SEZNAM SYMBOLŮ

N	množina přirozených čísel
R^1	množina reálných čísel
R^k	reálný k-rozměrný euklidovský prostor
$\mathfrak{R}$	prostor všech permutací posloupnosti $\{1, \dots, n\}$
$\mathscr{X}$	výběrový prostor
$\\|\cdot\\|_p$	L_p-norma
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \dots$; $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dots$	vektory
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	matice
$\mathbf{I}$	jednotková matice
$\mathbf{0}$	nulová matice
$\mathbf{A}'$	transponovaná matice
$\mathbf{A}^{-1}$	inverzní matice
$\mathbf{A}^{-}$	pseudoinverzní matice
$\mathrm{h}(\mathbf{A})$	hodnost matice
$\|\mathbf{A}\|$, $\det \mathbf{A}$	determinant matice
$\mathrm{tr}(\mathbf{A})$	stopa matice
$\\|\mathbf{A}\\|$	euklidovská norma matice
$\mathrm{I}[A]$	indikátor množiny A
$A \cup B$	sjednocení množin
$A \cap B$	průnik množin
$A - B$	rozdíl množin
$\emptyset$	prázdná množina
Ω	prostor elementárních jevů
ω	elementární jev
$\mathscr{A}$	σ-algebra
$\mathscr{B}$	σ-algebra borelovských množin
$(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$	pravděpodobnostní prostor
$(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P}_\theta, \theta \in \Theta)$	pravděpodobnostní prostor s množinou pravděpodobnostních měr

$\mathsf{P}(A)$	pravděpodobnost jevu A
$X, Y, \ldots$	náhodné veličiny
$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \ldots$	náhodné vektory
$f, g, \ldots$	hustoty
$F, G, \ldots$	distribuční funkce
$F^{-1}, G^{-1}, \ldots$	kvantilové funkce (inverzní distribuční funkce)
E	střední hodnota
$\operatorname{cov}(X, Y)$	kovariance náhodných veličin X a Y
$\operatorname{var} X$	rozptyl náhodné veličiny X
$\operatorname{var} \boldsymbol{X}$	varianční matice náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$
$\int f(x)\,\mathrm{d}F(x)$	Lebesgueův-Stieltjesův integrál
$Bi(n, p)$	binomické rozdělení
$\mathscr{L}(X) \sim Bi(n, p)$	náhodná veličina X se řídí rozdělením $Bi(n, p)$
$M(n, p_1, \ldots, p_k)$	multinomické rozdělení
$Po(\lambda)$	Poissonovo rozdělení
$R\{1, \ldots, n\}$	rovnoměrné rozdělení (diskrétní)
$B(\alpha, \beta)$	beta rozdělení
$\mathrm{B}(a, b)$	beta funkce
$F_{m,n}$	Fisherovo-Snedecorovo rozdělení o m a n stupních volnosti
$\Gamma(\alpha, \beta)$	gamma rozdělení
$\Gamma(x)$	gamma funkce
χ^2_n	chí-kvadrát rozdělení o n stupních volnosti
$LN(\mu, \sigma^2)$	logaritmicko-normální rozdělení
$N(\mu, \sigma^2)$	normální rozdělení
$\Phi(x)$	distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení
$\mathfrak{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	mnohorozměrné normální rozdělení
$R(a, b)$	rovnoměrné rozdělení (spojité)
t_n	Studentovo rozdělení t_n o n stupních volnosti
u_α	α-kvantil standardizovaného normálního rozdělení $N(0, 1)$
$t_n(\alpha)$	α-kvantil Studentova rozdělení t_n
$\chi^2_n(\alpha)$	α-kvantil rozdělení χ^2_n
$F_{m,n}(\alpha)$	α-kvantil Fisherova-Snedecorova rozdělení $F_{m,n}$
γ_1	koeficient šikmosti
γ_2	koeficient špičatosti
x_0	modus
$\tilde{x}$	medián
μ_r	r-tý centrální moment
μ'_r	r-tý obecný moment
$m(t)$	momentová vytvořující funkce
$\ln x$	přirozený logaritmus se základem e
$[\cdot]$	funkce celá část

1 Úvod

1.1 Základní pojmy

Matematická statistika se zabývá soubory hromadných pozorování, při jejichž vzniku se uplatňuje náhoda. Statistickými metodami se ze získaných pozorování odděluje složka, mající hodnotu pro předpovědi, názory a rozhodnutí, od složky náhodné, která je v pozorováních přítomna jako rušivá. Za určitých okolností však statistik programově zapojuje náhodu do svých služeb.

Nástrojem matematické statistiky je především teorie pravděpodobnosti. Budeme předpokládat, že je čtenář se základy teorie pravděpodobnosti seznámen a připomeneme jen některé pojmy. Toho, kdo by si potřeboval své znalosti ověřit nebo doplnit, upozorňujeme na příručku [97] nebo na náročnější texty [123] či [142], na něž budeme také někdy odkazovat.

