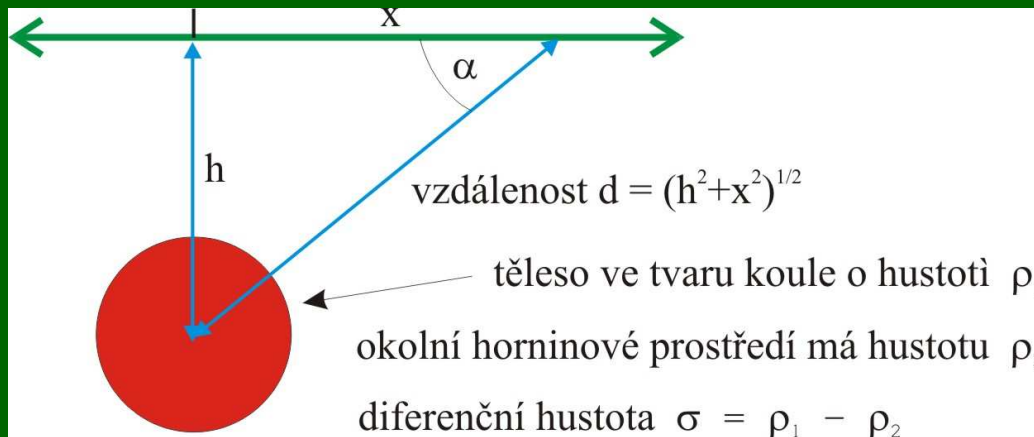


1. Přímá úloha v gravimetrii

Zadání: Vypočtete tíhový účinek koule podle vzorce pro vertikální složku pro hodnoty x z intervalu $(-2500\text{m}, 2500\text{m})$. Výsledek vyneste do grafu s lineární x -ovou a logaritmickou y -ovou osou.

hloubka středu koule	$h = 500 \text{ m}$
poloměr koule	$R = 150 \text{ m}$
diferenční hustota	$\sigma = 500 \text{ kg/m}^{-3}$



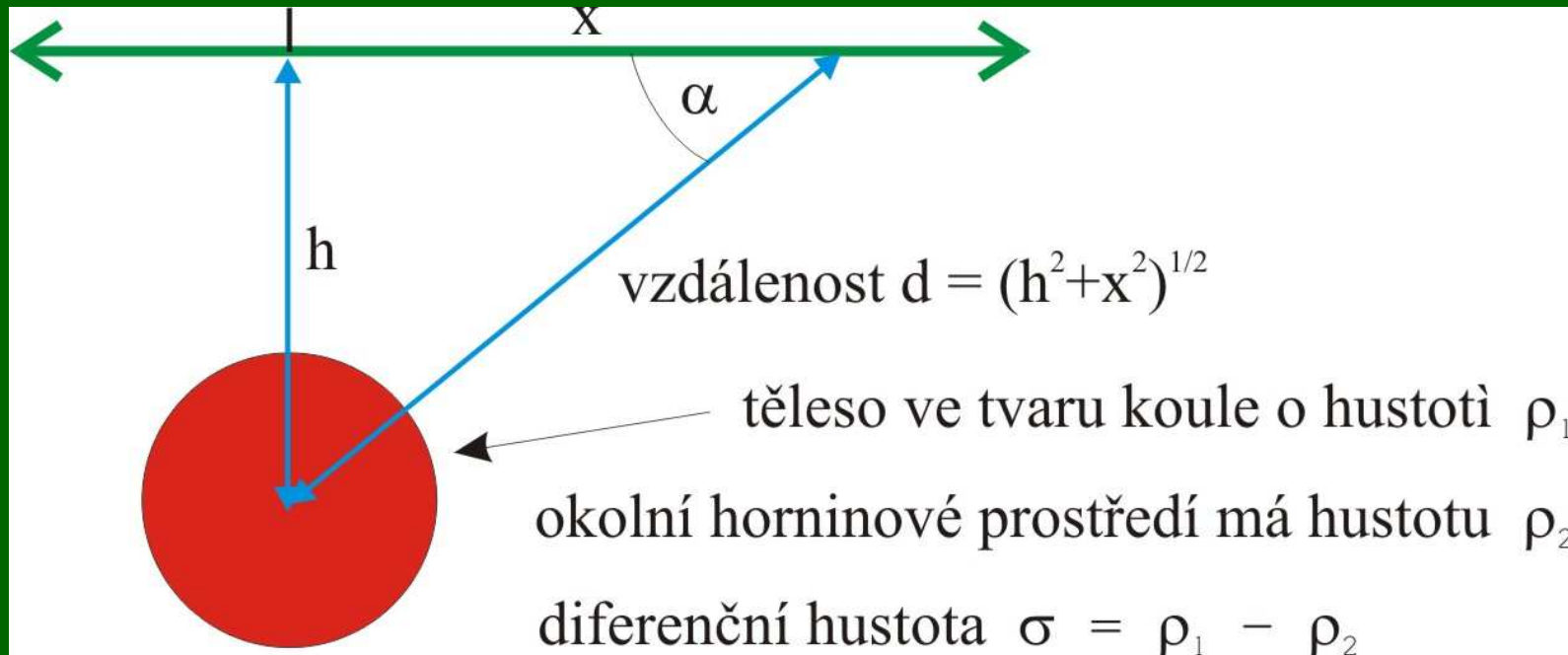
1. Přímá úloha v gravimetrii

Pro gravitační zrychlení g obecně platí:

