se zobrazí na hranu). (Srovnej s definicí izomorfismu uvedenou v definici 4.12.)

Vcelku snadno lze dokázat následující tvrzení, jehož důkaz přenecháme čtenáři.

6.7 Věta. *Souvislý graf $[U, H]$ je eulerovský právě tehdy, když je homorfním obrazem kružnice délky $|H|$.*

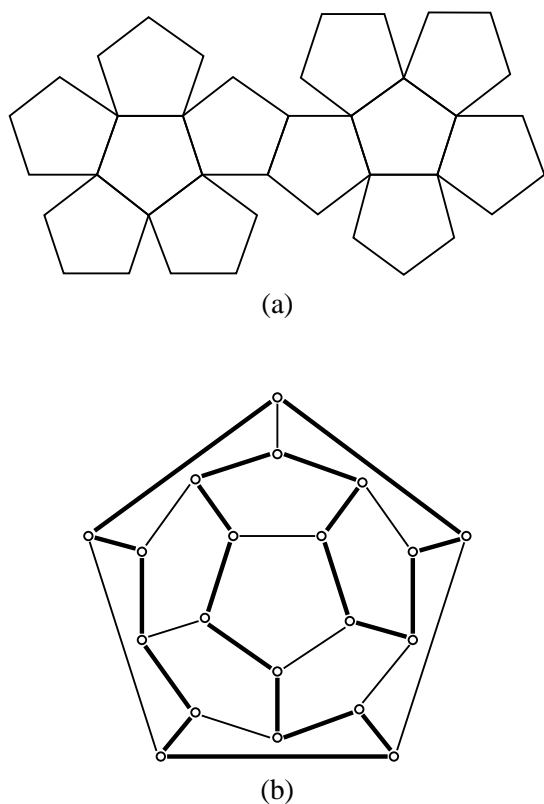
Přeformulování vět 6.4 a 6.5 je nyní zřejmé.

Problematika, kterou se nyní budeme zabývat, jakkoliv je jednou z nejkomplicovanějších částí teorie grafů, má svůj prapůvod v hříčce, kterou v roce 1859 vymyslel irský matematik W. R. Hamilton (známý především objevem tzv. kvaternionů).

Jak dobře víme, jedním z pěti pravidelných mnohostěnů je pravidelný dvanáctistěn, jehož povrch je tvořen shodnými pětiúhelníky. (O pravidelných mnohostěnech budeme podrobněji hovořit v poznámce 7.17.) Povrch tohoto dvanáctistěnu rozvinutý do roviny je na obr. 6.22a. Hamilton připojil ke každému z dvaceti vrcholů tohoto dvanáctistěnu jméno některého světového velkoměsta a nabídl jednomu výrobcí hraček výrobu „hlavolamu“, jehož řešením je „cesta kolem světa“ po hranách daného dvanáctistěnu, během níž se vyjde z některého města, každým z dalších měst se projde právě jednou a cestovatel se nakonec vrátí do výchozího města.

Grafová formulace tohoto „hlavolamu“ je evidentní. Je dán graf o 20 uzlech (vrcholy dvanáctistěnu), hrany grafu odpovídají hranám dvanáctistěnu (jak

v paragrafu 7 odvodíme, je těchto hran 30) a naším úkolem je v tomto grafu najít kružnici procházející všemi uzly. Na obr. 6.22b je znázorněno jedno z řešení. Hrany ležící na kružnici jsou vytaženy silněji. (Graf 6.22b jsme již viděli na obr. 2.8a.)



Obr. 6.22: Povrch dvanáctistěnu

Nyní uveďme standardní terminologii.

6.8 Definice. Graf se nazývá *hamiltonovský*, když v něm existuje kružnice procházející všemi uzly. Tato kružnice se nazývá *hamiltonovská*.

6.9 Poznámka. (a) V definici 2.13 jsme definovali pravidelný graf. Faktor, který je pravidelným grafem, nazýváme *pravidelným faktorem*. Pravidelný faktor 2. stupně obvykle nazýváme *kvadratickým faktorem*. Můžeme tedy říci, že *hamiltonovská kružnice je souvislý kvadratický faktor daného grafu*.

(b) Graf na obr. 6.22b je hamiltonovský. Je však zřejmé, že existují grafy, které hamiltonovské nejsou. Takové jsou například všechny stromy; protože v nich neexistuje žádná kružnice, neexistuje v nich tím spíše kružnice hamiltonovská.

Jakkoliv se na první pohled může zdát problém charakterizace hamiltonovských grafů jednoduchý, není dodnes známa žádná nutná a dostatečná podmínka této skutečnosti. Před uvedením některých známých výsledků ještě uveďme jeden příklad.

6.10 Příklad. S Eulerovým jménem je spojována i následující úloha: *Může jezdec projít šachovnicí (o 64 polích) tak, aby každým polem prošel právě jednou a posledním tahem se vrátil na výchozí pole?*

Grafová formulace je snadná. Uvažujeme graf, jehož uzly jsou jednotlivá pole na šachovnici. Dva uzly jsou pak spojeny hranou právě tehdy, když jezdec může skočit z jednoho pole na druhé. Naším úkolem je nyní v tomto grafu najít hamiltonovskou kružnici – pokud ovšem existuje.

Již dávno je známo, že popsáný graf je opravdu hamiltonovský. Dodnes se však například neví, kolik hamiltonovských kružnic vlastně v tomto grafu existuje.

Nakreslit daný graf nemá smysl, neboť obrázek by byl značně nepřehledný. Popsat v něm hamiltonovskou kružnici je však velmi jednoduché. Do polí schématicky znázorněné šachovnice vepíšeme čísla 1, 2, ..., 64 v takovém pořadí, v jakém jimi bude jezdec postupně procházet. Řešení, které uvádíme v tabulce 6.3 (popsal je v roce 1862 šachista Jaenisch je mimořádně důvtipné tím, že je současně polomagickým čtvercem; součet čísel v každém řádku a každém sloupci je roven 260.

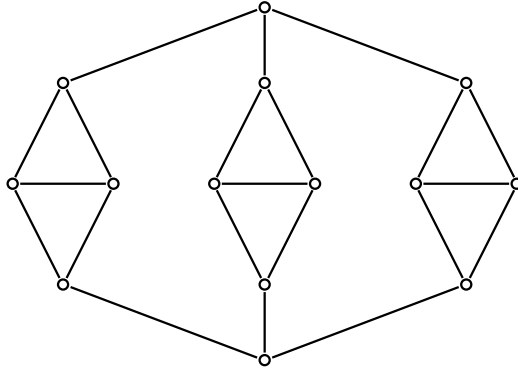
50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Tab. 6.3: Jaenischův polomagický čtverec

Nyní tedy uveďme některé vlastnosti hamiltonovských grafů. Následující nutná podmínka plyne bezprostředně z důsledku 5.24.

6.11 Věta. Je-li \mathcal{G} hamiltonovský graf, je jeho uzlový stupeň souvislosti $u(\mathcal{G}) \geq 2$.

Snadno však lze ukázat, že podmínka z věty 6.11 není pro existenci hamiltonovské kružnice postačující. Například graf na obr. 6.23 má uzlový stupeň souvislosti roven 2, je však snadné se přesvědčit, že není hamiltonovský.



Obr. 6.23: Graf s $u(\mathcal{G}) = 2$, který není hamiltonovský

Nalezení dostatečných podmínek toho, aby graf byl hamiltonovský, bylo velmi obtížné. Jednu z nejznámějších odvodil v roce 1952 Dirac.

6.12 Věta. Necht' $\mathcal{G} = [U, H]$ je konečný graf, $|U| = n \geq 3$ a st $x \geq \frac{n}{2}$ pro každý uzel $x \in U$. Pak je \mathcal{G} hamiltonovský.

Důkaz. Uvědomme si nejprve, že každý konečný graf je podgrafem nějakého hamiltonovského grafu. Zejména můžeme graf $[U, H]$ doplnit o množinu uzlů V a o množinu hran $\{xy; x \in U, y \in V\}$ na hamiltonovský graf. Je-li totiž $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, stačí položit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ (kde $U \cap V = \emptyset$) a hamiltonovskou kružnicí je zřejmě kružnice procházející postupně uzly $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n, u_1$.

Necht' nyní graf $\mathcal{G} = [U, H]$ splňuje předpoklady věty a připusťme, že není hamiltonovský. Označme k nejmenší možný počet uzlů, o které když doplníme spolu s hranami výše uvedeným způsobem graf \mathcal{G} , tak obdržíme hamiltonovský graf \mathcal{G}^* . Je-li $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $V = \{v_1, \dots, v_k\}$, $U^* = U \cup V$, $H^* = H \cup \{u_i v_j; u_i \in U, v_j \in V\}$, je $\mathcal{G}^* = [U^*, H^*]$. V \mathcal{G}^* tedy podle předpokladu existuje hamiltonovská kružnice C , procházející postupně uzly x_1, x_2, \dots, x_m , kde $m = n + k \geq 4$, neboť podle předpokladu je $n \geq 3$, $k \geq 1$. Označení uzlů jistě můžeme zvolit tak, že $x_1 = u_1, x_2 = v_1, x_3 = u_2$ (tj. kružnice začíná „doplněnou“ hranou). V H nyní nemůže být hrana $x_1 x_3 (= u_1 u_2)$. Kdyby

totiž $x_1x_3 \in H$, bylo by doplnění grafu \mathcal{G} o uzel $x_2 = v_1$ zbytečné a to je spor s minimalitou čísla k .

Označme nyní K množinu hran z H^* , které neleží na kružnici C . Je-li $x_1x_i \in K$ pro některé $i \neq 3$, pak $x_3x_{i+1} \notin K$, tj. $x_3x_{i+1} \in H^*$, neboť x_3x_{i+1} jistě není hrana kružnice. Kdyby totiž $x_3x_{i+1} \in K$, mohli bychom v \mathcal{G}^* sestrojít kružnici procházející postupně uzly

$$x_1, x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_3, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_1.$$

Tato kružnice je však hamiltonovská v grafu, který obdržíme z \mathcal{G}^* odečtením uzlu $x_2 = v_1$ a všech hran s tímto uzlem incidentních. To je však spor s předpokladem, že k je nejmenší nutný počet dodaných uzlů.

Nyní určíme, kolik je v K hran tvaru x_1x_i . Uvědomme si, že v \mathcal{G}^* platí $\text{st } u_j \geq \frac{n}{2} + k$ pro každý uzel $u_j \in U$. (V \mathcal{G} je $\text{st } u_j \geq \frac{n}{2}$, v \mathcal{G}^* s uzlem u_j navíc sousedí uzly v_1, \dots, v_k .) Protože v kružnici C sousedí s uzlem x_1 dva uzly, je v K alespoň $\frac{n}{2} + k - 2$ hran tvaru x_1x_i . Podle výše uvedeného to však znamená, že v H^* není minimálně $\frac{n}{2} + k - 2$ hran tvaru x_3x_j (kromě hran x_3x_{i+1} pro $x_1x_i \in K$ je to, jak již víme, ještě hrana x_3x_1 .)