O reálném ději, u něhož známe množinu možných výsledků za daných podmínek, ale nemůžeme předem říci, který z výsledků při jeho ukončení nastane, mluvíme jako o *náhodném pokusu*. Výsledky pokusu – označené ω – budeme nazývat *elementárními jevy*, množinu všech možných výsledků náhodného pokusu označíme Ω a nazveme *prostorem elementárních jevů*. Podmnožinám prostoru Ω se říká *jevy*. Z matematického hlediska je výhodné pracovat s jevy, které tvoří σ-algebru. Tyto *jevy* nazveme *náhodné*. Náhodným jevům můžeme přiřadit pravděpodobnost P. Podle axiomatické definice je *pravděpodobnost* nezáporná, σ-aditivní množinová funkce, která prostoru Ω přiřazuje hodnotu $\mathsf{P}(\Omega) = 1$. Prostoru Ω se také říká *jev jistý*. Označíme-li symbolem $\mathscr{A}$ σ-algebru vytvořenou z podmnožin Ω, získáme trojici $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$, jíž se říká *pravděpodobnostní prostor* a která představuje matematický model náhodného pokusu.

Většina náhodných pokusů je taková, že je vhodné charakterizovat jejich výsledky reálnými čísly. Pro tento účel se zavádí pojem *náhodné veličiny* $X(\omega)$, která je definována jako měřitelná funkce z $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ do $(R^1, \mathscr{B})$, kde R^1 je reálná přímka a $\mathscr{B}$ je σ-algebra borelovských množin na přímce. Každé borelovské množině $B \in \mathscr{B}$ lze přiřadit pravděpodobnostní míru $\mathsf{P}(X^{-1}(B)) = \mathsf{P}(\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in \mathscr{B})$. Tato míra se nazývá *zákon rozdělení* náhodné veličiny X, krátce *rozdělení*.

K jednoznačnému určení rozdělení náhodné veličiny není třeba znát $\mathsf{P}(X^{-1}(B))$ pro všechny $B \in \mathscr{B}$, nýbrž stačí jejich znalost pro intervaly typu $(-\infty, x)$, $x \in R^1$.

vání $X_1, \dots, X_n$ náhodné veličiny X. Hypotéze $\theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ se říká nulová, k ní alternativní hypotézou (krátce alternativou) je $\theta \in \Theta - \Theta_0 = \Theta_1$. Rozhodnutí – *test hypotézy* – provedeme tak, že předem stanovíme množinu $W \subset R^n$, které se říká *kritický obor.* Jestliže $(X_1, \dots, X_n)' \in W$, hypotézu zamítneme, při $(X_1, \dots, X_n) \in R^n - W$ nezamítneme. Jestliže zamítneme hypotézu, ačkoliv je správná, dopustíme se tzv. *chyby prvního druhu.* Jestliže nezamítneme hypotézu, ačkoliv správná není, jde o tzv. *chybu druhého druhu.* Kritický obor volíme tak, aby pravděpodobnost chyby prvního druhu nepřekročila předem dané číslo α, $0 < \alpha < 1$ (obvykle mezi 0,01 až 0,05), tak zvanou *hladinu významnosti testu.*

Skutečná hladina testu může být nižší než nominální (tj. α), zpravidla pro diskrétní rozdělení. Aby se dosáhlo předem stanovené hladiny významnosti, je možné užít *znáhodněného testu.* Je dána funkce $h(x_1, \dots, x_n) = h(\boldsymbol{x})$, $0 < h(\boldsymbol{x}) < 1$, $\boldsymbol{x} \in R^n$, a předpis, podle něhož máme přijmout hypotézu s pravděpodobností $1 - h(\boldsymbol{x})$ a zamítnout s pravděpodobností $h(\boldsymbol{x})$, jestliže náhodný vektor $(X_1, \dots, X_n)'$ složený z pozorování náhodné veličiny X nabyl hodnoty $\boldsymbol{x}$. To znamená, že po získání n pozorování náhodné veličiny X je třeba ještě provést dodatečný pokus se dvěma možnými výsledky, které mají pravděpodobnost $h(\boldsymbol{x})$ a $1 - h(\boldsymbol{x})$. Vhodnou volbou h se dosáhne toho, že se využije celá hladina významnosti. V praxi se ale znáhodněného postupu užívá jen zřídka.

Jestliže je β pravděpodobnost chyby druhého druhu, říká se číslu $1 - \beta$ *síla testu.* U síly se snažíme, aby byla co největší. Přesněji řečeno, bylo by žádoucí, aby síla byla alespoň rovna předem dané hodnotě $1 - \beta$ při zachování předepsané hladiny. Jen málokdy toho však lze dosáhnout. Často se při testování neví, s jakou silou test pracuje. Někdy lze požadavku na sílu, která obecně závisí na parametru θ, vyhovět pro některé alternativní hodnoty θ vhodnou volbou počtu pozorování n.

Úlohy, které jsme zde popsali, se dají přirozeně modifikovat pro rozdělení náhodného vektoru a vektorový parametr.

Statistické hypotézy se mohou týkat i rozdělení jako takového, například nezávislosti složek náhodného vektoru, a nemusí být pouze parametrické. O takových hypotézách se zmíníme později ve 3. kapitole.

1.3 Přehled vybraných rozdělení a jejich základních charakteristik

Tento odstavec shrnuje definice a základní charakteristiky nejdůležitějších rozdělení, s nimiž se ve statistice setkáváme. S výjimkou mnohorozměrného normálního a multinomického rozdělení se jedná o rozdělení jednorozměrná.