$$g = \frac{\kappa M}{d^2}$$

Vzdálenost je ale:

$$d = \sqrt{x^2 + h^2}$$



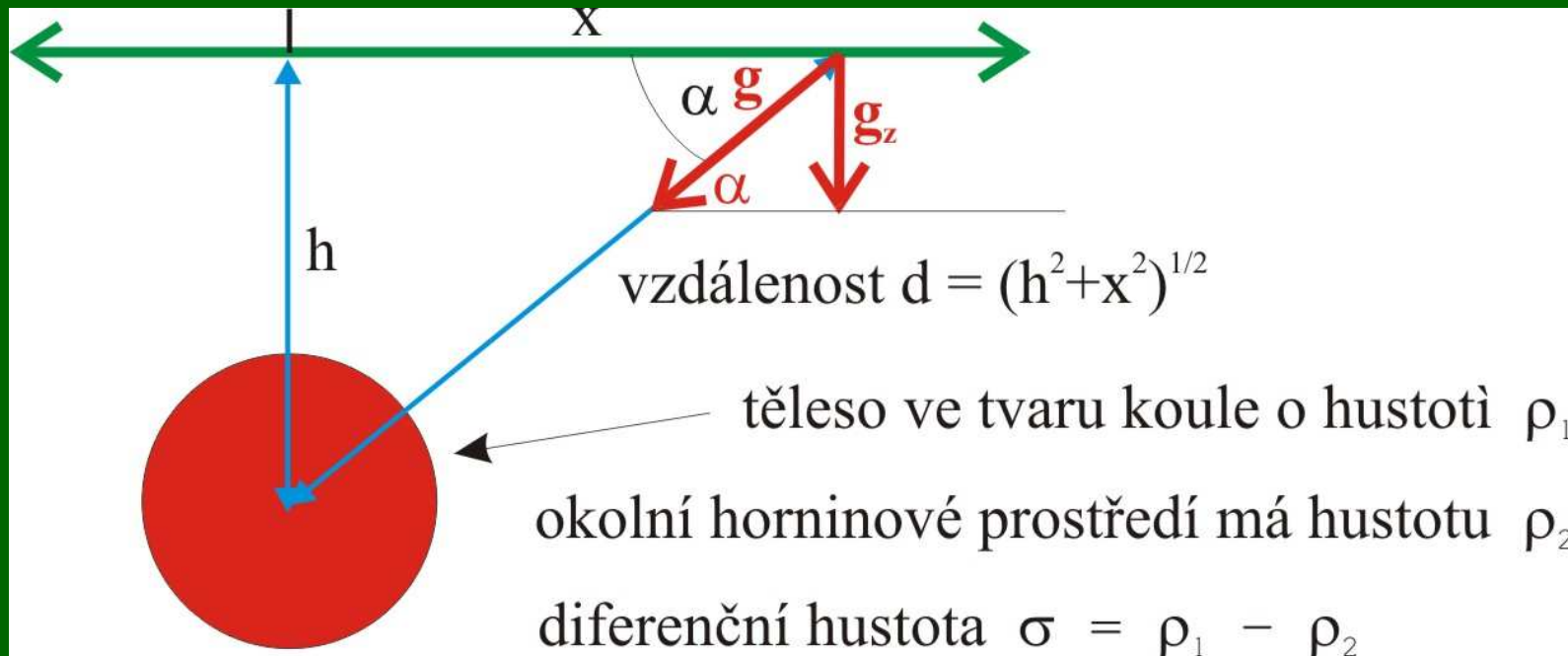
1. Přímá úloha v gravimetrii

Gravitační zrychlení tedy je dáno:

$$g = \frac{kM}{x^2 + h^2}$$

Podle zadání nás ale zajímá pouze vertikální složka gravitačního zrychlení g_z :