Nyní uvažme, co všechno o uzlu x_3 víme. Vychází z něho alespoň $\frac{n}{2} + k$ hran x_3x_i , přitom však v \mathcal{G}^* nesousedí minimálně s $\frac{n}{2} + k - 1$ uzly $x_i \neq x_3$. Protože však všech uzlů $x_i \neq x_3$ je $n + k - 1$, musí platit

$$\left(\frac{n}{2} + k\right) + \left(\frac{n}{2} + k - 1\right) \leq n + k - 1.$$

Odtud však plyne, že $k \leq 0$, což je spor s předpokladem, že \mathcal{G} není hamiltonovský, takže $k \geq 1$. •

V roce 1960 odvodil norský matematik O. Ore ještě obecnější dostatečnou podmínku existence hamiltonovské kružnice v daném grafu. Je okamžitě zřejmé, že Diracova věta je důsledkem následujícího Oreho tvrzení.

6.13 Věta. *Bud' $[U, H]$ konečný graf, $|U| \geq 3$. Necht' pro každé dva uzly $x, y \in U$, které nejsou sousední, platí*

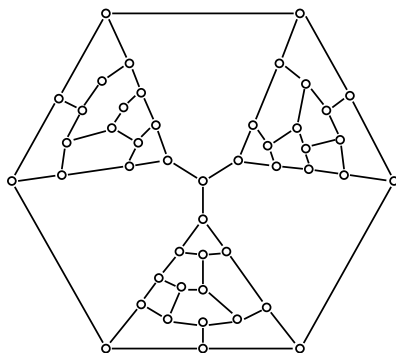
$$\text{st } x + \text{st } y \geq |U|.$$

Pak je graf $[U, H]$ hamiltonovský.

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení nebudeme provádět. •

6.14 Poznámka. Jak jsme již uvedli, není dosud známa pro hamiltonovské grafy charakterizační věta, která by udávala nutnou a dostatečnou podmínku. Proto byly hledány takové podmínky alespoň pro některé důležité třídy grafů.

Dlouho byla například nevyřešena Taitova hypotéza, že každý rovinný uzlově 3-souvislý 3-pravidelný graf je již nutně hamiltonovský. (O rovinných grafech budeme podrobněji hovořit v paragrafu 7. Jsou to jednoduše řečeno grafy, které lze v rovině nakreslit tak, že se jejich hrany neprotínají.) Z platnosti Taitovy hypotézy by mimochodem plynulo kladné řešení problému čtyř barev – viz paragraf 7. V roce 1956 však jeden z nejvýznamnějších odborníků v teorii grafů W. T. Tutte uvedenou hypotézu vyvrátil. Tutteův protipříklad je uveden na obr. 6.24.



Obr. 6.24: 3-souvislý 3-pravidelný nehamiltonovský graf

Tutte však dokázal, že *každý rovinný uzlově 4-souvislý graf je již nutně hamiltonovský*.

6.15 Poznámka. Existuje-li v grafu cesta procházející všemi uzly, nazývá se tato cesta *hamiltonovská*. Graf, v němž existuje hamiltonovská cesta, se nazývá *polohamiltonovský*. Je zřejmé, že každý hamiltonovský graf je současně polohamiltonovský; stejně tak je evidentní, že obrácené tvrzení obecně neplatí. Například graf K_2 je polohamiltonovský, avšak není hamiltonovský.

POZNÁMKY A CVIČENÍ

1. Najděte tři neizomorfní hamiltonovské grafy na čtyřech uzlech.
2. Najděte dva neizomorfní hamiltonovské grafy na pěti uzlech, které mají nejvýše šest hran.
3. Najděte v K_7 tři hamiltonovské kružnice, v nichž je obsaženo všech 21 hran grafu K_7 .

7 Rovinné grafy

V průběhu dosavadního výkladu jsme sice grafy „kreslili“, intuitivně je jistě každému čtenáři zřejmé, jak se toto kreslení provádí, avšak fakticky jsme se mohli bez tohoto kreslení obejít, neboť žádná definice ani žádné tvrzení nebylo na tomto kreslení závislé. (I když je nutno si uvědomit, že právě možnost názorného kreslení je jedním z hlavních důvodů četnosti a rozmanitosti aplikací teorie grafů.)

V tomto paragrafu však bude kreslení grafů hrát centrální roli. Proto je nutno některé pojmy precizovat. Nejprve však uzavřeme následující domluvu.

7.1 Dohoda. V celém paragrafu 7 pojem „graf“ značí „konečný graf“.

7.2 Definice. Bud' dán graf $[U, H]$. *Nakreslení* tohoto grafu (v rovině) vznikne tak, že uzly znázorníme jako body eukleidovské roviny \mathbb{E}_2 a hranu $xy \in H$ znázorníme jako oblouk v \mathbb{E}_2 s koncovými body x, y .

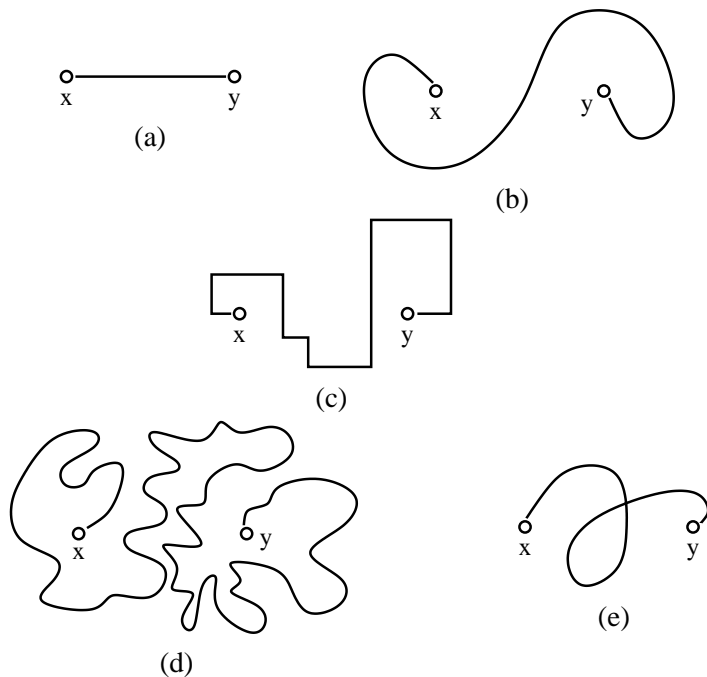
7.3 Poznámka. (a) V teorii grafů se studují nakreslení grafů na různých plochách (například na sféře, na anuloidu apod.). Přes důležitost těchto nakreslení se v dalším budeme zabývat pouze nakreslením grafů v rovině.

(b) Oblouk, jak známo, je topologický obraz úsečky. (Oblouk v rovině je tedy obraz intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{E}_1$ při zobrazení $f: \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2$, které je prosté, spojitě a má tu vlastnost, že inverzní zobrazení f^{-1} je rovněž spojitě.) Protože oblouků mezi dvěma body $x, y \in \mathbb{E}_2$ existuje nekonečně mnoho, plyne odtud, že graf může mít v rovině nekonečně mnoho nakreslení.

Na obr. 7.25a–d jsou oblouky mezi uzly x, y . Na obr. 7.25e je křivka s koncovými body x, y , která však není obloukem.

(c) Grafy samozřejmě většinou kreslíme tak, že hrany znázorňujeme jako úsečky nebo jiné „jednoduše vyhlížející“ křivky a nikoliv tak, jak je to provedeno například na obr. 7.25d. Přesto má obecně graf nekonečně mnoho nakreslení, neboť není jednoznačně předem dáno ani rozmístění uzlů v rovině. Ponecháme na čtenáři, aby si promyslel, že na obr. 7.26a–e je nakreslen tentýž graf.

To, že je na výše uvedených obrázcích nakreslen jeden a tentýž graf, lze jinými slovy zformulovat tak, že každé dva grafy, které mají nakreslení na některém z obr. 7.26, jsou izomorfní.

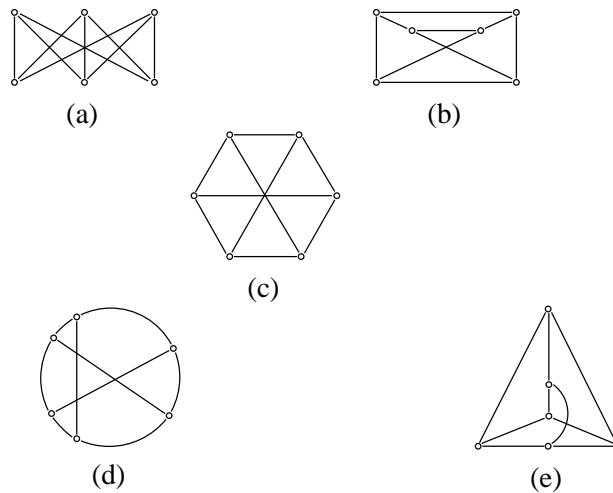
Obr. 7.25: Křivky s koncovými body x , y

Uvážíme-li, že na těchto obrázcích jsme kreslili jednoduchý graf na šesti uzlech, není jistě překvapující, že obecně rozeznat, zda dané dva grafy jsou izomorfní, je jednou z nejtěžších otázek teorie grafů. Dodnes není znám efektivní algoritmus pro řešení tohoto problému.

Při nakreslení grafu se hrany mohou, avšak nemusí, vzájemně křížit. Při některých úvahách a aplikacích je důležité zjistit, zda lze daný graf nakreslit tak, aby se hrany nekřížily. (Například v problematice tištěných spojů apod.) Tím je motivována následující definice.

7.4 Definice. Graf se nazývá *rovinný* (též *planární*), když existuje takové jeho nakreslení, že každé dvě různé hrany mají nejvýše jeden společný bod – uzel, který je případně s oběma hranami incidentní.

Na první pohled je zřejmé, že například stromy nebo kružnice jsou rovinnými grafy. Dokázat, že nějaký graf je rovinný je však zřejmě jednodušší, než dokázat, že daný graf rovinný není. Častou hříčkou je například nalezení rovinného nakreslení grafu na obr. 7.26a. (Podle této známé rekreační úlohy se



Obr. 7.26: Izomorfní grafy na šesti uzlech

také tomuto grafu často říká *tři domy a tři studně*.) Jak v dalším uvidíme, nemá tato úloha řešení, neboť graf na obr. 7.26a není rovinný.