Pro jednotlivá rozdělení uvádíme následující charakteristiky (existují-li): hustotu f, střední hodnotu $\mathsf{E}X$, rozptyl var X, modus x_0, medián $\tilde{x}$ (pouze pro spojitá rozdělení), koeficient šikmosti γ_1, koeficient špičatosti γ_2, r-tý centrální moment μ_r,

resp. r-tý obecný moment μ'_r a momentovou vytvořující funkci $m(t)$. U momentů vždy volíme ten typ, který umožňuje přehlednější zápis. U tvaru hustoty se ne vždy snažíme o maximálně možnou obecnost jejího vyjádření (zpravidla vynecháváme parametr posunutí). V případě, že je některá z charakteristik příliš složitá, odkazujeme na citovanou literaturu.

Pro zvýšení názornosti jsou vybraná rozdělení doplněna též grafy odpovídajících hustot pro typické hodnoty parametrů. O vlastnostech uvedených rozdělení, jejich původu, metodách odhadu parametrů, použití apod. se čtenář může dozvědět více např. z [77]–[79], [115] či [116].

1.3.1 Diskrétní rozdělení

(A) Binomické rozdělení – $Bi(n, p)$

$$f(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

$$x = 0, 1, \dots, n; \quad 0 < p < 1, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\mathsf{E}X = np,$$

$$\operatorname{var} X = np(1-p),$$

$$x_0\colon\ p(n+1) - 1 \leqq x_0 \leqq p(n+1),$$

$$\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}},$$

$$\gamma_2 = \frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)},$$

$$\mu_r = np(1-p) \sum_{i=0}^{r-2} \binom{r-1}{i} \mu_i - p \sum_{i=0}^{r-2} \binom{r-1}{i} \mu_{i+1}, \qquad r > 1,$$

$$m(t) = (1 - p + p\,\mathrm{e}^t)^n.$$

Poznámka: Rozdělení $Bi(1, p)$ se nazývá *alternativní (Bernoulliho).*

(B) Hypergeometrické rozdělení

$$f(x; M, N, n) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

$$\max(0, n - N + M) \leqq x \leqq \min(M, n);$$

$$0 < M < N,\ 0 < n < N,\ N \in N;$$

$$\mathrm{E}X = \frac{nM}{N},$$

$$\operatorname{var} X = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{nM}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right),$$

$$x_0 = \left[\frac{(n+1)(M+1)}{N+2}\right], \quad \text{kde } [.] \text{ značí funkci celá část,}$$

$$\gamma_1 = \frac{(N-2M)(N-2n)\sqrt{N-1}}{(N-2)\sqrt{nM(N-M)(N-n)}},$$

$$\gamma_2 = \text{viz } [77],$$

$$m(t) = \frac{(N-n)!}{N!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left[(1 + y\,\mathrm{e}^t)^M (1+y)^{N-M}\right]\Big|_{y=0}$$

(C) Logaritmické diskrétní rozdělení

$$f(x;\ \alpha, p) = \frac{\alpha p^x}{x}, \qquad x = 1, 2, \dots; \quad 0 < p < 1, \quad \alpha = -\frac{1}{\ln(1-p)};$$

$$\mathrm{E}X = \frac{\alpha p}{1-p},$$

$$\operatorname{var} X = \frac{\alpha p(1-\alpha p)}{(1-p)^2},$$

$$x_0 = 1,$$

$$\gamma_1 = \frac{1 + p - 3\alpha p + 2\alpha^2 p^2}{(1-\alpha p)\sqrt{\alpha p(1-\alpha p)}},$$

$$\gamma_2 = \frac{1 + 4p + p^2 - 4\alpha p(1+p) + 6\alpha^2 p^2 - 3\alpha^3 p^3}{\alpha p(1-\alpha p)^2} - 3,$$

$$\mu'_{r+1} = p\frac{\partial \mu'_r}{\partial p} + \frac{\alpha p}{1-p}\mu'_r, \qquad r > 1,$$

$$m(t) = \frac{\ln(1 - p\,\mathrm{e}^t)}{\ln(1-p)}, \qquad t < \ln\frac{1}{p}.$$

(D) Multinomické rozdělení $-$ $M(n, p_1, \dots, p_k)$

$$f(x_1, \dots, x_k;\ p_1, \dots, p_k) = n! \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{x_i}}{x_i!},$$

$$0 \leqq x_i, \qquad x_i \in N, \qquad i = 1, \dots, k, \qquad \sum_{i=1}^{k} x_i = n;$$

$$0 < p_i < 1, \qquad i = 1, \dots, k, \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1;$$

$$\mathrm{E}X_i = np_i,$$

$$\operatorname{var} X_i = np_i(1-p_i),$$

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = -np_ip_j,$$

$$x_{0j},\ j = 1, \dots, k\colon\ np_j - 1 < x_{0j} \leqq (n + k - 1)\,p_j,$$

$$\mu'_{r_1, \dots, r_k} = \mathrm{E}[X_1^{r_1} \dots X_k^{r_k}] = \prod_{i=1}^{k} (np_i)^{r_i},$$

$$m(\boldsymbol{t}) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i\,\mathrm{e}^{t_i}\right)^n, \qquad \boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_k)' \in R^k.$$

(E) Negativně binomické rozdělení

$$f(x;\ s, p) = \binom{s + x - 1}{x} p^s (1-p)^x, \quad x = 0, 1, \dots; \quad 0 < p < 1; \quad s \in N;$$

$$\mathrm{E}X = \frac{s(1-p)}{p},$$

$$\operatorname{var} X = \frac{s(1-p)}{p^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{2-p}{\sqrt{s(1-p)}},$$

$$\gamma_2 = \frac{6(1-p) + p^2}{s(1-p)},$$

$$\mu_{r+1} = q\left(\frac{\partial \mu_r}{\partial q} + \frac{rs}{p^2}\mu_{r-1}\right), \qquad \text{kde} \quad q = 1 - p, \quad r > 1,$$

$$m(t) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)\,\mathrm{e}^t}\right)^s.$$

