Příklady z Fyziky plazmatu

1 Úvod

1.1 Příklad (2b.)

Uvažujme, že na počátku máme rovnoměrné plazma, ve kterém je hustota elektronů i iontů stejná a rovna n_0 (plasma je elektricky neutrální). Nyní předpokládejme, že se elektrony na ploše y, z nějakým vnějším vlivem ze svých rovnovovážných poloh posunuly o malou hodnotu s ve směru osy x.
(a) Použitím Gaussova zákona ukažte, že elektrické pole, které vznikne mezi náboji je dáno vztahem

$$E_x = \left(\frac{n_0 e}{\epsilon_0}\right) s \ .$$

(b) Ukažte, že pohybová rovnice pro každý elektron pod vlivem tohoto elektrického pole je

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{n_0 e^2}{m_\mathrm{e}\epsilon_0}\right) s = 0 \ .$$

Dokažte, že toto je rovnice harmonického oscilátoru s frekvencí

$$\omega_\mathrm{pe} = \left(\frac{n_0 e^2}{m_\mathrm{e}\epsilon_0}\right)^{1/2} \ .$$

1.2 Příklad (2b.)

(a) Odhadněte teplotu plazmatu, v němž se v kouli o poloměru 1 mm liší hustota elektronů od hustoty iontů o 1 %. Hustota nabitých částic je $10^{20}\ \mathrm{m}^{-3}$. (Vyjděte z předpokladu rovnosti kinetické (tepelné) a potenciální energie, vyplívající z Coulombovských sil.)
(b) Dosaďte zadané hodnoty a vypočtenou teplotu do vzorce pro výpočet Debyeovy délky λ_D a ukažte, jaké musí být fyzikální rozměry plazmatu L.

1.3 Příklad (2b.)

Mějme raketu, která je mimo působení gravitačního pole Země.
Označme:

v... konstantní rychlost plynů vyfukovaných z rakety vzhledem k raketě

$u(t)$... okamžitá rychlost rakety

$M(t)$... okamžitá hmotnost celé rakety

$-\mathrm{d}M(t)/\mathrm{d}t$... konstantní časová změna hmotnosti rakety, daná hmotou plynů vyvržených z rakety

(a) Dokažte, že pohybová rovnice rakety je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[M(t)u(t)\right] = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}[u(t) - v] \ .$$

a ukažte, že okamžité zrychlení rakety je

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{M(t)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \ .$$

(b) Zintegrujte pohybovou rovnici a ukažte, že

$$u(t) = u(t_0) + v \ln[M(t_0)/M(t)] \ .$$

(c) Pokud raketa hoří po časový interval $\delta t = t - t_0$ a pokud $M(t) \ll M(t_0)$, ukažte, že počáteční zrychlení rakety je

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} = \frac{v}{M(t_0)} \frac{M(t_0) - M(t)}{\delta t} \simeq \frac{v}{\delta t} \ .$$

(d) Dosaďte do vztahů pro $(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)_{t_0}$ a $u(t)$ pro chemickou raketu $v = 10^3$ m/s a $\delta t = 10$ s; a také pro plazmový pohon s $v = 10^4$ m/s a $\delta t = 100$ dní. Pro spočítání $u(t)$ uvažujte $u_{t_0} = 0$ a $M(t_0) = 10M(t)$.

1.4 Příklad (1b.)

Z Maxwellových rovnic odvoďte rovnici pro zachování náboje

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \ .$$

Tento výsledek ukazuje to, že zachování elektrického náboje přímo vyplývá z Maxwellových rovnic.

1.5 Příklad (2b.)

Z Maxwellových rovnic odvoďte následující zákon zachování energie v elektromagnetických polích, který je známý jako *Poyntingův teorém*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) \mathrm{d}^3 r + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = - \int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) \mathrm{d}^3 r \ ,$$

pro lineární izotropické médium, pro které platí $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ a $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$. Fyzikálně interpretujte každý člen této rovnice. Jaký je fyzikální rozměr těchto členů?

2 Základy kinetické teorie plazmatu

2.1 Příklad (1b.)

Uvažujme systém částic rovnoměrně rozdělený v prostoru s konstantní hustotou částic n_0 a charakterizován rozdělovací funkcí rychlostí $f(v)$ definovanou takto:

$$\begin{aligned} f(v) &= K_0 \quad \text{pro } |v_i| \leq v_0 \quad (i = x, y, z) \ , \\ f(v) &= 0 \qquad \text{jinak} \ , \end{aligned}$$

kde K_0 je nenulová kladná konstanta. Určete hodnotu K_0 pomocí n_0 a v_0.