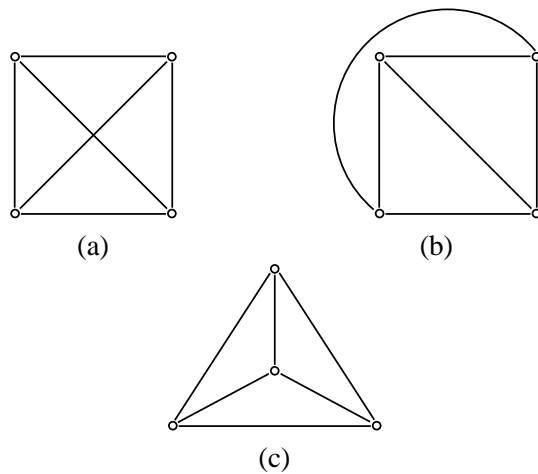
7.5 Příklad. Graf K_4 je rovinný, i když jeho „běžné“ nakreslení je takové, že se hrany protínají (obr. 7.27a). Důležité totiž je, že existuje nakreslení, v němž se hrany neprotínají (obr. 7.27b). Tentýž graf lze však nakreslit ještě mnohem „elegantněji“ (obr. 7.27c).

Existence nakreslení grafu K_4 z obr. 7.27c zákonitě vyplývá z následujícího tvrzení, které odvodil Wagner v roce 1936. Důkaz tohoto tvrzení nebudeme uvádět.

7.6 Věta. *Graf je rovinný právě tehdy, když existuje jeho rovinné nakreslení takové, že všechny jeho hrany jsou znázorněny úsečkami.*

Jedním z nejdůležitějších tvrzení o rovinných grafech je tzv. *Eulerova věta*. K její formulaci však potřebujeme následující definici.

7.7 Definice. Buď $[U, H]$ rovinný souvislý graf. Buď dáno některé jeho rovinné nakreslení. Označme W množinu všech oblastí, na něž je tímto nakreslením rovina rozdělena (včetně „vnějšku“). Pak trojici $[U, H, W]$ nazveme *mapou*.

Obr. 7.27: Různá nakreslení grafu K_4

7.8 Poznámka. Oblast, jak známo, je otevřená souvislá množina. Například každá kružnice rozdělí rovinu na dvě oblasti – vnitřek a vnějšek. Mapa určená nakreslením grafu K_4 na obr. 7.27c obsahuje 4 oblasti. Nakreslení téhož grafu na obr. 7.27a žádnou mapu neurčuje, neboť uvedené nakreslení není rovinné.

7.9 Věta. (Eulerova věta.) *Bud' $[U, H, W]$ libovolná mapa. Pak*

$$|W| + |U| - |H| = 2. \quad (7.1)$$

Důkaz. Indukcí vzhledem k číslu $|H|$. Je-li $H = \emptyset$, je nutně $|U| = 1$, neboť graf $[U, H]$ je souvislý. Pak ale $|W| = 1$ a rovnost 7.1 je splněna triviálně.

Předpokládejme nyní, že rovnost 7.1 platí pro všechny mapy $[U, H, W]$ takové, že $|H| \leq n$. Bud' $[U, H, W]$ mapa, $|H| = n + 1$. Rozlišíme dva případy:

(a) Graf $[U, H]$ obsahuje most xy . Podle věty 5.3 je graf $[U, H - \{xy\}]$ nesouvislý a má dvě komponenty $[U_1, H_1], [U_2, H_2]$. Protože $|H_1| \leq n, |H_2| \leq n$, platí podle indukčního předpokladu pro mapy $[U_1, H_1, W_1]$ a $[U_2, H_2, W_2]$

$$|W_1| + |U_1| - |H_1| = |W_2| + |U_2| - |H_2| = 2.$$

Dále platí $|H_1| + |H_2| + 1 = |H|$ (neboť od H jsme odečetli hranu xy) a $|U_1| + |U_2| = |U|$. Odečtením mostu se v dané mapě počet oblastí nezměnil, avšak v součtu $|W_1| + |W_2|$ je „vnějšek“ započítán dvakrát. Proto $|W_1| + |W_2| = |W| + 1$. Odtud celkem dostáváme:

$$\begin{aligned} |W| + |U| - |H| &= (|W_1| + |W_2| - 1) + (|U_1| + |U_2|) - \\ &- (|H_1| + |H_2| + 1) = (|W_1| + |U_1| - |H_1|) + (|W_2| + |U_2| - |H_2|) - 2 = \\ &= 2 + 2 - 2 = 2. \end{aligned}$$

V případě, že $[U, H]$ obsahuje most, je tak věta dokázána.

(b) Nechť $[U, H]$ neobsahuje most. Buď $h \in H$ libovolná hrana. Protože h není most, leží na nějaké kružnici. Označme C kružnici maximální délky, která obsahuje hrana h . Uvnitř kružnice C je nutně nějaká oblast, která vynecháním hrany h v mapě $[U, H, W]$ zanikne. V mapě $[U, H_1, W_1]$ vzniklé z mapy $[U, H, W]$ odečtením hrany h je tedy o jednu hrana a jednu oblast méně než v mapě původní. Protože $|H_1| = n$, platí pro mapu $[U, H_1, W_1]$ rovnost 7.1, tj. $|W_1| + |U| - |H_1| = 2$. Odtud však plyne platnost 7.1 i pro mapu $[U, H, W]$. •

Pomocí Eulerovy věty lze snadno dokázat následující důležité tvrzení.

7.10 Věta. *Graf K_5 (tj. úplný graf na pěti uzlech) ani graf z obr. 7.26a (tj. graf „3 domy a 3 studně“) není rovinný.*

Důkaz. (a) Pripustíme, že graf K_5 je rovinný. Nechť tedy $[U, H, W]$ je mapa vzniklá některým jeho rovinným nakreslením. Platí $|U| = 5$, $|H| = 10$, tj. $|W| = 2 + |H| - |U| = 7$. Každá oblast přitom musí mít hranici alespoň ze tří hran a každá hrana odděluje alespoň dvě oblasti (protože v K_5 neexistují mosty). Platí tak

$$2 \cdot 10 \geq 3 \cdot |W|,$$

tj. $|W| < 7$, což je spor.

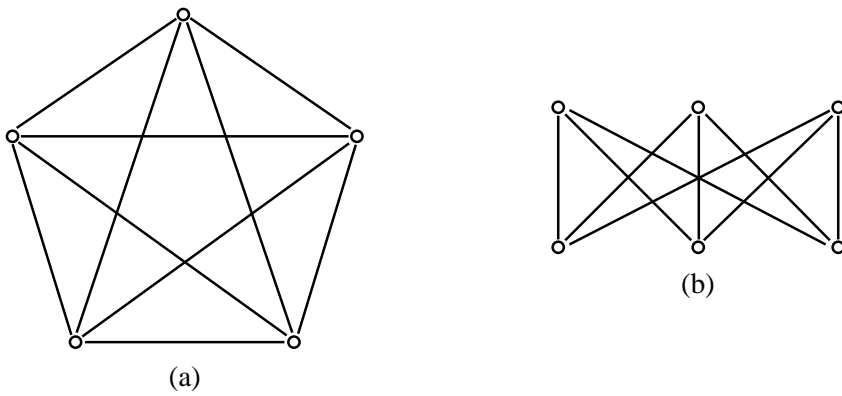
(b) Analogicky. Kdyby $[U, H, W]$ byla mapa vzniklá rovinným nakreslením grafu „3 domy a 3 studně“, platilo by v této mapě, $|U| = 6$, $|H| = 9$, tj. $|W| = 5$. Každá oblast je opět omezena alespoň třemi hranami. Každá kružnice v $[U, H]$ má jistě sudou délku (pravidelně se v ní musí střídát „domy“ a „studně“), takže každá kružnice má délku nejméně 4. Odtud plyne

$$2 \cdot 9 \geq 4 \cdot |W|,$$

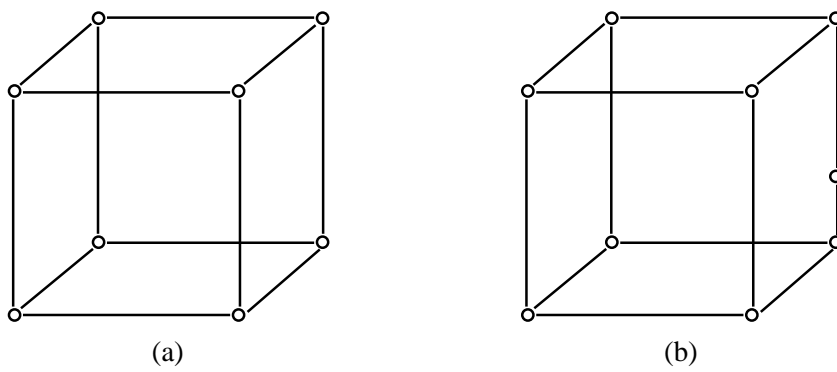
tj. $|W| < 5$, což je spor. •

7.11 Poznámka. Jak dokázal v roce 1930 významný polský matematik K. Kuratowski, hrají grafy z věty 7.10 v charakterizaci planárních grafů zcela zásadní roli (viz věta 7.16). Proto se těmto grafům často také říká *Kuratowského grafy*. Pro jejich důležitost si tyto grafy ještě jednou nakresleme (obr. 7.28), i když jsme se s nimi již nejdou setkali.

7.12 Definice. Buď $[U, H]$ libovolný graf, $xy \in H$ jeho libovolná hrana. Buď $z \notin U \cup H$ libovolný prvek. Položme $U^* = U \cup \{z\}$, $H^* = (H - \{xy\}) \cup \{xz, yz\}$. Pak řekneme, že graf $[U^*, H^*]$ vznikl z grafu $[U, H]$ *půlením hrany xy* .



Obr. 7.28: Kuratowského grafy



Obr. 7.29: Půlení hrany

7.13 Příklad. Graf na obr. 7.29b vznikl z grafu na obr. 7.29a půlením jedné z hran.

I z názoru je zřejmé, že při kreslení grafů se takové dva grafy, z nichž jeden vznikl z druhého postupným půlením hran, „chovají stejně“. Tím je motivována následující definice.

7.14 Definice. Řekneme, že grafy \mathcal{G}, \mathcal{H} jsou *homeomorfní*, jestliže existují konečné posloupnosti grafů

$$\begin{aligned} \mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n \\ \mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_m \end{aligned}$$

takové, že :

- (a) \mathcal{G}_n je izomorfní s \mathcal{H}_m ;
- (b) v každé z těchto posloupností vznikl následující graf z předcházejícího půlením některé hrany.

7.15 Příklad. Každé dvě kružnice jsou homeomorfní.

Nyní uvedeme bez důkazu již zmiňovanou Kuratowského větu.

