

## Obecné rovnice pro optická vlákna

Z Maxwellových rovnic pro téměř homogenní dielektrikum bez volných nábojů

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &\approx 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\vec{B}_{,t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu \varepsilon \vec{E}_{,t}\end{aligned}$$

vyplývá

$$\Delta \psi = \frac{n^2}{c^2} \psi_{,tt}$$

kde  $\psi$  může označovat libovolnou složku vektoru  $\vec{E}$  nebo  $\vec{B}$ .

Řešení hledáme ve tvaru

$$\psi = \psi^0(r, \varphi) e^{i\omega t - \gamma z}$$

$\gamma = i\beta + \alpha \approx i\beta$ ,  $\alpha$  reprezentuje útlum.

$$\begin{aligned}\psi_{,t} &= i\omega \psi & \psi_{,z} &= -\gamma \psi \\ \psi_{,tt} &= -\omega^2 \psi & \psi_{,zz} &= \gamma^2 \psi\end{aligned}$$

Dále označím  $\mathcal{H} \equiv (n\omega/c)^2 + \gamma^2 = k_0^2 n^2 + \gamma^2$ , použijeme separaci proměnných  $\psi^0 = R(r) \Phi(\varphi)$  a skutečnost, že funkce  $\Phi$  je periodická s periodou  $2\pi$ .

$$\begin{aligned}\psi_{,rr} + \frac{1}{r} \psi_{,r} + \frac{1}{r^2} \psi_{,\varphi\varphi} + \gamma^2 \psi &= -\omega^2 \frac{n^2}{c^2} \psi \\ r^2 \frac{R_{,rr}}{R} + r \frac{R_{,r}}{R} + \frac{\Phi_{,\varphi\varphi}}{\Phi} + r^2 \mathcal{H} &= 0 \\ \frac{\Phi_{,\varphi\varphi}}{\Phi} &= -l^2 \quad l \in \mathbb{Z} \\ r^2 R_{,rr} + r R_{,r} + (r^2 \mathcal{H}^2 - l^2) R &= 0\end{aligned}$$

(V obecném případě  $\mathcal{H}$  závisí na indexu lomu, je tedy také funkcí  $r$ , což poslední uvedenou rovnici komplikuje.) Důležitou skutečností je spojitost tečných složek intenzity elektrického a magnetického pole v celém vlákne, tedy i na hranici jádra a pláště.

Označím  $n_1$  maximální index lomu ve středu jádra,  $n_2$  index lomu pláště,  $h^2 \equiv k_0^2 n_1^2 + \gamma^2 \approx k_0^2 n_1^2 - \beta^2$ ,  $h_2^2 \equiv k_0^2 n_2^2 + \gamma^2 \approx k_0^2 n_2^2 - \beta^2$ .

Zářivé módy:  $h_2^2 > 0$ , tj.  $\beta^2 < n_2^2 k_0^2$

Vedené módy:  $h_2^2 < 0 \wedge h^2 > 0$ , tj.  $n_1^2 k_0^2 > \beta^2 > n_2^2 k_0^2$ .

Předpokládejme, že známe řešení  $E_z$  a  $B_z$ . Pro výpočet ostatních složek vektorů  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  je možné použít pár Maxwellových rovnic obsahující rotace:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}E_{z,\varphi} + \gamma E_\varphi &= -i\omega B_r & \frac{1}{r}B_{z,\varphi} + \gamma B_\varphi &= i\frac{\omega n^2}{c^2} E_r \\ \gamma E_r + E_{z,r} &= i\omega B_\varphi & \gamma B_r + B_{z,r} &= -i\frac{\omega n^2}{c^2} E_\varphi \\ E_{\varphi,r} + \frac{1}{r}E_\varphi - E_{r,\varphi} &= -i\omega B_z & B_{\varphi,r} + \frac{1}{r}B_\varphi - B_{r,\varphi} &= i\frac{\omega n^2}{c^2} E_z \end{aligned}$$

