

### Návod k řešení úlohy č. 6 d)

**Zadání:** Určete komutátorovou podgrupu  $G' = [G, G]$ , kde  $G = \text{GL}_2(\mathbb{Q})$  je obecná lineární grupa regulárních čtvercových matic řádu 2 nad  $\mathbb{Q}$ .

**Návod:** Podgrupa  $[G, G]$  je dle definice generována<sup>1</sup> komutátory  $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$  pro všechna  $A, B \in G$ . Zřejmě je determinant každého takového komutátoru roven 1, z čehož ihned dostáváme  $[\text{GL}_2(\mathbb{Q}), \text{GL}_2(\mathbb{Q})] \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Q})$  (speciální lineární grupa čtvercových matic řádu 2 nad  $\mathbb{Q}$  s jednotkovým determinanem).

Ukážeme, že platí i opačná inkluze, tj. že každá taková matice s jednotkovým determinanem se dá vyjádřit jako součin komutátorů matic z  $\text{GL}_2(\mathbb{Q})$ . K tomu je třeba si uvědomit, jakými prvky jsou generovány grupy  $\text{GL}_2(\mathbb{Q})$  a  $\text{SL}_2(\mathbb{Q})$ . Díky tomu, že každou regulární matici  $A$  můžeme elementárními řádkovými a sloupcovými operacemi „přičtení  $\alpha$ -násobku řádku k jinému řádku“, resp. „přičtení  $\beta$ -násobku sloupce k jinému sloupci“ (reprezentovanými násobením maticemi  $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ ) převést<sup>2</sup> na diagonální matici  $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, |A|)$ , platí:

$$\text{GL}_2(\mathbb{Q}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \right\rangle$$

a

$$\text{SL}_2(\mathbb{Q}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Snadno se ověří, že

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\beta}{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Každý z generátorů  $\text{SL}_2(\mathbb{Q})$  tak dokážeme vyjádřit jako komutátor prvků z  $\text{GL}_2(\mathbb{Q})$  a tedy  $\text{SL}_2(\mathbb{Q}) \subseteq [\text{GL}_2(\mathbb{Q}), \text{GL}_2(\mathbb{Q})]$ , což jsme chtěli dokázat.

**Pozn:** Obecně platí pro obecnou (resp. speciální) lineární grupu nad libovolným tělesem  $K$  a pro libovolné  $n \geq 2$ , že

$$[\text{GL}_n(K), \text{GL}_n(K)] = \text{SL}_n(K)$$

a

$$[\text{SL}_n(K), \text{SL}_n(K)] = \text{SL}_n(K)$$

(s výjimkou případů  $n = 2, 3$  pro  $|K| = 2$ ). Dokazuje se analogicky s využitím toho, že  $\text{SL}_n(K)$  je generována maticemi tvaru

$$t_{ij}(\alpha) = E + \alpha \cdot E_{ij},$$

kde  $\alpha \in K$ ,  $E$  je jednotková matice řádu  $n$  a  $E_{ij}$  nulová matice mající jedinou 1 pouze v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci. Stačí si totiž uvědomit, že  $[t_{ij}(\alpha), t_{kj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta)$  a obdobně  $[t_{ij}(\alpha), \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)] = t_{ij}\left(\alpha\left(\frac{\beta_j}{\beta_i} - 1\right)\right)$ .

<sup>1</sup>Ve všech případech, které jsme si dosud ukazovali, byl dokonce každý prvek  $[G, G]$  sám komutátorem, to ale obecně nemusí platit – nejmenší grupa, jejíž komutátorová podgrupa není tvořena pouze komutátory, má ale řád 96.

<sup>2</sup>Postup nastíníme i pro matice vyššího řádu: nejprve pomocí těchto operací zajistíme na pozici 1,1 číslo 1, pomocí něj „vynulujeme“ všechny ostatní prvky v 1. řádku a v 1. sloupci, poté totéž pro druhý řádek a sloupec atd. Protože determinant původní matice byl 1 a uvedené operace ho nemění, musí být zbylý prvek na pozici  $n, n$  roven determinantu původní matice, tedy výsledná matice je tvaru  $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, |A|)$  a původní matice je součinem této výsledné matice a použitých matic elementárních operací.