Poznámka: Při volbě $s = 1$ dostaneme *geometrické rozdělení.*

(F) Poissonovo rozdělení – $Po(\lambda)$

$$f(x;\ \lambda) = \frac{\lambda^x \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!}, \qquad x = 0, 1, \ldots;\quad \lambda > 0;$$

$$\mathsf{E}X = \lambda,$$

$$\operatorname{var} X = \lambda,$$

$$x_0\colon\ \lambda - 1 \leqq x_0 \leqq \lambda,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\lambda},$$

$$\mu_r = \lambda \sum_{i=0}^{r-2} \binom{r-1}{i} \mu_i, \qquad r > 1,$$

$$m(t) = \exp\{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)\}.$$

(G) Rovnoměrné rozdělení (diskrétní) – $R\{1, \ldots, n\}$

$$f(x;\ n) = \frac{1}{n}, \qquad x = 1, \ldots, n;\quad n \in N;$$

$$\mathsf{E}X = \frac{n+1}{2},$$

$$\operatorname{var} X = \frac{n^2 - 1}{12},$$

$$\gamma_1 = 0,$$

$$\gamma_2 = -\frac{6}{5}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right),$$

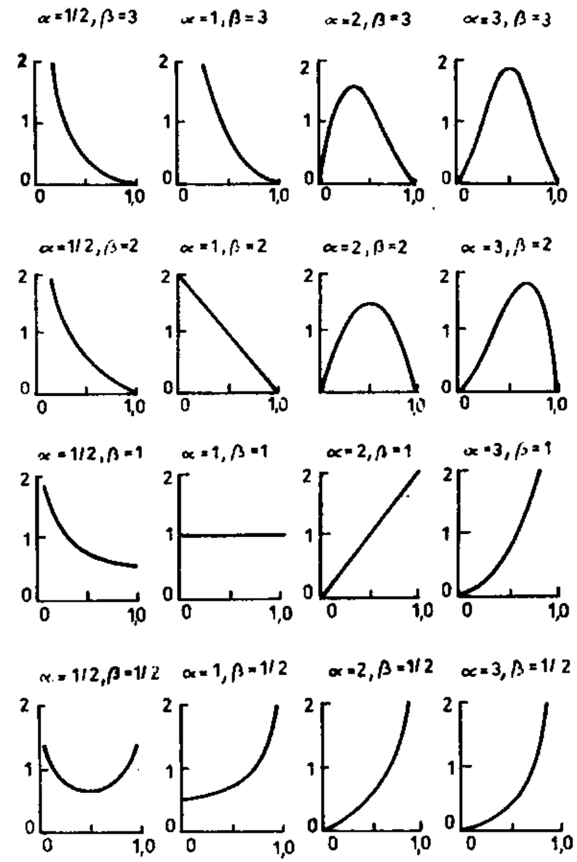
$$\mu_{2r-1} = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_{2r} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(j - \frac{n-1}{2}\right)^{2r}, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

$$m(t) = \mathrm{e}^{(n-1)t/2}\, \frac{\dfrac{\sinh(nt/2)}{(nt/2)}}{\dfrac{\sinh(t/2)}{(t/2)}}.$$

1.3.2 Spojitá rozdělení

(H) Beta rozdělení – $B(\alpha, \beta)$



Obr. 1. Beta rozdělení

$$f(x;\ \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathrm{B}(\alpha, \beta)}, \qquad 0 < x < 1;\quad \alpha > 0,\quad \beta > 0,$$

kde $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ je beta funkce,

$$\mathsf{E}X = \frac{\alpha}{\alpha + \beta},$$

$$\operatorname{var} X = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)},$$

$$x_0 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}, \qquad \alpha > 1\,, \quad \beta > 1\,,$$

$\check{x} = B_{1/2}^{-1}(\alpha, \beta)$, kde $B_x^{-1}(\alpha, \beta)$ je inverzní neúplná beta funkce, viz [78],

$$\gamma_1 = \frac{2(\beta - \alpha)\sqrt{\alpha + \beta + 1}}{(\alpha + \beta + 2)\sqrt{\alpha\beta}}\,,$$

$$\gamma_2 = \frac{3(\alpha + \beta + 1)\,[2(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta(\alpha + \beta - 6)]}{\alpha\beta(\alpha + \beta + 2)\,(\alpha + \beta + 3)} - 3\,,$$

$$\mu'_r = \frac{\mathrm{B}(\alpha + r, \beta)}{\mathrm{B}(\alpha, \beta)}, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

$m(t)$ viz [78].

