Návod k řešení úlohy č. 6 d)

Zadání: Určete komutátorovou podgrupu $G' = [G, G]$, kde $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ je obecná lineární grupa regulárních čtvercových matic řádu 2 nad $\mathbb{Q}$.

Návod: Podgrupa $[G, G]$ je dle definice generována[1] komutátory $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ pro všechna $A, B \in G$. Zřejmě je determinant každého takového komutátoru roven 1, z čehož ihned dostáváme $[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})] \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ (speciální lineární grupa čtvercových matic řádu 2 nad $\mathbb{Q}$ s jednotkovým determinantem).

Ukážeme, že platí i opačná inkluze, tj. že každá taková matice s jednotkovým determinantem se dá vyjádřit jako součin komutátorů matic z $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. K tomu je třeba si uvědomit, jakými prvky jsou generovány grupy $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$. Díky tomu, že každou regulární matici A můžeme elementárními řádkovými a sloupcovými operacemi „přičtení α-násobku řádku k jinému řádku“, resp. „přičtení β-násobku sloupce k jinému sloupci“ (reprezentovanými násobením maticemi $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{smallmatrix}\right)$ převést[2] na diagonální matici $\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, |A|)$, platí:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \right\rangle$$

a

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Snadno se ověří, že

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\beta}{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Každý z generátorů $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ tak dokážeme vyjádřit jako komutátor prvků z $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ a tedy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \subseteq [\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})]$, což jsme chtěli dokázat.

Pozn: Obecně platí pro obecnou (resp. speciální) lineární grupu nad libovolným tělesem K a pro libovolné $n \geq 2$, že

$$[\mathrm{GL}_n(K), \mathrm{GL}_n(K)] = \mathrm{SL}_n(K)$$

a

$$[\mathrm{SL}_n(K), \mathrm{SL}_n(K)] = \mathrm{SL}_n(K)$$

(s výjimkou případů $n = 2, 3$ pro $|K| = 2$). Dokazuje se analogicky s využitím toho, že $SL_n(K)$ je generována maticemi tvaru

$$t_{ij}(\alpha) = E + \alpha \cdot E_{ij},$$

kde $\alpha \in K$, E je jednotková matice řádu n a E_{ij} nulová matice mající jedinou 1 pouze v i-tém řádku a j-tém sloupci. Stačí si totiž uvědomit, že $[t_{ij}(\alpha), t_{kj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta)$ a obdobně $[t_{ij}(\alpha), \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)] = t_{ij}\Big(\alpha\big(\frac{\beta_j}{\beta_i} - 1\big)\Big)$.

[1] Ve všech případech, které jsme si dosud ukazovali, byl dokonce každý prvek $[G, G]$ sám komutátorem, to ale obecně nemusí platit – nejmenší grupa, jejíž komutátorová podgrupa není tvořena pouze komutátory, má ale řád 96.

[2] Postup nastíníme i pro matice vyššího řádu: nejprve pomocí těchto operací zajistíme na pozici 1,1 číslo 1, pomocí něj „vynulujeme“ všechny ostatní prvky v 1. řádku a v 1. sloupci, poté totéž pro druhý řádek a sloupec atd. Protože determinant původní matice byl 1 a uvedené operace ho nemění, musí být zbylý prvek na pozici n, n roven determinantu původní matice, tedy výsledná matice je tvaru $\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, |A|)$ a původní matice je součinem této výsledné matice a použitých matic elementárních operací.