7.16 Věta. *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podgraf homeomorfní s některým Kuratowského grafem (tj. s některým grafem z obr. 7.28).*

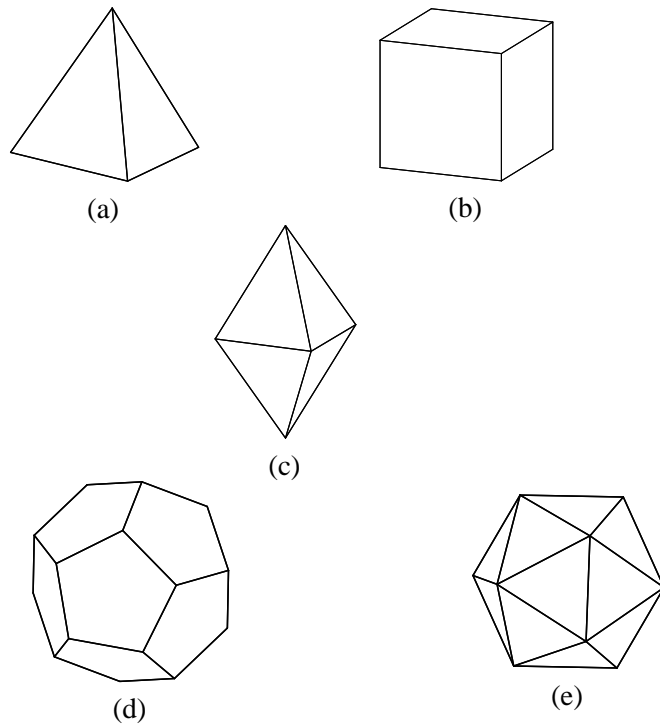
7.17 Poznámka. Ukažme si, jak lze pomocí teorie rovinných grafů jednoduše zodpovědět jeden z klasických geometrických problémů.

Již staří Řekové znali pět typů pravidelných mnohostěnů (tzv. *Platónových těles*): (a) pravidelný čtyřstěn, (b) krychli, (c) pravidelný osmistěn, (d) pravidelný dvanáctistěn, (e) pravidelný dvacetistěn. (Viz obr. 7.30).

Neuměli však dokázat, zda existují ještě jiné pravidelné mnohostěny. Metodami teorie grafů nyní ukážeme, že žádné další pravidelné mnohostěny neexistují. K tomu však potřebujeme několik jednoduchých pojmů.

Omezená množina $T \subseteq \mathbb{E}_3$ se nazývá *hvězdovitá*, když existuje bod $s \in T$ takový, že každá polopřímka s počátečním bodem s má s hranicí množiny T právě jeden společný bod. Je zřejmé, že „běžná“ konvexní tělesa (koule, hranol, válec apod.) jsou hvězdovité množiny. Snadno však lze ukázat, že existují i nekonvexní hvězdovitá tělesa.

Z definice hvězdovité množiny okamžitě plyne, že její hranici lze zobrazit spojitou bijekcí na sféru. (Protože je T omezená, je částí nějaké koule v \mathbb{E}_3 .)



Obr. 7.30: Platónova tělesa

Uvedená bijekce je realizována „promítáním“ hranice na příslušnou kulovou plochu ze středu s .)

Mnohostěn, který je zároveň hvězdovitou množinou, nazveme *hvězdovitým mnohostěnem*.

Jak dobře víme, hvězdovitý mnohostěn se nazývá *pravidelný*, jestliže všechny jeho stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky. Ke každému pravidelnému mnohostěnu existují přirozená čísla n, p taková, že všechny stěny jsou shodné pravidelné n -úhelníky a v každém jeho vrcholu se stýká p hran. Uspořádaná dvojice $[n, p]$ se nazývá *Schläfliův symbol* daného pravidelného mnohostěnu.

Schläfliův symbol Platónových těles je následující: pravidelný čtyřstěn má symbol $[3, 3]$, krychle $[4, 3]$, pravidelný osmistěn $[3, 4]$, pravidelný dvanáctistěn $[5, 3]$ a konečně pravidelný dvacetistěn $[3, 5]$.

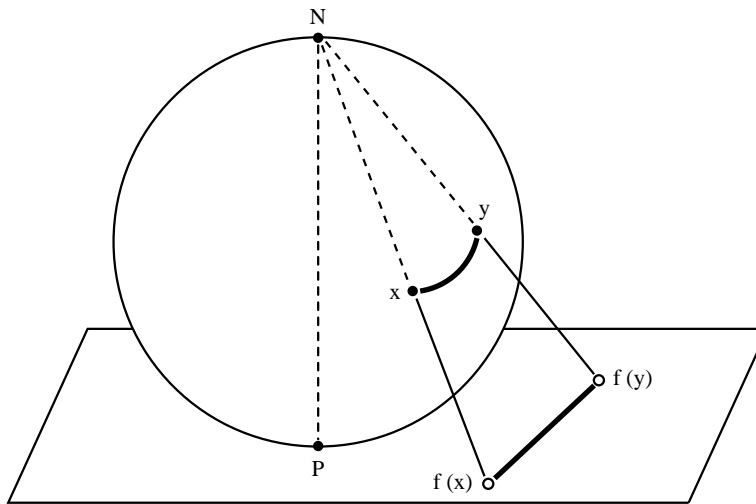
Jak jsme uvedli, lze hranici každé hvězdovité množiny zobrazit spojitou bijekcí na sféru. Zejména tedy lze takto na sféru zobrazit hranici (tj. povrch) každého pravidelného mnohostěnu. Uvedeným zobrazením povrchu mnohostěnu vznikne na sféře „mapa“. (Definice mapy na sféře je analogická definici 7.7

mapy v rovině.)

Užitím tzv. *stereografické projekce* však lze snadno dokázat, že pro mapy na sféře rovněž platí Eulerova věta 7.9.

(Připomeňme si, že stereografická projekce je zobrazení sféry s vyjmutým jedním bodem na rovinu, definované následovně:

Nechť se sféra S dotýká roviny \mathbb{E}_2 v bodě P . Buď PN průměr sféry S (viz obr. 7.31). Buď $x \in S$ libovolný bod různý od N . Bod $f(x) \in \mathbb{E}_2$ je průsečík polopřímky Nx s rovinou \mathbb{E}_2 . Je zřejmé, že stereografická projekce f je bijekcí množiny $S - \{N\}$ na \mathbb{E}_2 a zobrazení f i f^{-1} jsou spojitá. Nyní je také zřejmé, že při stereografické projekci se mapa na sféře zobrazí na mapu v rovině, přičemž se uzly zobrazí na uzly, hrany na hrany a oblasti na oblasti. Proto evidentně platí Eulerova věta i pro mapy na sféře.)



Obr. 7.31: Stereografická projekce

Buď nyní T pravidelný mnohostěn. Označme R počet jeho stěn, M počet hran, N počet vrcholů, n počet stran jedné stěny, p počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu.

Protože každá hrana spojuje dva vrcholy a v každém vrcholu se sbíhá p hran, platí

$$Np = 2M. \quad (7.2)$$

Protože každá stěna je omezena n hranami a každá hrana sousedí se dvěma stěnami, platí

$$Rn = 2M. \quad (7.3)$$

Konečně, podle Eulerovy věty platí

$$N + R - M = 2. \quad (7.4)$$

Rovnice 7.2, 7.3, 7.4 jsou rovnice o neznámých M, N, R s parametry n, p přičemž tyto parametry jsou přirozená čísla větší nebo rovna 3. Z 7.2 – 7.4 dostáváme

$$M = \frac{2np}{2p + 2n - np}, \quad N = \frac{4n}{2p + 2n - np}, \quad R = \frac{4p}{2p + 2n - np}. \quad (7.5)$$

Protože všechna čísla M, N, P jsou kladná, musí platit $2p + 2n - np > 0$, tj.

$$(n - 2)(p - 2) < 4, \quad n \geq 3, p \geq 3.$$

Protože $n - 2 > 0, p - 2 > 0$, platí nutně $(n - 2)(p - 2) \in \{1, 2, 3\}$. Odtud dostáváme:

- (a) $(n - 2)(p - 2) = 1 \Rightarrow n = 3, p = 3,$
- (b) $(n - 2)(p - 2) = 2 \Rightarrow n = 3, p = 4$ nebo $n = 4, p = 3,$
- (c) $(n - 2)(p - 2) = 3 \Rightarrow n = 3, p = 5$ nebo $n = 5, p = 3.$

Pravidelným mnohostěm proto existuje nejvýše pět druhů, tj. právě pět druhů.

Hodnoty M, N, R, n, p těchto pravidelných mnohostěm udává tabulka 7.4.

	R	M	N	n	p
Pravidelný čtyřstěn	4	6	4	3	3
Krychle	6	12	8	4	3
Pravidelný osmistěn	8	12	6	3	4
Pravidelný dvanáctistěn	12	30	20	5	3
Pravidelný dvacetistěn	20	30	12	3	5

Tab. 7.4: Tabulka hodnot R, M, N, n, p pro Platónova tělesa

POZNÁMKY A CVIČENÍ

- Podle Wagnerovy věty 7.6 lze každý planární graf namalovat bez protínání hran, jimiž jsou úsečky. Namalujte tak Kuratowského grafy, z nichž je odebrána jedna hrana.

8 Barvení grafů

Nejprve si na dvou jednoduchých problémech ilustrujme důvody, které vedly k problematice „barvení“ grafů.

8.1 Problém. Mějme danu množinu L různých druhů léků. Přitom je známo, které dvojice různých léků se pacientům nesmějí podávat současně. Na množině L chceme definovat rozklad tak, že léky ležící v jedné třídě rozkladu se současně podávat mohou. (Takový rozklad jistě existuje – například rozklad na jednoprvkové třídy.) Náš problém nyní zní: *Jaký je minimální počet tříd takového rozkladu?*

Přeformulujme si problém následovně: Bud' $[L, H]$ graf, v němž pro $x, y \in L$ platí $xy \in H$ právě tehdy, když se léky x, y nesmějí podávat současně. Nyní si představme, že uzly grafu $[L, H]$ obarvíme barvami (modře, červeně atd.) tak, že žádné dva sousední uzly nebudou obarveny stejnou barvou.

Problém 8.1 nyní můžeme přeformulovat takto: *Jaký minimální počet barev k výše uvedenému obarvení potřebujeme?*

8.2 Problém. Je dána množina V rádiových vysílacích stanic a každá stanice $x \in V$ má určenu množinu $V_x \subseteq V$ stanic, s nimiž má udržovat spojení. Ptáme se, jaký je minimální možný počet různých frekvencí, které musí být k dispozici, chceme-li zajistit, aby každá stanice $x \in V$ udržovala s každou ze stanic z množiny V_x spojení na jiné frekvenci?

Grafová formulace je opět jednoduchá. Utvořme graf, v němž V je množina uzlů a dva uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, když příslušné stanice mají udržovat spojení. Hledáme minimální počet barev nutný k takovému obarvení hran tohoto grafu, že každé dvě hrany, které mají společný uzel, jsou obarveny různě.

Před uvedením základních výsledků o barvení grafů uzavřeme, podobně jako v paragrafu 7, následující dohodu.