(CH) F-rozdělení (Fisherovo-Snedecorovo) – $F_{m,n}$

$$f(x;\, m, n) = \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \frac{x^{(m-2)/2}}{\left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{(m+n)/2}}\,,$$

$$x > 0\,; \quad m, n = 1, 2, \ldots;$$

$$\mathrm{E}X = \frac{n}{n - 2}, \qquad n > 2\,,$$

$$\mathrm{var}\,X = \frac{2n^2(m + n - 2)}{m(n - 2)^2\,(n - 4)}, \qquad n > 4\,,$$

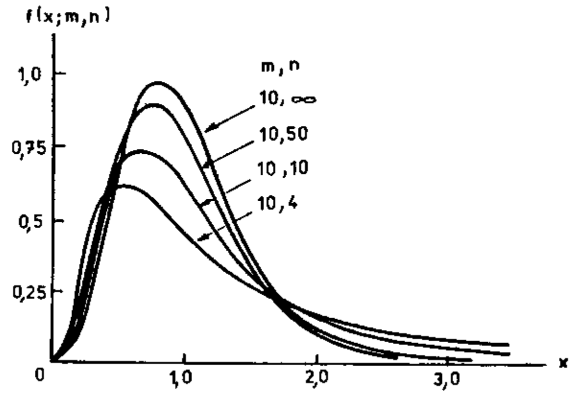
$$x_0 = \frac{n(m - 2)}{m(n + 2)}, \qquad m > 2\,,$$

$$\gamma_1 = \frac{(2m + n - 2)\sqrt{8(n - 4)}}{(n - 6)\sqrt{m(n + m - 2)}}, \qquad n > 6\,,$$

$$\gamma_2 = \frac{12[(n-2)^2\,(n - 4) + m(n + m - 2)\,(5n - 22)]}{m(n - 6)\,(n - 8)\,(m + n - 2)}, \qquad n > 8\,,$$

$$\mu'_r = \left(\frac{n}{m}\right)^r \cdot \frac{\Gamma\left(r + \frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} - r\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \qquad r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n - 1}{2}\right],$$

$$\mu'_r = +\infty\,, \quad r \geqq \frac{n}{2}\,.$$



Obr. 2. Fisherovo-Snedecorovo F-rozdělení

(I) Gamma rozdělení – $\Gamma(\alpha, \beta)$

$$f(x;\ \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\beta x}, \qquad x \geqq 0\,; \quad \alpha > 0\,, \quad \beta > 0\,;$$

$$\mathrm{E}X = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$\mathrm{var}\,X = \frac{\alpha}{\beta^2},$$

$$x_0 = \frac{\alpha - 1}{\beta}, \qquad \alpha \geqq 1\,,$$

$$\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}},$$

$$\gamma_2 = \frac{6}{\alpha},$$

$$\mu'_r = \frac{\Gamma(r + \alpha)}{\beta^r\,\Gamma(\alpha)}, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

$$m(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}, \qquad t < \beta .$$

Poznámka: 1. Rozdělení $\Gamma(1, \beta)$ se nazývá *exponenciální.*
2. Rozdělení $\Gamma(n, \beta)$, $n \in N$, se nazývá *Erlangovo.*

(J) Gumbelovo rozdělení (rozdělení extrémních hodnot)

$$f(x;\ \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} \exp\left\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\right\} . \exp\{-e^{-(x-\alpha)/\beta}\},$$

$$x \in R^1;\quad \alpha \in R^1,\quad \beta > 0;$$

$\mathrm{E}X = \alpha + \gamma^*\beta$, kde $\gamma^* \cong 0{,}5772$ je Eulerova konstanta,

$$\operatorname{var} X = \frac{\pi^2\beta^2}{6},$$

$$x_0 = \alpha,$$

$$\tilde{x} = \alpha - \beta \ln(\ln 2),$$

$$\gamma_1 \cong \sqrt{1{,}29857},$$

$$\gamma_2 \cong 2{,}4,$$

μ_r a μ'_r viz [78],

$$m(t) = e^{\alpha t}\,\Gamma(1 - \beta t), \qquad t < \frac{1}{\beta}.$$

(K) Chí-kvadrát rozdělení – χ^2_n

$$f(x;\ n) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \qquad x > 0;\quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$\mathrm{E}X = n,$$

$$\operatorname{var} X = 2n,$$

$$x_0 = n - 2, \qquad n > 2,$$

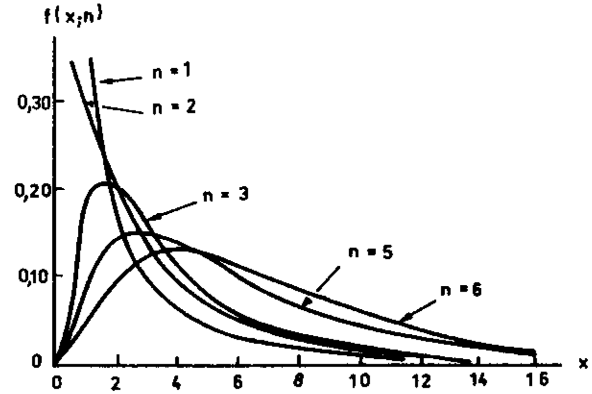
$$\gamma_1 = 2\sqrt{\frac{2}{n}},$$

$$\gamma_2 = \frac{12}{n},$$

$$\mu'_r = \frac{2^r\,\Gamma\left(\frac{n}{2} + r\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

$$m(t) = \frac{1}{(1 - 2t)^{n/2}}, \qquad t < \frac{1}{2}.$$

Poznámka: Jedná se o speciální případ gamma rozdělení pro $\alpha = n/2$ a $\beta = \frac{1}{2}$.