2.2 Příklad (1b.)

Uvažujme pohyb nabitých částic v jednom rozměru za přítomnosti elektrického potenciálu $V(x)$. Ukažte přímým dosazením, že rozdělovací funkce

$$f = \mathrm{fce}(\frac{1}{2} m v^2 + qV) \ ,$$

je řešením Boltzmannovy kinetické rovnice pro stacionární stav.

2.3 Příklad (2b.)

Předpokládejme, že na každou částici ve fázovém prostoru působí vnější síla $\mathbf{F}$. Bez interakcí bude částice typu α se souřadnicemi $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ v čase t za časový interval $\mathrm{d}t$ nalezena v souřadnicích $(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ podle

$$\mathbf{r}'(t + \mathrm{d}t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}\,\mathrm{d}t \ ,$$

$$\mathbf{v}'(t + \mathrm{d}t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}\,\mathrm{d}t \ ,$$

kde $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m_\alpha$ je zrychlení částice a m_α je její hmotnost.

Mezi novým elementem fázového prostoru a tím původním je tento vztah

$$\mathrm{d}^3r'\mathrm{d}^3v' = |J|\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3v \ ,$$

kde J je Jakobiánem této transformace. Dokažte, že pro Jakobián této transformace platí $|J| = 1$.

2.4 Příklad (1b.)

Odvoďte tvar časového vývoje rozdělovací funkce f_α pro Krookův srážkový člen

$$\left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{\mathrm{coll}} = -\frac{(f_\alpha - f_{\alpha 0})}{\tau} \ ,$$

kde $f_{\alpha 0}$ je rozdělovaci funkce lokální rovnováhy, τ je relaxační doba srážek částic. Předpokládejte Boltzmannovu kinetickou rovnici (BKR) bez působení vnějších sil a bez přítomnosti prostorových gradientů, $f_{\alpha 0}$ a τ jsou na čase nezávislé.

3 Střední hodnoty a makroskopické veličiny

3.1 Příklad (2b.)

Ukažte. že počet částic, které dopadají z plazmatu na jednotku povrchu tělesa vnořeného do plazmatu za jednotku času (tok částic), je pro kulově symetrické rozdělení rychlostí f roven

$$\Gamma = \frac{1}{4} n < v > \ ,$$

kde $<v>$ je střední velikost rychlosti částic.

3.2 Příklad (3b.)

Uvažujme systém částic charakterizován stejnou rozdělovací funkcí jako v příkladu 2.1.
(a) Ukažte, že absolutní teplota systému je dána vztahem

$$T = \frac{m v_0^2}{3k} \ ,$$

kde m je hmotnost každé částice a k je Boltzmannova konstanta. (1b.)
(b) Spočtěte následující výraz pro tenzor tlaku

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3}\rho_m v_0^2\,\mathbf{1} \ ,$$

kde $\rho_m = nm$ a $\mathbf{1}$ je jednotkový tenzor. (1b.)
(c) Dokaže, že pro vektor toku tepla platí $\mathbf{q} = 0$. (1b.)

4 Rovnovážný stav

Pro výpočty různých integrálů je užitečné si zapamatovat následující relace:

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad x > 0 \ ,$$

$$\Gamma(x+1) = x! \quad \text{pro celočíselné}\, x, \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1), \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \ .$$

4.1 Příklad (3b.)

Určete konstantní koeficienty C, a_2 a $\mathbf{v}_0$ v Maxwellově rozdělovací funkci

$$f = C \exp[-\frac{1}{2} m a_2 (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2] \ . \tag{1}$$

Tyto konstanty mohou být vyjádřeny pomocí pozorovatelných fyzikálních vlastností systému, jako je hustota částic n, střední rychlost $\mathbf{u}$ a kinetická teplota T.
(a) Vyjděte z definice hustoty částic

$$n = \int_v f \mathrm{d}^3 v \ ,$$

a ukažte, že

$$n = C \left(\frac{2\pi}{m a_2} \right)^{3/2} \ . \tag{2}$$

(b) Vyjděte z definice střední rychlosti částic

$$\mathbf{u} = <\mathbf{v}> = \frac{1}{n} \int_v f \mathbf{v} \mathrm{d}^3 v \ ,$$

a ukažte, že

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \ . \tag{3}$$

(Rychlost částice $\mathbf{v}$ se dá vyjádřit jako součet náhodné (tepelné) rychlosti $\mathbf{V}$ a střední rychlosti $\mathbf{u}$, tedy $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}$)
(c) Vyjděte z termodynamické definice kinetické teploty T

$$\frac{3}{2} n k T = \frac{1}{2} n m <V^2> = \frac{1}{2} m \int_v f V^2 \mathrm{d}^3 V \ ,$$

a ukažte, že

$$kT = \left(\frac{C}{n a_2} \right) \left(\frac{2\pi}{m a_2} \right)^{3/2} \ . \tag{4}$$