8.3 Dohoda. V celém paragrafu 8 slovo „graf“ značí „konečný graf“.

8.4 Definice. Bud' $[U, H]$ graf. Zobrazení $f : U \rightarrow \mathbb{N}$ nazveme *obarvení uzlů*, jestliže pro každé dva sousední uzly $x, y \in U$ platí $f(x) \neq f(y)$ (tj. $xy \in H \Rightarrow f(x) \neq f(y)$).
 Řekneme, že graf $[U, H]$ je *uzlově k -chromatický*, existuje-li obarvení f uzlů takové, že $|f(U)| \leq k$.
Uzlové chromatické číslo $\chi(\mathcal{G})$ grafu \mathcal{G} je nejmenší číslo $k \in \mathbb{N}_0$ takové, že \mathcal{G} je uzlově k -chromatický.

Z definice je zřejmé, že každý graf má jednoznačně určené uzlové chromatické číslo. Jeho nalezení v konkrétních případech však může být velmi obtížné. Důkaz následujícího tvrzení je však jednoduchý, a proto ho přenecháme čtenáři.

8.5 Věta. Bud' $\mathcal{G} = [U, H]$ graf. Pak platí:

- (a) $\chi(\mathcal{G}) = 1 \iff H = \emptyset$.
 (b) Je-li \mathcal{G} strom a $|H| \geq 1$, pak $\chi(\mathcal{G}) = 2$.

Grafy s uzlovým chromatickým číslem 2 hrají v řadě aplikací důležitou roli. Jak nyní uvedeme, je charakteristika těchto grafů velmi jednoduchá.

8.6 Věta. Bud' $\mathcal{G} = [U, H]$ graf, $H \neq \emptyset$. Pak $\chi(\mathcal{G}) = 2$ právě tehdy, když neobsahuje kružnici liché délky.

Důkaz. I. Nutnost podmínky je zřejmá, neboť k obarvení kružnice liché délky je nezbytné užít alespoň tří barev.

II. Necht' $\mathcal{G} = [U, H]$ neobsahuje kružnici liché délky. Dostatečnost této podmínky budeme dokazovat indukcí vzhledem k počtu kružnic v \mathcal{G} . Uvědomme si přitom, že důkaz stačí provést pro souvislé grafy, neboť obarvení uzlů v jednotlivých komponentách můžeme provádět samostatně a nezávisle na sobě.

Neobsahuje-li \mathcal{G} žádnou kružnici, je \mathcal{G} strom a podle věty 8.5(b) platí $\chi(\mathcal{G}) = 2$. Necht' tedy tvrzení platí pro každý souvislý graf obsahující nejvýše n kružnic sudé délky. Bud' nyní $\mathcal{G} = [U, H]$ graf obsahující $n + 1$ kružnic sudé délky. Bud' C libovolná kružnice v \mathcal{G} . Zvolme v C libovolně hranu xy . Graf $\mathcal{G}^* = [U, H - \{xy\}]$ obsahuje nejvýše n kružnic, takže podle předpokladu platí $\chi(\mathcal{G}^*) = 2$. Odtud plyne existence obarvení uzlů $f : U \rightarrow \{1, 2\}$ grafu \mathcal{G}^* . Kružnice C bez hrany xy je had, v němž se obarvení uzlů pravidelně střídá. Protože tento had obsahuje sudý počet uzlů, je $f(x) \neq f(y)$. To však znamená, že f je současně obarvením grafu \mathcal{G} , čímž je důkaz hotov. ●

8.7 Definice. Necht' $\mathcal{G} = [U, H]$ je graf a necht' lze množinu U rozložit na dvě neprázdné disjunktí podmnožiny U_1, U_2 tak, že každá hrana má jeden uzel v U_1 a druhý uzel v U_2 . Pak se graf \mathcal{G} nazývá *bipartitní*. Uvedený bipartitní graf se obvykle zapisuje ve tvaru $[U_1, U_2, H]$.

Bipartitní graf $[U, V, H]$ se nazývá *úplný*, když pro každé dva uzly $x \in U, y \in V$ platí $xy \in H$. Je-li $|U| = m, |V| = n$, značí se úplný bipartitní graf $[U, V, H]$ symbolem $K_{m,n}$.

Tak například Kuratowského graf „3 domy a 3 studně“ na obr. 7.28b je graf $K_{3,3}$. Pro bipartitní graf \mathcal{G} s neprázdnou množinou hran zřejmě platí $\chi(\mathcal{G}) = 2$.

Bipartitní grafy jsou studovány zejména v souvislosti s tzv. *párováním* v grafech, což je jedna z nejzávažnějších částí kombinatoriky a teorie grafů.

Zformulujme si nejprve jeden z klasických kombinatorických problémů, tzv. *problém o svatbách*.

8.8 Příklad. Je dána množina H hochů a množina D dívek, $|D| \geq |H|$. Každý hoch zná alespoň jednu dívku. Jaká je nutná a dostatečná podmínka toho, aby se každý hoch mohl oženit s dívkou, kterou zná?

Nalezení jednoduché nutné podmínky je snadné: kdyby existovala nějaká k -tice chlapců ($k \leq |H|$) taková, že všech dívek, které by znal alespoň jeden chlapec z této k -tice, by bylo méně než k , pak by jistě nebylo možné požadované svatby uskutečnit.

Jak dokázal v roce 1935 Ph. Hall, je tato jednoduchá nutná podmínka současně také podmínkou dostatečnou. *Hallová věta* je jedním z nejdůležitějších kombinatorických tvrzení. Důkaz tohoto tvrzení nebudeme provádět.

8.9 Věta. (Hallová věta.) *Bud' dána množina $S_i, i = 1, \dots, n$, neprázdných konečných množin. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(a) *Existuje prosté zobrazení $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \bigcup_{i=1}^n S_i$ takové, že $f(i) \in S_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$.*

(b) *Pro každou podmnožinu $\emptyset \neq A \subseteq \{1, \dots, n\}$ platí $|A| \leq \left| \bigcup_{i \in A} S_i \right|$.*

Grafová interpretace Hallovy věty je jednoduchá. Bud' dán bipartitní graf $[U, V, H], |U| \leq |V|$. Pro každý uzel $x \in U$ označme $V_x = \{y \in V; xy \in H\}$.

8.10 Definice. *Párováním* v daném bipartitním grafu $[U, V, H]$ nazveme každý jeho podgraf $[U^*, V^*, H^*]$, který je pravidelným grafem 1. stupně (tj. z každého uzlu vychází právě jedna hrana).

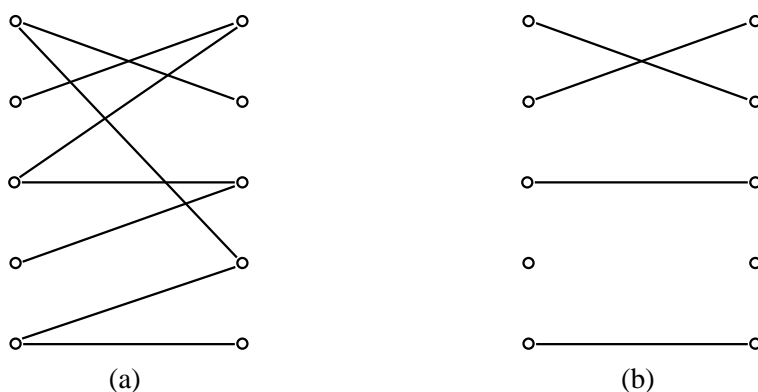
Z Hallovy věty okamžitě plyne, že v bipartitním grafu $[U, V, H]$ existuje alespoň jedno párování $[U, V^*, H^*]$ právě tehdy, když pro každou podmnožinu $\emptyset \neq U_1 \subseteq U$ platí

$$|U_1| \leq \sum_{x \in U_1} |V_x|. \quad (8.1)$$

Párování v bipartitním grafu se nazývá *úplné*, je-li faktorem daného grafu (tj. $V^* = V$). Je zřejmé, že v $[U, V, H]$ úplné párování existuje právě tehdy, když kromě podmínky 8.1 navíc platí $|U| = |V|$.

Jestliže v bipartitním grafu $[U, V, H]$ párování neexistuje, je přirozené hledat maximální (vzhledem k počtu hran) podgraf v $[U, V, H]$, který je pravidelným grafem 1. stupně. Takové podgrafy mají řadu aplikací v operačním výzkumu, v lineárním programování apod¹.

Na obr. 8.32a je bipartitní graf, v němž neexistuje párování (je to faktor grafu $K_{5,5}$). Na obr. 8.32b je jeden z maximálních pravidelných podgrafů 1. stupně.



Obr. 8.32: Maximální pravidelný podgraf 1. stupně v daném grafu

Nyní se vraťme k problematice barvení uzlů v grafu.

Jakkoliv je obecně určení čísla $\chi(\mathcal{G})$ obtížné, je jednoduchá jeho následující majorizace.

8.11 Věta. *Bud' $\mathcal{G} = [U, H]$ graf. Označme $\varrho = \max \{st\ x; x \in U\}$. Pak platí*

$$\chi(\mathcal{G}) \leq \varrho + 1.$$

¹Nejběžnější z algoritmů pro hledání tohoto maximálního podgrafu je tzv. *maďarský algoritmus*.

Důkaz. Indukcí vzhledem k číslu $|U|$. Pro $|U| = 1$ je tvrzení zřejmé. Necht' tedy tvrzení věty platí pro všechny grafy $[U, H]$ takové, že $|U| \leq n$. Bud' nyní $\mathcal{G} = [U, H]$ graf, $|U| = n + 1$. Označme \mathcal{G}^* graf, který vznikne z grafu \mathcal{G} odečtením některého uzlu x a všech hran s tímto uzlem incidentních. Podle předpokladu platí $\chi(\mathcal{G}^*) \leq \varrho + 1$, takže existuje obarvení uzlů grafu \mathcal{G}^* $f: (U - \{x\}) \rightarrow \{1, \dots, \varrho + 1\}$. V grafu \mathcal{G} však s uzlem x sousedí nejvýše ϱ uzlů, takže uzly v \mathcal{G} můžeme obarvit následovně:

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{pro } t \neq x, \\ p & \text{pro } t = x, \end{cases}$$

kde $p \in \{1, \dots, \varrho + 1\}$ je takový prvek, že $p \neq f(u)$ pro všechny uzly $u \in U$, $tu \in H$. Pak je g obarvení daného grafu nejvýše $\varrho + 1$ barvami. •

Nyní se budeme zabývat barvením hran.

