M7500 — zkoušková písemka
16. 3. 2003 (90 minut)

1. Buď dána grupa $(G, \circ)$ nekonstantních lineárních zobrazení reálných čísel

$$G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b,\ a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$$

s operací skládání zobrazení $\circ$. Uvažme v této grupě dvě podgrupy:

$$T = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}^*\},$$
$$S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x + b,\ b \in \mathbb{R}\}.$$

Která z nich je normální podgrupou grupy $(G, \circ)$? Popište u obou pravý i levý rozklad. *(3b.)*

2. Definujte násobení reálných čísel a podrobně dokažte, že výsledkem je opět reálné číslo. *(2b.)*

3. Buď $(R, +, \cdot)$ libovolný netriviální komutativní okruh s 1. Dokažte, že v R platí omezené zákony o krácení, právě když je $(R, +, \cdot)$ obor integrity. *(2b.)*

4. Zaveďte na množině $\mathbb{Q}$ běžné uspořádání „podle velikosti“ a dokažte pomocí této definice, že pro libovolná $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ platí: $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. *(2b.)*

5. Definujte množinu přirozených čísel a dokažte, že v grupoidu $(\mathcal{N}, +)$ (s obvykle definovanou operací $+$) platí zákon o odečítání. *(2b.)*

M7500 — zkoušková písemka
16. 3. 2003 (90 minut)

1. Buď dána grupa $(G, \circ)$ nekonstantních lineárních zobrazení reálných čísel

$$G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b,\ a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$$

s operací skládání zobrazení $\circ$. Uvažme v této grupě dvě podgrupy:

$$T = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}^*\},$$
$$S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x + b,\ b \in \mathbb{R}\}.$$

Která z nich je normální podgrupou grupy $(G, \circ)$? Popište u obou pravý i levý rozklad. *(3b.)*

2. Definujte násobení reálných čísel a podrobně dokažte, že výsledkem je opět reálné číslo. *(2b.)*

3. Buď $(R, +, \cdot)$ libovolný netriviální komutativní okruh s 1. Dokažte, že v R platí omezené zákony o krácení, právě když je $(R, +, \cdot)$ obor integrity. *(2b.)*

4. Zaveďte na množině $\mathbb{Q}$ běžné uspořádání „podle velikosti“ a dokažte pomocí této definice, že pro libovolná $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ platí: $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. *(2b.)*

5. Definujte množinu přirozených čísel a dokažte, že v grupoidu $(\mathcal{N}, +)$ (s obvykle definovanou operací $+$) platí zákon o odečítání. *(2b.)*