Vyjádřete z rovnic (2) a (4) konstanty C a a_2. Ty dosaďte do vztahu (1) a dostaneme Maxwellovo rozdělení náhodných rychlostí:

$$f(\mathbf{V}) = n \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m \mathbf{V}^2}{2kT} \right) \ . \tag{5}$$

4.2 Příklad (1b.)

Pro Maxwellovo rozdělení rychlostí určete střední velikost rychlosti částic.

4.3 Příklad (1b.)

Pro Maxwellovo rozdělení rychlostí určete střední kvadratickou velikost rychlosti částic.

4.4 Příklad (1b.)

Pro Maxwellovo rozdělení rychlostí určete nejpravděpodobnější velikost rychlosti částic.

4.5 Příklad (1b.)

Rozdělovací funkce (tepelných) kinetických energií E pro plyn popsaný Maxwellovou rozdělovací funkcí je dána vztahem:

$$G(E) = \frac{2nE^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}(kT)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \ .$$

Spočtěte nejpravděpodobnější energii a ukažte, že velikost rychlosti částic, které mají tuto energii, je rovna $(kT/m)^{1/2}$.

4.6 Příklad (1b.)

Máme plazma s jedním typem iontů v termodynamické rovnováze s neutrálním plynem. Určete jeho teplotu, pokud z experimentu známe hustotu iontů (rovna hustotě elektronů) a neutrálů. Ionty s hustotou $n_\mathrm{i} = 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}$ jsou v rovnováze s neutrály ve stavu s ionizačním potenciálem 2 eV, jejichž populace je $10^{15}\,\mathrm{m}^{-3}$.

5 Interakce částic v plazmatu

5.1 Příklad (1b.)

Nechť je známa velikost vzájemné rychlosti g a úhel rozptylu χ v souřadné soustavě spojené s těžištěm. Vyjádřete velikost změny rychlosti molekuly A $|\Delta v_i^\mathrm{A}|$ při srážce s molekulou B. Napište složky Δv_i^A v těžišťové soustavě souřadnic.

5.2 Příklad (3b.)

Uvažujte srážku mezi molekulami A a B, kdy molekula B byla původně v klidu. Úhel odchýlení (v systému spojeném s těžištěm) je χ.
(a) V laboratorním systému souřadnic (spojen s pozorovatelem v klidu) ukažte, že úhel χ_L udávající úhel, o který je molekula A odchýlena při pozorování pozorovatelem v klidu, je dán vztahem

$$\tan\chi_\mathrm{L} = \frac{\sin\chi}{\cos\chi + m_\mathrm{A}/m_\mathrm{B}} \ .$$

(b) Ukažte, že vztah mezi diferenciálním účinným průřezem v laboratorním systému souřadnic $\sigma_\mathrm{L}(\chi_\mathrm{L})$ a v souřadné soustavě spojené s těžištěm $\sigma(\chi)$ je

$$\sigma_\mathrm{L}(\chi_\mathrm{L}) = \sigma(\chi)\frac{[1 + 2(m_\mathrm{A}/m_\mathrm{B})\cos\chi + (m_\mathrm{A}/m_\mathrm{B})^2)]^{3/2}}{1 + (m_\mathrm{A}/m_\mathrm{B})\cos\chi} \ .$$

Všimněte si, že když je $m_\mathrm{B} = \infty$, dostaneme $\chi_\mathrm{L} = \chi$ a $\sigma_\mathrm{L}(\chi_\mathrm{L}) = \sigma(\chi)$.
(c) Dokažte, že když $m_\mathrm{A} = m_\mathrm{B}$, dostaneme $\chi_\mathrm{L} = \chi/2$ a $\sigma_\mathrm{L}(\chi_\mathrm{L}) = 4\cos(\chi/2)\sigma(\chi)$.

5.3 Příklad (2b.)

Nechť se částice o hmotnosti m^{A} srazí z částicí s m^{B}, která byla původně v klidu. Jestliže známe úhel θ, který svírá původní rychlost částice A, $\mathbf{v}^{\mathrm{A}}$, se směrem daným spojnicí částic, kdy jsou si nejblíže, vyjádřete poměr kinetických energií částic po srážce. Dále vyjádřete poměrnou ztrátu energie částice A.