8.12 Definice. Bud' $[U, H]$ graf. Zobrazení $f: H \rightarrow \mathbb{N}$ nazveme *obarvením hran*, jestliže pro každé dvě hrany $h_1, h_2 \in H$, $h_1 \neq h_2$, takové, že $h_1 \cap h_2 \neq \emptyset$, platí $f(h_1) \neq f(h_2)$. Řekneme, že graf $[U, H]$ je *hranově k -chromatický*, když existuje obarvení f hran takové, že $|f(H)| \leq k$. *Hranové chromatické číslo* $\chi_h(\mathcal{G})$ grafu \mathcal{G} je nejmenší číslo $k \in \mathbb{N}_0$ takové, že \mathcal{G} je hranově k -chromatický.

Ve větě 8.11 jsme uvedli horní odhad uzlového chromatického čísla. Má-li symbol ϱ též smysl jako ve větě 8.11, je z definice okamžitě zřejmé, že pro hranové chromatické číslo platí $\chi_h(\mathcal{G}) \geq \varrho$. Jak v roce 1964 dokázal ruský matematik G. V. Vizing, platí dokonce následující věta, kterou uvedeme bez důkazu.

8.13 Věta. Pro libovolný graf \mathcal{G} platí $\varrho \leq \chi_h(\mathcal{G}) \leq \varrho + 1$.

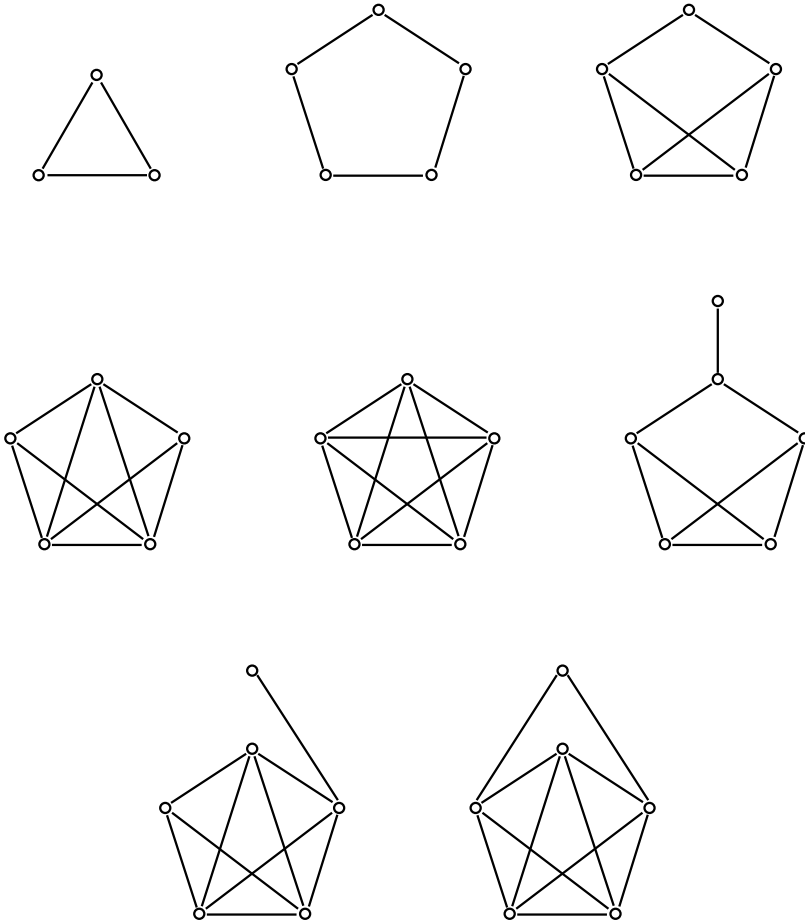
8.14 Poznámka. Hranové chromatické číslo daného grafu tedy může nabýt jen dvou hodnot: ϱ nebo $\varrho + 1$. Řekneme, že graf \mathcal{G} patří do *první*, respektive do *druhé třídy*, je-li $\chi_h(\mathcal{G}) = \varrho$, respektive $\chi_h(\mathcal{G}) = \varrho + 1$.

Je zřejmé, že například každá kružnice sudé délky patří do první třídy, každá kružnice liché délky do druhé třídy. Dodnes však není známa charakterizace příslušnosti grafů k těmto třídám. Přitom není zastoupení grafů v těchto třídách ani zdaleka rovnoměrné. Jak v roce 1977 dokázali P. Erdős a R. J. Wilson, platí následující tvrzení:

Označíme-li $p_i(n)$ počet grafů na n uzlech patřících do i -té třídy, platí

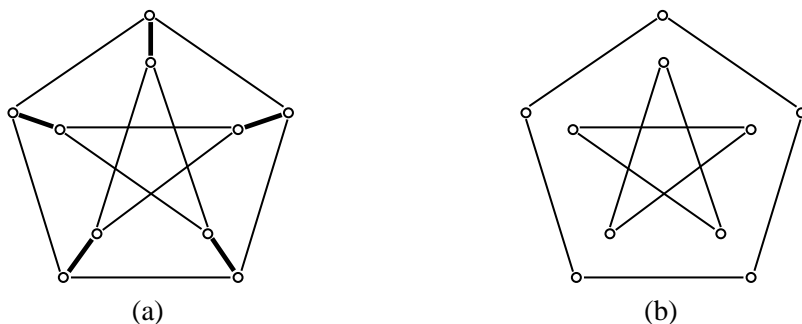
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_2(n)}{p_1(n)} = 0.$$

Podle [6] existuje například 143 souvislých grafů s nejvýše šesti uzly a pouze 8 z nich patří do druhé třídy. Těchto 8 grafů je na obr. 8.33.



Obr. 8.33: Grafy druhé třídy na nejvýše šesti uzlech

8.15 Příklad. Důležitým grafem patřícím do druhé třídy je tzv. *Petersenův graf* (obr. 8.34a). J. Petersen uveřejnil v roce 1891 práci v níž podrobně popsal vlastnosti pravidelných grafů; především pak studoval problém existence pravidelných faktorů v těchto grafech.



Obr. 8.34: Petersenův graf a jeho kvadratický faktor

Jak je okamžitě zřejmé, je Petersenův graf pravidelným grafem 3. stupně. Obsahuje pravidelný faktor 1. stupně (tzv. *lineární faktor*) – hrany tohoto faktoru jsou na obr. 8.34a vyznačeny tučně. Petersenův graf obsahuje i pravidelný faktor 2. stupně (tj. *kvadratický faktor*); tento faktor je na obr. 8.34b.

Tento kvadratický faktor však není souvislý. Ponecháme čtenáři, aby si promyslel, že souvislý kvadratický faktor (tj. hamiltonovská kružnice) v Petersenově grafu neexistuje. Petersenův graf proto není hamiltonovský. Lehce však lze ukázat, že je polohamiltonovský (viz poznámka 6.15).

Na dokreslení toho, co jsme o znázorňování grafů uvedli v poznámce 7.3, necht' si čtenář promyslet, že všechny tři grafy na obr. 8.35 jsou izomorfní s Petersenovým grafem.

8.16 Poznámka. S problematikou barvení grafů úzce souvisí jeden z nejznámějších matematických problémů 20. století, tzv. *problém čtyř barev*. Formulace tohoto problému je jednoduchá: Mějme v rovině zeměpisnou mapu, na níž je několik států. Chceme, aby mapa byla vybarvena tak, jak je to obvyklé, tj. aby každý stát byl vybarven nějakou barvou tak, že žádné dva sousední státy nejsou obarveny stejně.

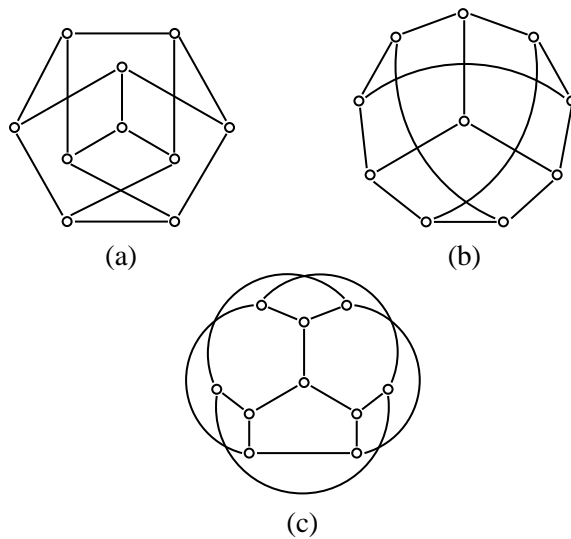
Naším úkolem je zjistit, jaký počet barev nezbytně potřebujeme, abychom mohli takto vybarvit každou zeměpisnou mapu.

Aby formulace problému byla regulérní, je nutno upřesnit dvě skutečnosti:

(a) předpokládáme, že území každého státu je „souvislé“ (což v praxi není vždy splněno – viz například USA (Aljaška));

(b) dva státy považujeme za sousední, když mají společnou hraniční „čáru“ (tj. nedotýkají se jen v izolovaných bodech). Lehce lze ukázat, že je nutno mít k dispozici alespoň čtyři barvy (obr. 8.36).

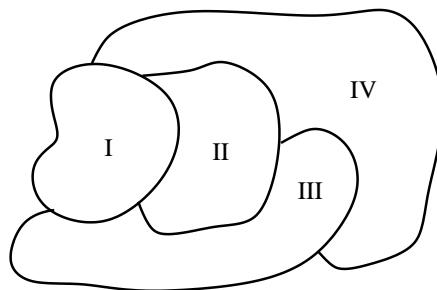
Ve všech konkrétních příkladech se vždy podařilo najít obarvení čtyřmi barvami.



Obr. 8.35: Různá nakreslení Petersenova grafu

Nalezení důkazu, že tomu tak je zákonitě, se však ukázalo být jedním z nejobtížnějších problémů moderní matematiky.

Přeformulujme si nyní uvedený problém do grafové terminologie. Mějme dānu ňějakou zeměpisnou mapu (splňující vĚše uvedené podmĚnky). NynĚ zkonstruujeme graf $\mathcal{G} = [U, H]$ následovně. Na ůzemĚ každěho stātu zvolme jeden bod; tyto body tvořĚ množinu U . Dva uzly spojíme hranou prāvě tehdy, kdyŹ přĚsluŹně stāty sousedĚ. Takto zĚskanĚ graf je jĚstĚ rovinnĚ, neboť hrany mŮžeme kreslit tak, aby neprochāzely ůzemĚm Źādněho dalŹšĚho stātu (hranici dvou stātŮ mŮžeme „překročit“ v hraniĉnĚ čāře). Tak napřĚklad stātŮm na



Obr. 8.36: Příklad mapy

obr. 8.36 odpovídá graf K_4 .

Obarvení zeměpisné mapy je nyní ekvivalentní s obarvením uzlů takto sestrojeného rovinného grafu. V grafové terminologii lze tedy problém čtyř barev přeformulovat takto:

Platí pro každý rovinný graf \mathcal{G} nerovnost $\chi(\mathcal{G}) \leq 4$?

To, že i relativně komplikované grafy uvedenou podmínku splňují, samozřejmě ještě nic neznamená.