Obr. 3. Chí-kvadrát rozdělení

(L) Laplaceovo (dvojitě exponenciální) rozdělení

$$f(x;\ \beta, \theta) = \frac{\beta}{2} \exp\{-\beta|x - \theta|\}, \qquad x \in R^1;\quad \theta \in R^1,\quad \beta > 0;$$

$$\mathrm{E}X = \theta,$$

$$\operatorname{var} X = \frac{2}{\beta^2},$$

$$x_0 = \theta,$$

$$\tilde{x} = \theta,$$

$$\gamma_1 = 0,$$

$$\gamma_2 = 3,$$

$$\mu_{2r-1} = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_{2r} = \frac{(2r)!}{\beta^{2r}}, \qquad r = 1, 2, \dots,$$

$$m(t) = \frac{e^{\theta t}}{1 - \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}.$$

(M) Logaritmicko-normální rozdělení – $LN(\mu, \sigma)$

$$f(x;\ \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad x > 0;\quad \mu \in R^1,\quad \sigma > 0;$$

$$\mathrm{E}X = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\},$$

$$\mathrm{var}\ X = \omega(\omega - 1)\, e^{2\mu}, \qquad \text{kde} \quad \omega = \exp\{\sigma^2\},$$

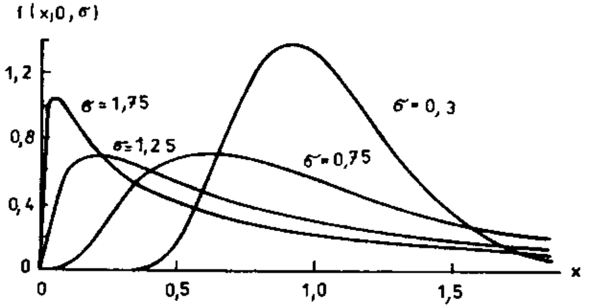
$$x_0 = \exp\{\mu - \sigma^2\},$$

$$\tilde{x} = e^{\mu},$$

$$\gamma_1 = (\omega + 2)\sqrt{\omega - 1},$$

$$\gamma_2 = \omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 6,$$

$$\mu'_r = \exp\left\{r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2}\right\}, \quad r = 1, 2, \dots.$$



Obr. 4. Logaritmicko-normální rozdělení

(N) Logistické rozdělení

$$f(x;\ \theta, \beta) = \frac{\exp\left\{-\frac{x - \theta}{\beta}\right\}}{\beta\left(1 + \exp\left\{-\frac{x - \theta}{\beta}\right\}\right)^2}, \qquad x \in R^1;\quad \theta \in R^1,\quad \beta > 0;$$

$$\mathrm{E}X = \theta,$$

$$\mathrm{var}\ X = \frac{\beta^2\pi^2}{3},$$

$$x_0 = \theta,$$

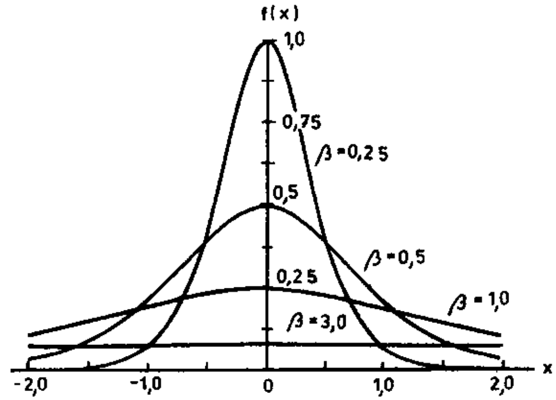
$$\tilde{x} = \theta,$$

$$\gamma_1 = 0,$$

$$\gamma_2 = 1{,}2,$$

μ_r a μ'_r viz [78],

$$m(t) = \exp\{\theta t\}\,.\,(\pi\beta t \operatorname{cosec}(\pi\beta t)).$$



Obr. 5. Logistické rozdělení ($\theta = 0$)

(O) Mocninné rozdělení

$$f(x;\ \theta, c) = \frac{c}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{c-1}, \qquad 0 < x < \theta;\quad \theta > 0,\quad c > 0;$$

$$\mathrm{E}X = \frac{c\theta}{c + 1},$$

$$\mathrm{var}\ X = \frac{c\theta^2}{(c + 2)(c + 1)^2},$$

$$x_0 = \theta, \qquad c > 1,$$

$$\tilde{x} = \frac{\theta}{2^{1/c}},$$

$$\gamma_1 = \frac{2(1-c)\sqrt{2+c}}{(3+c)\sqrt{c}},$$

$$\gamma_2 = \frac{3(3c^2-c+2)(c+2)}{c(c+3)(c+4)} - 3,$$

$$\mu'_r = \theta^r \frac{c}{c+r}, \quad r = 1, 2, \dots .$$

(P) Normální jednorozměrné rozdělení – $N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x;\ \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad x \in R^1;\quad \mu \in R^1,\quad \sigma^2 > 0;$$

$\mathsf{E}X = \mu$,

$\operatorname{var} X = \sigma^2$,

$x_0 = \mu$,

$\tilde{x} = \mu$,

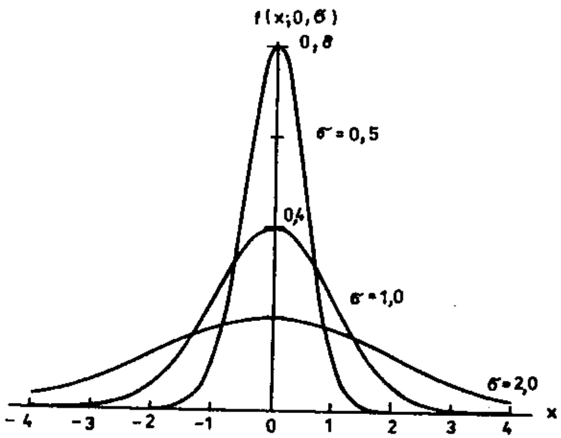
$\gamma_1 = 0$,

$\gamma_2 = 0$,

$\mu_{2r-1} = 0, \qquad r = 1, 2, \dots,$

$$\mu_{2r} = \frac{(2r)!\ \sigma^{2r}}{r!\ 2^r}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