5.4 Příklad (2b.)

Pro diferenciální rozptylový srážkový průřez s úhlovou závislostí, který je dán vztahem:

$$\sigma(\chi) = \frac{1}{2}\sigma_0(3\cos^2\chi + 1) \ ,$$

kde σ_0 je konstanta, spočítejte celkový účinný průřez a účinný průřez pro přenos hybnosti.

5.5 Příklad (4b.)

Mějme dvě částice, jejichž interakci lze popsat pomocí následující potenciálové jámy:

$$\begin{aligned} U(r) &= -U_0 \quad \text{pro } r \leq a \ , \\ U(r) &= 0 \qquad \text{pro } r > a \ . \end{aligned}$$

(a) Spočítejte diferenciální rozptylový účinný průřez $\sigma(\chi)$ a ukažte, že za předpokladu $b < a$, je dán vztahem:

$$\sigma(\chi) = \frac{p^2a^2\,[p\cos(\chi/2) - 1]\,[p - \cos(\chi/2)]}{4\cos(\chi/2)[1 - 2p\cos(\chi/2) + p^2]^2} \ ,$$

kde

$$p = \sqrt{1 + \frac{2U_0}{\mu g^2}} \ .$$

(b) Ukažte, že pro celkový rozptylový účinný průřez platí vztah:

$$\sigma_t = 2\pi\int_0^a b\mathrm{d}b = \pi a^2 \ .$$

6 Makroskopické transportní rovnice

6.1 Příklad (2b.)

Prozkoumejme vliv srážkového členu v makroskopickém pohybu kapalin. Uvažujte rovnoměrnou směs rozdílných kapalin, kde nepůsobí žádné vnější síly. Díky tomu se pohybová rovnice pro částice druhu α redukuje na

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\sum_\beta \nu_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta) \ .$$

Určete z této rovnice $\mathbf{u}(t)$ pro směs dvou kapalin. Všimněte si, že v rovnováze (když $\mathrm{d}\mathbf{u}/\mathrm{d}t = 0$) musí být velikost rychlostí všech částic stejné.

7 Makroskopické transportní rovnice pro vodivou kapalinu

7.1 Příklad (1b.)

Ukažte, že celkovou hustotu energie všech částic v kapalině lze napsat jako součet hustoty tepelné energie celé kapaliny a kinetické energie částic jako:

$$\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} < v^2 >_\alpha = \frac{3p}{2} + \sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} u_\alpha^2,$$

kde

$$\frac{3p}{2} = \sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} < c_{\alpha 0}^2 > = \sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} < c_\alpha^2 > + \sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} w_\alpha^2.$$

7.2 Příklad (2b.)

Vyjděte ze vztahu pro hustotu elektrického proudu v plně ionizovaném plazmatu, které obsahuje elektrony a jeden typ iontů z nábojem e:

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e),$$

a ze vztahu pro driftovou rychlost celého plazmatického útvaru:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho_m}(\rho_{me}\mathbf{u}_e + \rho_{mi}\mathbf{u}_i).$$

Odvoďte vztahy pro driftové rychlosti iontů $\mathbf{u}_i$ a elektronů $\mathbf{u}_e$. Tyto vztahy zjednodušte tak, že předpokládejte makroskopickou neutralitu nábojů $n_e = n_i = n$. Nakonec ještě vztahy zjednodušte předpokladem $m_i \gg m_e$.

8 Vodivost plazmatu a difúze

8.1 Příklad (3b.)

Předpokládejte, že pro průměrné rychlosti elektronů a iontů v plně ionizovném plazmatu za přítomnosti konstantního a neproměnného elektrického ($\mathbf{E}$) a magnetického ($\mathbf{B}_0$) pole platí následující pohybové rovnice:

$$m_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_0) - m_e \nu (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)\ ,$$

$$m_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}_0) - m_e \nu (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)\ .$$

Určete vztah pro stejnosměrnou vodivost $\sigma_H, \sigma_\perp$ a σ_0 v ustáleném stavu.

9 Základní jevy v plazmatu

9.1 Příklad (2b.)

Spočítejte záporný elektrostatický potenciál ϕ_w, který se objeví na nekonečné rovinné stěně vnořené do plazmatu v ustáleném stavu, který se skládá z elektronů s nábojem $-e$ a z iontů s nábojem Ze. Teplota elektronů je T_e a iontů T_i.