Historie toho problému sahá až do let 1840 – 1850, kdy se tímto problémem zabývali A. F. Möbius, A. de Morgan a další. Mnohokrát byl uvedený problém zdánlivě „vyřešen“, vždy se však ukázalo, že v důkazu byla nějaká chyba. V roce 1890 dokázal P. J. Heawood (právě při rozboru jednoho z chybných důkazů), že *pro každý rovinný graf \mathcal{G} platí $\chi(\mathcal{G}) \leq 5$ (tzv. věta o pěti barvách)*. Definitivně problém čtyř barev vyřešili (pozitivně) až v roce 1976 K. Appel a W. Haken z univerzity v Illinois (USA), když dokázali, že vskutku pro každý rovinný graf \mathcal{G} platí $\chi(\mathcal{G}) \leq 4$.

Důkaz tohoto tvrzení převedli na prověření vlastností téměř dvou tisíc speciálních grafů. Samotné prověření pak provedli na počítači, který na to spotřeboval 1200 hodin strojového času.

I tyto údaje demonstrují obtížnost celého problému.

Podrobněji o historii tohoto problému viz například v knize [7].

POZNÁMKY A CVIČENÍ

1. *Permanent matice* $A = (a_{ij})$ typu m/n , $m \leq n$ je definován jako

$$\text{per}(A) = \sum a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{mi_m},$$

kde se sčítá přes všechny variace m prvků z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.
Vypočtěte permanent matic:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9 Zobecnění pojmu graf

Jak jsme uvedli již v paragrafu 1, není grafová terminologie v literatuře zcela jednotná. Ustálený význam nemá ani pojem graf. Nyní uvedeme definici tzv. „obecného grafu“, která zahrnuje většinu běžně studovaných grafů jako speciální případy.

9.1 Definice. *Obecným grafem nazýváme trojici $[U, H, \varphi]$, kde U, H jsou disjunkttní množiny, $U \neq \emptyset$ a $\varphi: H \rightarrow U^2 \cup U \cup \mathcal{P}_2(U)$. Prvky množiny U nazýváme *uzly*, prvky množiny H *hrany* a φ je tzv. *incidenční zobrazení*. Je-li $\varphi(h) \in U^2$, nazývá se h *orientovaná hrana*, je-li $\varphi(h) \in U \cup \mathcal{P}_2(U)$, je h *neorientovaná hrana*. Orientovaná hrana h se nazývá *orientovaná smyčka*, je-li $\varphi(h) = [x, x]$ pro nějaký uzel $x \in U$. Neorientovaná hrana se nazývá *smyčka*, je-li $\varphi(h) \in U$. Orientované hrany h, k se nazývají *souhlasně rovnoběžné*, je-li $\varphi(h) = \varphi(k)$ a *nesouhlasně rovnoběžné*, je-li $\varphi(h) = [x, y] \neq [y, x] = \varphi(k)$. Neorientované hrany h, k se nazývají *rovnoběžné*, je-li $\varphi(h) = \varphi(k)$. *Násobností hrany $h \in H$ nazýváme číslo $|\{k \in H; \varphi(k) = \varphi(h)\}|$.**

V obecném grafu tak mohou existovat současně hrany orientované i neorientované, mezi dvěma uzly nemusí existovat žádná hrana, ale může jich existovat i více než jedna atd. Možných „typů“ grafů tak existuje celá řada. Nejdůležitější rozdělení grafů obdržíme podle toho, zda v nich existují vícenásobné hrany či nikoliv a podle toho, zda jsou všechny hrany orientované respektive všechny neorientované.

9.2 Definice. Buď $\mathcal{G} = [U, H, \varphi]$ obecný graf. Existuje-li alespoň jedna hrana $h \in H$ s násobností větší než jedna, nazývá se \mathcal{G} *multigraf* (nebo též *pseudograf*). Je-li násobnost všech hran rovna jedné, nazývá se \mathcal{G} *prostý graf*. Obsahuje-li \mathcal{G} pouze neorientované hrany, nazývá se *neorientovaný graf*. Jsou-li všechny hrany v \mathcal{G} orientované, je \mathcal{G} tzv. *orientovaný graf*. Řekneme, že \mathcal{G} je *smíšený graf*, není-li ani orientovaný ani neorientovaný. (Ve smíšeném grafu tedy existuje alespoň jedna orientovaná a alespoň jedna neorientovaná hrana.)

9.3 Poznámka. Formální popis prostého grafu můžeme snadno zjednodušit. Incidenční zobrazení je podstatné u multigrafů. V prostém grafu můžeme přímo předpokládat, že $H \subseteq U^2 \cup U \cup \mathcal{P}_2(U)$ a φ je pak identické zobrazení (tj. $\varphi(h) = h$ pro každou hranu $h \in H$). (Tzn., že prostý graf můžeme definovat jako dvojici $[U, H]$, kde $U \neq \emptyset$, $H \subseteq U^2 \cup U \cup \mathcal{P}_2(U)$, $U \cap H = \emptyset$.)

Orientovaný i neorientovaný graf přitom může a nemusí být prostý.

Důležitou charakteristikou grafu je v mnoha situacích skutečnost, zda daný graf obsahuje smyčky či nikoliv.

Prostý neorientovaný graf bez smyček se nazývá *obyčejný graf*. Prostý orientovaný graf bez smyček nazýváme *obyčejný orientovaný graf*.

9.4 Poznámka. V paragrafech 2 – 8 jsme tedy „grafem“ rozuměli obyčejný graf.

Kromě obyčejných grafů, které jsme dosud studovali, tvoří druhou nejčastěji studovanou třídu grafů prosté orientované grafy, respektive obyčejné orientované grafy.

Místo prostý orientovaný graf, respektive obyčejný orientovaný graf, se často stručně říká jen „orientovaný graf“.

Uvažme, že když $[U, H]$ je prostý orientovaný graf, je $H \subseteq U^2$, tj. H je binární relace na U . Tento graf je pak obyčejným orientovaným grafem právě tehdy, když je relace H areflexivní.

Prosté orientované grafy tedy nejsou nic jiného než množiny s binární relací. Všechno, co známe o binárních relacích, proto můžeme na tyto grafy přenést. Mohlo by se proto zdát, že studium orientovaných grafů jako samostatných objektů je zbytečné. Z tradičních důvodů a vzhledem k specifičnosti metod teorie grafů se však orientované grafy intenzivně studují.

9.5 Poznámka. Prostý orientovaný graf je podle výše uvedeného dvojice $[U, H]$, kde $U \neq \emptyset$, $H \subseteq U^2$. V teorii grafů jsou však tyto grafy obvykle zadávány jiným způsobem. Ke každému uzlu $x \in U$ je zadána množina $\Gamma(x)$ těch uzlů, do nichž z x vede orientovaná hrana, kterou nazýváme *šipkou*.

9.6 Definice. Buď $U \neq \emptyset$ libovolná množina, $\Gamma: U \rightarrow \mathcal{P}(U)$ buď libovolné zobrazení. Pak se dvojice $[U, \Gamma]$ nazývá *orientovaný graf*. U je *množina uzlů*. Z uzlu x vede do uzlu y orientovaná hrana \overrightarrow{xy} právě tehdy, když $y \in \Gamma(x)$.

9.7 Poznámka. Z výše uvedeného je zřejmé, co to znamená, že orientovaný graf $[U, \Gamma]$ je reflexivní, symetrický, antisymetrický, tranzitivní a podobně.

Řadu pojmů lze z obyčejných grafů přenést na neorientované grafy prakticky beze změny – například pojem „podgraf“, „izomorfismus grafů“ atd. U některých pojmů dochází k jistým modifikacím. Tak například roli stupně uzlu x hrají dva tzv. *polostupně* $|\Gamma(x)|$ a $|\Gamma^{-1}(x)|$ (tj. počty hran z uzlu x vycházejících a v uzlu x končících).

Roli kružnice v orientovaných grafech hraje tzv. *cyklus*. *Acyklický graf* je orientovaný graf neobsahující jako podgraf žádný cyklus.

Důležitou třídou orientovaných grafů jsou tzv. *turnaje*. Areflexivní orientovaný graf se nazývá turnaj, jestliže pro každé dva různé uzly x, y platí, že jsou spojeny hranou \overrightarrow{xy} , respektive \overrightarrow{yx} .

Přes veškeré odlišnosti mezi jednotlivými typy grafů však lze říci, že pro toho, kdo zvládne teorii pro jeden z typů, je snadné pochopení pojmů i pro zbývající typy.

V aplikacích se pochopitelně užívá různých typů grafů, podle toho, jaký typ je pro popis zadané situace nejvýhodnější.

Zobecnění pojmu graf je však možno provést i jiným způsobem, než jak jsme to provedli v definici 9.1. Někdy je výhodné a potřebné studovat „grafy“, jejichž hrany spojují více než dva uzly. Takovým grafům se říká obvykle *hypergrafy*. (V posledních letech se v české literatuře ujímá pro hypergrafy termín *společnost*, místo o hranách hypergrafu se pak hovoří o *týmech* společnosti.)

9.8 Definice. *Hypergraf* je trojice $[U, H, \varphi]$, kde $U \neq \emptyset$ je množina uzlů, H je množina hran a $\varphi: H \rightarrow (\mathcal{P}(U) - \{\emptyset\})$ je *incidenční zobrazení*.

9.9 Poznámka. Hypergraf je tedy – jednoduše řečeno – systém neprázdných podmnožin množiny uzlů. Některé množiny se přitom v tomto systému mohou opakovat.

Existuje-li číslo k takové, že pro každou hranu $h \in H$ platí $|\varphi(h)| = k$, říkáme, že hypergraf je *uniformní* (respektive *k-uniformní*).

Je zřejmé, že 2-uniformní hypergraf je totéž jako neorientovaný graf bez smyček.

Je-li incidenční zobrazení prosté (tj. „násobnost“ každé hrany je rovna jedné), nazývá se hypergraf *prostý*. Podobně jako u prostého grafu můžeme předpokládat, že prostý hypergraf je dvojice $[U, H]$, kde $H \subseteq (\mathcal{P}(U) - \{\emptyset\})$. Přenesení řady pojmů z grafů na hypergrafy je jednoduché.

DODATEK 1: BIOGRAFIE

V tomto dodatku uvádíme základní biografické údaje osobností, které jsou v textu zmíněny. Podrobnější životopisy včetně obrazových materiálů lze nalézt např. na CD-ROM [1].

d'ALEMBERT Jean Baptiste Le Rond (1717–1783)

Francouzský matematik a fyzik, osvícenský filozof, jeden z encyklopedistů.

BELL Eric Temple (1883–1960)

Americký matematik skotského původu.

BERNOULLI Jacob I. (1654–1705)

Švýcarský matematik a fyzik, první z plejády slavných Bernoulliů.

