**M7500 — zkoušková písemka**
**5. 1. 2005 (90 minut)**

1. (a) Buď $N \trianglelefteq G$ (tj. $N$ normální podgrupa grupy $G$) konečného indexu $n$ (tj. $[G : N] = n < \infty$). Dokažte, že $x^n \in N$ pro každé $x \in G$. *(1b.)*
   (b) S využitím předchozího výsledku najděte všechny podgrupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ konečného indexu. *(1b.)*
2. Definujte pojmy *prvoideál* a *maximální ideál* okruhu $R$ a uveďte, jaký je mezi nimi vztah a jaký je vztah těchto pojmů k pojmu *faktorokruh*. *(2b.)*
3. Definujte sčítání reálných čísel a podrobně dokažte, že výsledkem je opět reálné číslo. *(2b.)*
4. Na množině přirozených čísel definujte operaci sčítání a dokažte přímo z definice, že je komutativní. *(2b.)*
5. Definujte pojem *vytvořující rozklad na grupoidu* a uveďte příklad rozkladu na $(\mathbb{R}, +)$, který není vytvořující. *(1b.)*
6. Uveďte příklad:
   - komutativního okruhu, který není možné vnořit do tělesa
   - okruhu $R$ a ideálu $I \subseteq R$, který není hlavní
   - lineárně uspořádané množiny, kterou nelze vnořit do spojitě uspořádané množiny
   - oboru integrity $R$, ve kterém neplatí omezené zákony o krácení *(2b.)*


**M7500 — zkoušková písemka**
**5. 1. 2005 (90 minut)**

1. (a) Buď $N \trianglelefteq G$ (tj. $N$ normální podgrupa grupy $G$) konečného indexu $n$ (tj. $[G : N] = n < \infty$). Dokažte, že $x^n \in N$ pro každé $x \in G$. *(1b.)*
   (b) S využitím předchozího výsledku najděte všechny podgrupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ konečného indexu. *(1b.)*
2. Definujte pojmy *prvoideál* a *maximální ideál* okruhu $R$ a uveďte, jaký je mezi nimi vztah a jaký je vztah těchto pojmů k pojmu *faktorokruh*. *(2b.)*
3. Definujte sčítání reálných čísel a podrobně dokažte, že výsledkem je opět reálné číslo. *(2b.)*
4. Na množině přirozených čísel definujte operaci sčítání a dokažte přímo z definice, že je komutativní. *(2b.)*
5. Definujte pojem *vytvořující rozklad na grupoidu* a uveďte příklad rozkladu na $(\mathbb{R}, +)$, který není vytvořující. *(1b.)*
6. Uveďte příklad:
   - komutativního okruhu, který není možné vnořit do tělesa
   - okruhu $R$ a ideálu $I \subseteq R$, který není hlavní
   - lineárně uspořádané množiny, kterou nelze vnořit do spojitě uspořádané množiny
   - oboru integrity $R$, ve kterém neplatí omezené zákony o krácení *(2b.)*

**M7500 — zkoušková písemka**
**5. 1. 2005 (90 minut)**

1. (a) Buď $N \trianglelefteq G$ (tj. $N$ normální podgrupa grupy $G$) konečného indexu $n$ (tj. $[G : N] = n < \infty$). Dokažte, že $x^n \in N$ pro každé $x \in G$. *(1b.)*
   (b) S využitím předchozího výsledku najděte všechny podgrupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ konečného indexu. *(1b.)*
2. Definujte pojmy *prvoideál* a *maximální ideál* okruhu $R$ a uveďte, jaký je mezi nimi vztah a jaký je vztah těchto pojmů k pojmu *faktorokruh*. *(2b.)*
3. Definujte sčítání reálných čísel a podrobně dokažte, že výsledkem je opět reálné číslo. *(2b.)*
4. Na množině přirozených čísel definujte operaci sčítání a dokažte přímo z definice, že je komutativní. *(2b.)*
5. Definujte pojem *vytvořující rozklad na grupoidu* a uveďte příklad rozkladu na $(\mathbb{R}, +)$, který není vytvořující. *(1b.)*
6. Uveďte příklad:
   - komutativního okruhu, který není možné vnořit do tělesa
   - okruhu $R$ a ideálu $I \subseteq R$, který není hlavní
   - lineárně uspořádané množiny, kterou nelze vnořit do spojitě uspořádané množiny
   - oboru integrity $R$, ve kterém neplatí omezené zákony o krácení *(2b.)*

**M7500 — zkoušková písemka**
**5. 1. 2005 (90 minut)**

1. (a) Buď $N \trianglelefteq G$ (tj. $N$ normální podgrupa grupy $G$) konečného indexu $n$ (tj. $[G : N] = n < \infty$). Dokažte, že $x^n \in N$ pro každé $x \in G$. *(1b.)*
   (b) S využitím předchozího výsledku najděte všechny podgrupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ konečného indexu. *(1b.)*
2. Definujte pojmy *prvoideál* a *maximální ideál* okruhu $R$ a uveďte, jaký je mezi nimi vztah a jaký je vztah těchto pojmů k pojmu *faktorokruh*. *(2b.)*
3. Definujte sčítání reálných čísel a podrobně dokažte, že výsledkem je opět reálné číslo. *(2b.)*
4. Na množině přirozených čísel definujte operaci sčítání a dokažte přímo z definice, že je komutativní. *(2b.)*
5. Definujte pojem *vytvořující rozklad na grupoidu* a uveďte příklad rozkladu na $(\mathbb{R}, +)$, který není vytvořující. *(1b.)*
6. Uveďte příklad:
   - komutativního okruhu, který není možné vnořit do tělesa
   - okruhu $R$ a ideálu $I \subseteq R$, který není hlavní
   - lineárně uspořádané množiny, kterou nelze vnořit do spojitě uspořádané množiny
   - oboru integrity $R$, ve kterém neplatí omezené zákony o krácení *(2b.)*