$$m(t) = \exp\left\{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\}.$$



Obr. 6. Normální rozdělení

(Q) Normální dvourozměrné rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$

$$f(x, y;\ \mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \varrho) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\varrho^2}}\,.$$

$$.\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\varrho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\},$$

$$x \in R^1,\quad y \in R^1;\quad \mu_x \in R^1,\quad \mu_y \in R^1,\quad \sigma_x > 0,\quad \sigma_y > 0,$$

$$\varrho = \frac{\mathsf{E}(X-\mu_x)(Y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \neq \pm 1;$$

$\mathsf{E}X_1 = \mu_x$,

$\mathsf{E}X_2 = \mu_y$,

$\operatorname{var} X_1 = \sigma_x^2$,

$\operatorname{var} X_2 = \sigma_y^2$.

(R) Normální mnohorozměrné rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_p)' - \mathfrak{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$f(x_1, \dots, x_p;\ \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\,|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\},$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_p)' \in R^p$; $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)' \in R^p$, $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^p$ je symetrická pozitivně definitní matice řádu $p \times p$ a $|\boldsymbol{\Sigma}|$ je determinant matice $\boldsymbol{\Sigma}$.

$\mathsf{E}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu}$,

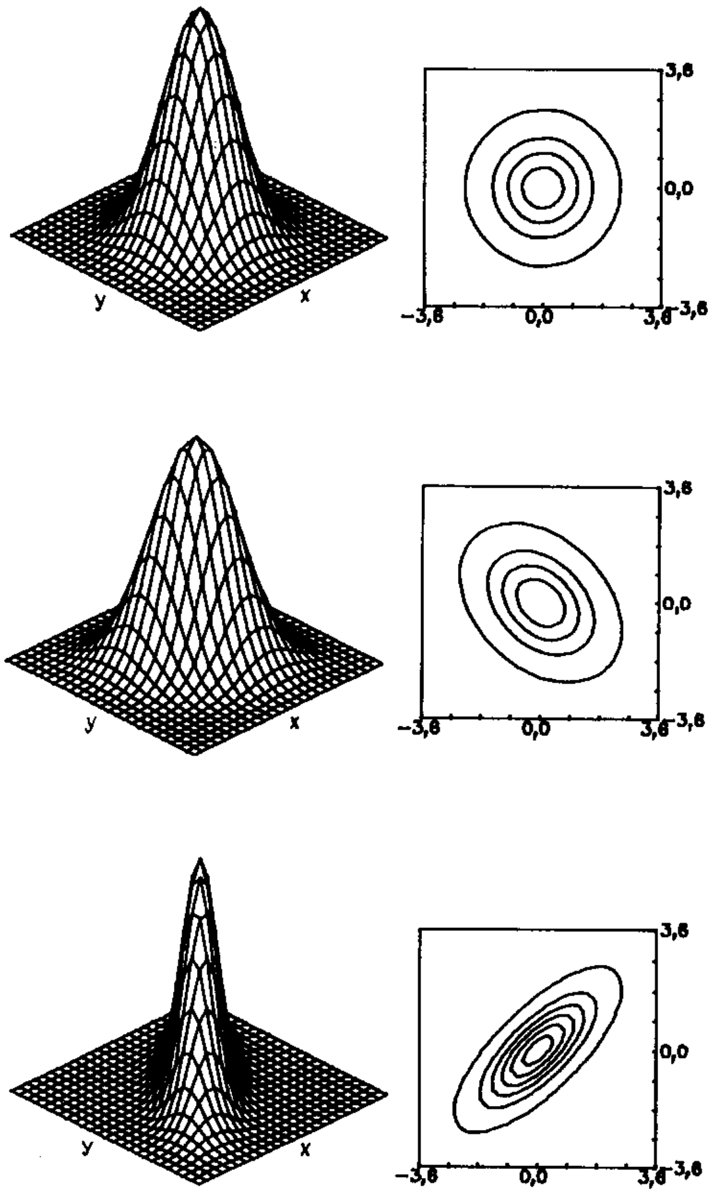
$\operatorname{var} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Sigma}$,

$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}, \qquad 1 \leqq i, j \leqq p$.

Nechť vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_p)'$ má rozdělení $\mathfrak{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Potom marginální rozdělení vektoru $\boldsymbol{X}_* = (X_{j_1}, \dots, X_{j_k})'$, kde $1 \leqq j_1 < \dots < j_k \leqq p$, je opět k-rozměrné normální rozdělení $\mathfrak{N}_k(\boldsymbol{\mu}_*, \boldsymbol{\Sigma}_*)$, kde $\boldsymbol{\mu}_* = (\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_k})'$ a $\boldsymbol{\Sigma}_* = (\sigma_{jl})$, $j, l = j_1, \dots, j_k$.

Poznámka: Je-li $\boldsymbol{\Sigma}$ symetrická pozitivně semidefinitní matice hodnosti $\mathrm{h}(\boldsymbol{\Sigma}) = r < p$, neexistuje inverzní matice $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$, takže hustotu nelze vyjádřit způsobem obdobným jako výše. Takové rozdělení nazýváme singulární normální rozdělení. Přitom opět $\boldsymbol{\mu}$ má význam vektoru středních hodnot a $\boldsymbol{\Sigma}$ je varianční matice veličin $X_1, \dots, X_p$; více viz např. monografie [122], kapitola 8.