BETTI Enrico (1823–1892)

Italský matematik.

BORŮVKA Otakar (1899–1995)

Významný český matematik, profesor univerzity v Brně.

CATALAN Eugène Charles (1814–1894)

Belgický matematik.

CAYLEY Arthur (1821–1895)

Anglický matematik.

DESCARTES René (latinsky Renatus CARTESIUS) (1596–1650)

Francouzský filozof, matematik, fyzik a přírodovědec, jeden ze zakladatelů novověké filozofie a vědy.

DIRICHLET Peter Gustav Lejeune (1805–1859)

Německý matematik.

DÜRER Albrecht (1471–1528)

Německý malíř a grafik.

ERDÖS Paul (1913–1996)

Maďarský matematik.

EUKLEIDÉS z Alexandrie (asi 340–270 př. Kr.)

Starořecký matematik, autor nejvýznamnější matematické knihy dosavadní historie.

EULER Leonhard (1707–1783)

Švýcarský matematik, fyzik a fyziolog, jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob.

FERMAT Pierre (1601–1665)

Francouzský matematik a právník.

FERRERS Norman Macleod (1829–1903)

Anglický matematik.

FIBONACCI (vl. jménem **Leonardo Pisánský**) (asi 1170–po 1240)

První velký matematik evropského středověku.

FRANKLIN Benjamin (1706–1790)

Americký státník, přírodovědec a filozof. Vzděláním samouk se vlastní pílí vypracoval na jednoho z předních osvícenských myslitelů.

FULKERSON Delbert Ray (1924–1976)

Americký matematik.

GALILEI Galileo (1564–1642)

Italský fyzik, astronom, matematik a filozof, zakladatel experimentálních metod zkoumání přírody, kritik scholastiky, představitel renesančního mechanického pojetí přírody.

HALL Phillip (1904–1982)

Anglický matematik.

HAMILTON William Rowan, sir (1805–1865)

Irský matematik a astronom.

HARDY Godfrey Harold (1877–1947)

Anglický matematik, největší světový odborník v teorii čísel první poloviny 20. století.

HASSE Helmut (1898–1979)

Německý matematik.

HEAWOOD Percy John (1861–1955)

Anglický matematik.

HUYGENS Christian (1629–1695)

Nizozemský matematik a fyzik.

JANG Hui (asi 1238–asi 1298)

Čínský matematik.

KEMPE Alfred Bray (1849–1922)

Anglický matematik.

KIRCHHOFF Gustave-Robert (1824–1887)

Německý fyzik a mechanik.

KIRKMAN Thomas Penyngton (1806–1895)

Anglický kněz. Ve volných chvílích se zabýval matematikou.

KÖNIG Dénes (1884–1944)

Maďarský matematik.

KURATOWSKI Kazimierz (1896–1980)

Polský matematik.

LAPLACE Pierre Simon (1749–1827)

Francouzský matematik, fyzik a astronom.

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm von (1646–1716)

Německý matematik, filozof, právník, historik, jazykovědec, diplomat, vynálezce a polyhistor, zakladatel moderní matematické analýzy.

LUCAS Francois Edouard Anatole (1842–1891)

Francouzský matematik.

MacMAHON Percy Alexander (1854–1929)

Anglický matematik.

MENGER Karl (1902–1985)

Rakousko-americký matematik.

MÖBIUS August Ferdinand (1790–1869)

Německý matematik a astronom.

de MORGAN Augustus (1806–1909)

Skotský matematik a logik.

NETTO Eugen Otto Erwin (1848–1919)

Německý matematik.

ORE Oystein (1899–1968)

Americký matematik norského původu.

OZANAM Jacques (1640–1717)

Francouzský matematik, chemik a teolog.

PARKER Ernest Tilden (1926–1991)

Americký matematik.

PASCAL Blaise (1623–1662)

Francouzský matematik, fyzik a filozof.

PETERSEN Julius Peter Christian (1839–1910)

Dánský matematik.

PLATÓN (427–347 př. Kr.)

Starořecký filozof, jeden z největších antických myslitelů.

PÓLYA Gyergy (1887–1985)

Maďarský matematik.

RADEMACHER Hans (1892–1969)

Německý matematik.

RAMANUJAN Srinivasa Aaiangar (1887–1920)

Indický matematik.

ROTA Gian-Carlo (1932–1999)

Americký matematik italského původu.

SCHLÄFLI Ludwig (1814–1895)

Švýcarský matematik.

STEINER Jacob (1796–1863)

Německý matematik.

STIFEL Michael (1487–1567)

Německý matematik.

STIRLING James (1692–1770)

Skotský matematik.

TAIT Peter Guthrie (1831–1901)

Skotský matematik a filozof.

TARRY Gaston (1843–1913)

Francouzský matematik–amatér.

TARSKI Alfred (1901–1977)

Americký matematik a logik polského původu.

YOUNG John Wesley (1879–1932)

Americký matematik.

DODATEK 2: TABULKY

$n!$										n								
										1	1							
										2	2							
										6	3							
										24	4							
										120	5							
										720	6							
									5	040	7							
									40	320	8							
									362	880	9							
									3	628	800	10						
									39	916	800	11						
									479	001	600	12						
									6	227	020	800	13					
									87	178	291	200	14					
									1	307	674	368	000	15				
														⋮				
									2	432	902	008	176	640	000	20		
																⋮		
									15	511	210	043	330	985	984	000	000	25

Tab. 1.1: Tabulka hodnot $n!$

n	$t(n)$	n	$t(n)$
1	1	14	3 159
2	1	15	7 741
3	1	16	19 320
4	2	17	48 629
5	3	18	123 867
6	6	19	317 955
7	12	20	823 065
8	23	21	2 144 505
9	47	22	5 623 756
10	106	23	14 828 074
11	235	24	39 299 897
12	551	25	104 636 890
13	1 301	26	279 793 450

Tab. 1.2: Počet t_n neizomorfních stromů na n uzlech

REJSTŘÍK

- k*-pravidelný graf, 15
- k*-uniformní hypergraf, 67

- acyklický graf, 67
- artikulace, 33

- Bettiho číslo, 34
- bipartitní graf, 58

- cesta, 18
- cyklomatické číslo, 34
- cyklus, 67

- disjunktní grafy, 12
- délka kružnice, 21
- délka sledu, 18

- Eulerova věta, 48
- eulerovský graf, 38

- faktor grafu, 12

- graf, 11
- graf „tři domy a tři studně“, 48
- grafová posloupnost, 15
- grafy druhé třídy, 60
- grafy první třídy, 60

- had, 24
- Hallova věta, 58
- hamiltonovská cesta, 45
- hamiltonovská kružnice, 41
- hamiltonovský graf, 41
- homeomorfní grafy, 52
- homomorfismus grafů, 40

- hrana, 9, 65
- hrana grafu, 11
- hranové chromatické číslo, 60
- hranově *k*-chromatický graf, 60
- hranově *k*-souvislý graf, 37
- hranově ohodnocený graf, 29
- hranový stupeň souvislosti, 36
- hranový řez, 36
- hvězda, 24
- hvězdovitá množina, 52
- hvězdovitý mnohostěn, 53
- hypergraf, 9, 67

- incidenční zobrazení, 65, 67
- izolovaný uzel, 13
- izomorfismus grafů, 27
- izomorfní grafy, 27

- komplementární grafy, 12
- komponenta grafu, 20
- koncové uzly hrany, 11
- konečný graf, 11
- kostra grafu, 24
- kružnice v grafu, 21
- Kuratowského grafy, 50
- kvadratický faktor, 41, 62
- kvaternion, 40

- Laplaceova matice sousednosti, 26
- les, 22
- lineární faktor, 62

- mapa, 48
- matice sousednosti grafu, 17

- matroid, 31
maďarský algoritmus, 59
minimální kostra, 29
množina hran, 67
množina uzlů, 66, 67
most, 32
multigraf, 65
- nakreslení grafu, 46
neizomorfní stromy, 28
neorientovaná hrana, 65
neorientovaný graf, 65
nesouhlasně rovnoběžné hrany, 65
násobnost hrany, 65
- obarvení hran, 60
obarvení uzlů, 57
obecný graf, 65
obyčejný graf, 10, 66
obyčejný orientovaný graf, 66
ohodnocení hrany (uzlu), 29
ohodnocený graf, 10
orientovaná hrana, 65
orientovaná smyčka, 65
orientovaný graf, 65, 66
otevřený tah, 18
- permanent matice, 64
Petersenův graf, 61
planární graf, 47
Platónova tělesa, 52
podgraf grafu, 12
polohamiltonovský graf, 45
polostupeň uzlu, 67
pravidelný faktor, 41
pravidelný graf, 15
pravidelný mnohostěn, 53
problém o svatbách, 58
problém obchodního cestujícího, 10
problém čtyř barev, 9, 62
prostý graf, 65
prostý hypergraf, 67
- pseudograf, 65
párování, 58
půlení hrany, 50
- rovinný graf, 10, 47
rovnoběžné hrany, 65
- Schläfliův symbol, 53
sled, 18
smyčka, 9, 65
smíšený graf, 65
souhlasně rovnoběžné hrany, 65
souvislý graf, 19
společnost, 67
stereografická projekce, 54
strom, 22
stupeň uzlu, 13
- tah v grafu, 18
trojúhelník, 21
turnaj, 67
tým, 67
- uniformní hypergraf, 67
uzavřený tah, 18
uzel, 65
uzel grafu, 9, 11
uzel konečného stupně, 13
uzel nekonečného stupně, 13
uzlové chromatické číslo, 57
uzlově k -chromatický graf, 57
uzlově k -souvislý graf, 37
uzlově ohodnocený graf, 29
uzlový stupeň souvislosti, 35
uzlový řez, 35
- vlastní podgraf grafu, 12
vnitřní uzel, 18
vrchol grafu, 9, 11
věta o pěti barvách, 64
- znaménková matice, 17

šipka, 9, 66

člen grafu, 33

úloha o sedmi mostech města Krá-
lovce, 7

úplné párování, 59

úplný bipartitní graf, 58

úplný graf, 12

LITERATURA

- [1] E. FUCHS: *Diskrétní matematika a teorie množin pro učitele*, CD-ROM, Brno 2000
- [2] E. FUCHS: *Diskrétní matematika pro učitele*, Brno 2001
- [3] J. E. GRAVER, M. E. WATKINS: *Combinatorics with Emphasis on the Theory of Graphs*, Springer - Verlag, New York – Heidelberg – Berlin 1977
- [4] J. NEČAS: *Grafy a jejich použití*, SNTL, Praha 1978
- [5] J. NEŠETŘIL: *Teorie grafů*, SNTL, Praha 1979
- [6] J. SEDLÁČEK: *Úvod do teorie grafů*, Academia, Praha 1981
- [7] P. ŠIŠMA: *Teorie grafů 1736–1963*, Prometheus, Praha 1997