Z těchto rovnic je mimo jiné vidět, že  $E_z$  i  $B_z$  musí mít stejný řád  $l$ . Při výpočtu  $E_r$  lze postupovat:

$$\begin{aligned} i\frac{\omega n^2}{c^2} E_r &= \frac{1}{r}B_{z,\varphi} + \frac{\gamma}{i\omega} (\gamma E_r + E_{z,r}) \\ iE_r \left( \frac{\omega n^2}{c^2} + \frac{\gamma^2}{\omega} \right) &= \frac{1}{r}B_{z,\varphi} - i\frac{\gamma}{\omega} E_{z,r} \\ E_r (k_0^2 n^2 + \gamma^2) &= -\frac{i\omega}{r} B_{z,\varphi} - \gamma E_{z,r} \\ E_r &= -\frac{i\omega}{r\mathcal{H}^2} B_{z,\varphi} - \frac{\gamma}{\mathcal{H}^2} E_{z,r} \\ E_r &= \frac{\omega l}{r\mathcal{H}^2} B_z - \frac{\gamma}{\mathcal{H}^2} E_{z,r} \end{aligned}$$

Analogicky se odvodí:

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \frac{i\omega}{\mathcal{H}^2} B_{z,r} - \frac{il\gamma}{r\mathcal{H}^2} E_z \\ B_r &= -\frac{\omega l n^2}{r\mathcal{H}^2 c^2} E_z - \frac{\gamma}{\mathcal{H}^2} B_{z,r} \\ B_\varphi &= -\frac{i\omega n^2}{\mathcal{H}^2 c^2} E_{z,r} - \frac{il\gamma}{r\mathcal{H}^2} B_z \end{aligned}$$

## Step-index fiber

Označení:

$$\begin{aligned}\tau &= e^{i(\omega t + l\varphi) - \gamma z} \\ h^2 &= k_0^2 n_1^2 + \gamma^2 \approx k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ q^2 &= -(k_0^2 n_2^2 + \gamma^2) \approx \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \\ J_l'(x) &= \frac{d J_l(x)}{dx} \\ K_l'(x) &= \frac{d K_l(x)}{dx}\end{aligned}$$

Výsledné elektrické a magnetické pole:

$r \leq a$	$r \geq a$
$\tau^{-1} E_z = A J_l(hr)$	$\tau^{-1} E_z = C K_l(qr)$
$\tau^{-1} E_r = B \frac{\omega l}{h^2} \frac{1}{r} J_l(hr) - A \frac{\gamma}{h} J_l'(hr)$	$\tau^{-1} E_r = -D \frac{\omega l}{q^2} \frac{1}{r} K_l(qr) + C \frac{\gamma}{q} K_l'(qr)$
$\tau^{-1} E_\varphi = -A \frac{i l \gamma}{h^2} \frac{1}{r} J_l(hr) + B \frac{i \omega}{h} J_l'(hr)$	$\tau^{-1} E_\varphi = C \frac{i l \gamma}{q^2} \frac{1}{r} K_l(qr) - D \frac{i \omega}{q} K_l'(qr)$
$\tau^{-1} B_z = B J_l(hr)$	$\tau^{-1} B_z = D K_l(qr)$
$\tau^{-1} B_r = -A \frac{\omega l}{h^2} \frac{n_1^2}{c^2} \frac{1}{r} J_l(hr) - B \frac{\gamma}{h} J_l'(hr)$	$\tau^{-1} B_r = C \frac{\omega l}{q^2} \frac{n_2^2}{c^2} \frac{1}{r} K_l(qr) + D \frac{\gamma}{q} K_l'(qr)$
$\tau^{-1} B_\varphi = -B \frac{i l \gamma}{h^2} \frac{1}{r} J_l(hr) - A \frac{i \omega}{h} \frac{n_1^2}{c^2} J_l'(hr)$	$\tau^{-1} B_\varphi = D \frac{i l \gamma}{q^2} \frac{1}{r} K_l(qr) + C \frac{i \omega}{q} \frac{n_2^2}{c^2} K_l'(qr)$