Pro $p = 1$ se v takovém případě jedná o degenerované rozdělení, tj. rozdělení náhodné veličiny X, jež nabývá hodnoty μ s pravděpodobností 1.



Obr. 7. Dvourozměrné normální rozdělení – hustota a průměty řezů hustoty rovinami $z = 0{,}01$; $z = 0{,}05$; $z = 0{,}09$; $z = 0{,}13$; $z = 0{,}17$; $z = 0{,}21$.
a) $\varrho = 0{,}0$
b) $\varrho = -0{,}35$
c) $\varrho = 0{,}75$

Dvourozměrné normální rozdělení je singulární v případě $\varrho^2 = 1$ nebo $\sigma_1^2 = 0$ nebo $\sigma_2^2 = 0$.

(S) Paretovo rozdělení

$$f(x;\ k,\ \alpha) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \qquad x \geqq k > 0\,; \quad \alpha > 0\,;$$

$$\mathsf{E}X = \frac{\alpha k}{\alpha - 1}, \qquad \alpha > 1\,,$$

$$\operatorname{var} X = \frac{\alpha k^2}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}, \qquad \alpha > 2\,,$$

$$x_0 = k\,,$$

$$\tilde{x} = k2^{1/\alpha}\,,$$

γ_1, γ_2 *viz* [78],

$$\mu_r' = \frac{\alpha k^r}{\alpha - r}, \qquad \alpha > r\,; \quad r = 1, 2, \ldots .$$

(T) Rovnoměrné spojité rozdělení – $R(a, b)$

$$f(x;\ a, b) = \frac{1}{b - a}, \qquad -\infty < a < x < b < +\infty\,;$$

$$\mathsf{E}X = \frac{a + b}{2},$$

$$\operatorname{var} X = \frac{(b - a)^2}{12},$$

$$\tilde{x} = \frac{a + b}{2},$$

$$\gamma_1 = 0\,,$$

$$\gamma_2 = -\frac{6}{5},$$

$$\mu_r' = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b - a)(r + 1)}, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

$$m(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{(b - a)\,t}.$$

(U) t-rozdělení (Studentovo) – t_n

$$f(x;\ n) = \frac{1}{\sqrt{n}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \qquad x \in R^1;\quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$\mathrm{E}X = 0, \qquad n > 1,$$

$$\operatorname{var} X = \frac{n}{n-2}, \qquad n > 2,$$

$$x_0 = 0,$$

$$\tilde{x} = 0,$$

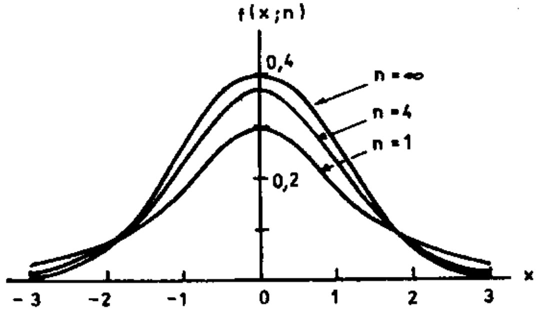
$$\gamma_1 = 0, \qquad n > 3,$$

$$\gamma_2 = \frac{6}{n-4}, \qquad n > 4,$$

$$\mu_{2r} = n^r \frac{\mathrm{B}\left(\frac{2r+1}{2}, \frac{n-2r}{2}\right)}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)}, \qquad n > 2r,\quad r = 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_{2r-1} = 0, \qquad n > 2r - 1,\quad r = 1, 2, \ldots.$$

Poznámka: Rozdělení t_1 se nazývá *Cauchyho rozdělení.*



Obr. 8. Studentovo t-rozdělení

(V) Weibullovo rozdělení – $W(a, b)$

$$f(x;\ a, b) = abx^{\,b-1} \exp\{-ax^b\}, \qquad x > 0;\quad a > 0,\quad b > 0;$$

$$\mathrm{E}X = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)}{a^{1/b}},$$

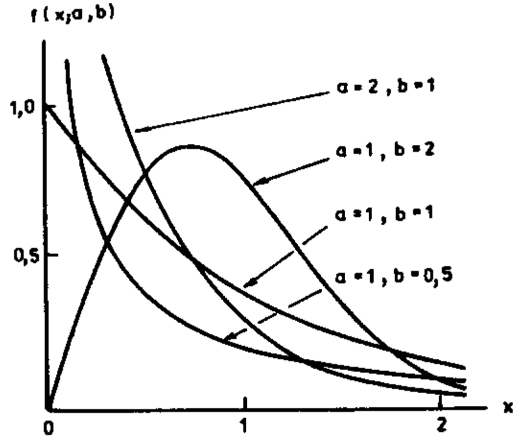
$$\operatorname{var} X = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)}{a^{2/b}},$$

$$x_0 = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{ab}\right)^{1/b}, \qquad b \geq 1,$$

$$\tilde{x} = \left(\frac{\ln 2}{a}\right)^{1/b},$$

γ_1, γ_2 viz [78],

$$\mu_r' = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{r}{b}\right)}{a^{r/b}}, \qquad r = 1, 2, \ldots.$$



Obr. 9. Weibullovo rozdělení