Ze spojitosti  $E_z$ ,  $E_\varphi$ ,  $B_z$  a  $B_\varphi$  na rozhraní plyne

$$\begin{aligned}A J_l(ha) &= C K_l(qa) \\ B J_l(ha) &= D K_l(qa) \\ A \frac{l\gamma}{(ha)^2} J_l(ha) - B \frac{\omega}{ha} J_l'(ha) &= -C \frac{l\gamma}{(qa)^2} K_l(qa) + D \frac{\omega}{qa} K_l'(qa) \\ A \frac{\omega}{ha} \frac{n_1^2}{c^2} J_l'(ha) + B \frac{l\gamma}{(ha)^2} J_l(ha) &= -C \frac{\omega}{qa} \frac{n_2^2}{c^2} K_l'(qa) - D \frac{l\gamma}{(qa)^2} K_l(qa)\end{aligned}$$

tj. v netriviálním případě

$$\begin{aligned}\frac{C}{A} &= \frac{J_l(ha)}{K_l(qa)} \\ \frac{B}{A} &= \frac{l\gamma}{\omega} \left[ \frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(qa)^2} \right] \left[ \frac{J_l'(ha)}{ha J_l(ha)} + \frac{K_l'(qa)}{qa K_l(qa)} \right]^{-1} \\ \frac{D}{A} &= \frac{J_l(ha) B}{K_l(qa) A} \\ \left[ \frac{J_l'(ha)}{ha J_l(ha)} + \frac{K_l'(qa)}{qa K_l(qa)} \right] \left[ \frac{n_1^2 J_l'(ha)}{ha J_l(ha)} + \frac{n_2^2 K_l'(qa)}{qa K_l(qa)} \right] &= - \left[ \frac{l\gamma c}{\omega} \left( \frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(qa)^2} \right) \right]^2\end{aligned}$$

## Lineárně polarizované módy ve vláknu se skokovou změnou indexu lomu

Přibližné řešení vycházející z předpokladu  $n_1 - n_2 \ll n_1$

$$E_x = 0$$

$$E_y = \begin{cases} A J_l(hr) e^{i l \varphi + i \omega t - \gamma z} & r \leq a \\ B K_l(qr) e^{i l \varphi + i \omega t - \gamma z} & r \geq a \end{cases}$$

Maxwellovy rovnice říkají:

$$\begin{aligned} \gamma E_y + E_{z,y} &= i\omega B_x & \gamma B_y + B_{z,y} &= 0 \\ E_{z,x} &= -i\omega B_y & B_{z,x} + \gamma B_x &= i \frac{\omega n^2}{c^2} E_y \\ E_{y,x} &= i\omega B_z & B_{x,y} - B_{y,x} &= i \frac{\omega n^2}{c^2} E_z \end{aligned}$$

Protože  $V$  je malé ( $n_1 - n_2 \ll n_1$ ), je  $\beta \gg h, q$  a  $E_z \ll E_y$ . Členy  $E_{z,y}$  a  $E_{z,x}$  se proto dají zanedbat, což vede k  $B_y \approx 0$ .

Využije se

$$J'_l = \frac{1}{2} (J_{l-1} - J_{l+1}) \quad K'_l = -\frac{1}{2} (K_{l-1} + K_{l+1})$$

Řešení:

$r \leq a$	$r \geq a$
$E_x = 0$	$E_x = 0$
$E_y = A J_l(hr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)}$	$E_y = B K_l(qr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)}$
$E_z = \frac{hA}{2\beta} [J_{l+1}(hr) e^{i(l+1)\varphi} +$ $+ J_{l-1}(hr) e^{i(l-1)\varphi}] e^{i(\omega t - \beta z)}$	$E_z = \frac{qB}{2\beta} [K_{l+1}(qr) e^{i(l+1)\varphi} -$ $- K_{l-1}(qr) e^{i(l-1)\varphi}] e^{i(\omega t - \beta z)}$
$B_x = -\frac{A\beta}{\omega} J_l(hr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)}$	$B_x = -\frac{B\beta}{\omega} K_l(qr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)}$
$B_y \approx 0$	$B_y \approx 0$
$B_z = -\frac{i h A}{2\omega} [J_{l+1}(hr) e^{i(l+1)\varphi} -$ $- J_{l-1}(hr) e^{i(l-1)\varphi}] e^{i(\omega t - \beta z)}$	$B_z = -\frac{i q B}{2\omega} [K_{l+1}(qr) e^{i(l+1)\varphi} +$ $+ K_{l-1}(qr) e^{i(l-1)\varphi}] e^{i(\omega t - \beta z)}$