$$g_z = g \sin \alpha$$



1. Přímá úloha v gravimetrii

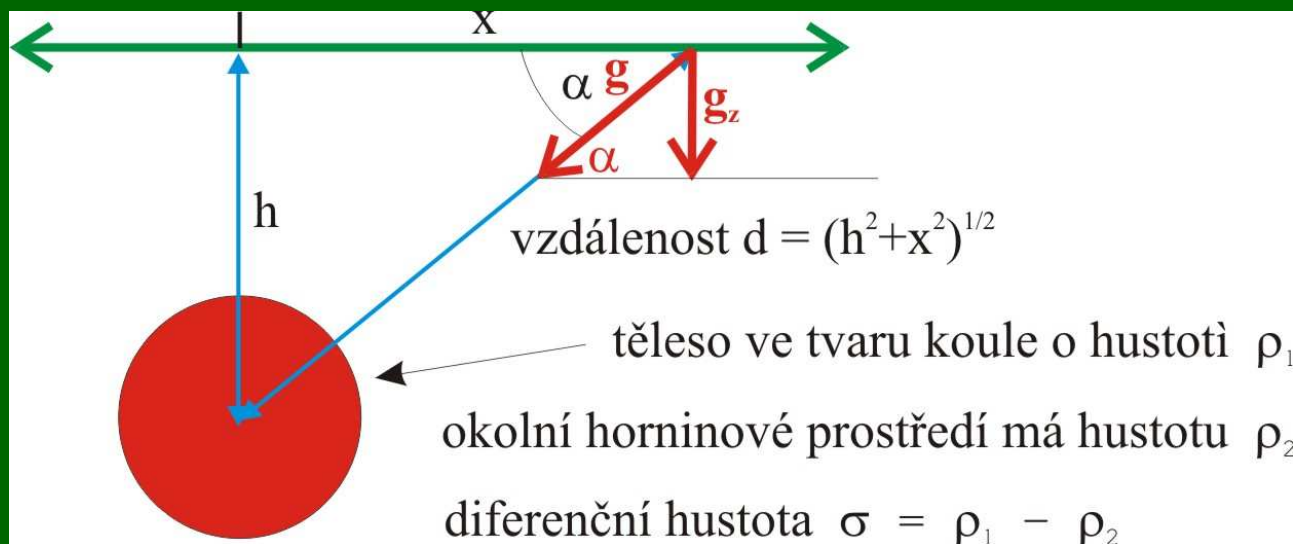
Gravitační zrychlení tedy je dáno:

$$g = \frac{\kappa M}{x^2 + h^2}$$

Podle zadání nás ale zajímá pouze vertikální složka gravitačního zrychlení g_z :

$$g_z = g \sin \alpha$$

Současně ale vidíme, že $\sin \alpha$ si můžeme vyjádřit jako:



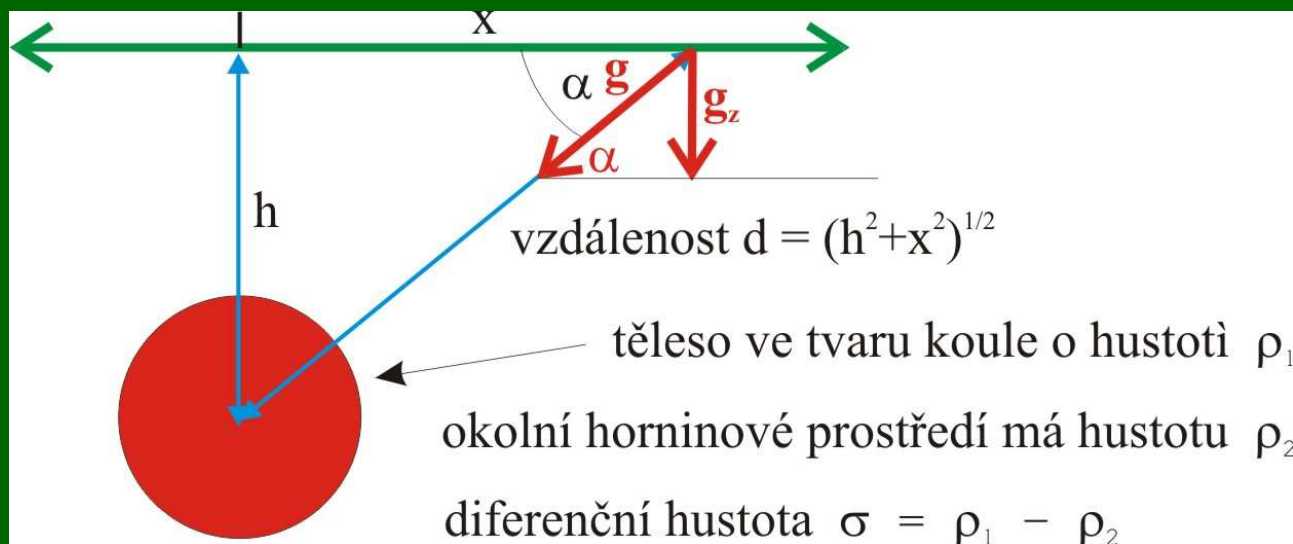
$$\sin \alpha = \frac{h}{d}$$

$$d = \sqrt{x^2 + h^2}$$

1. Přímá úloha v gravimetrii

Tedy:

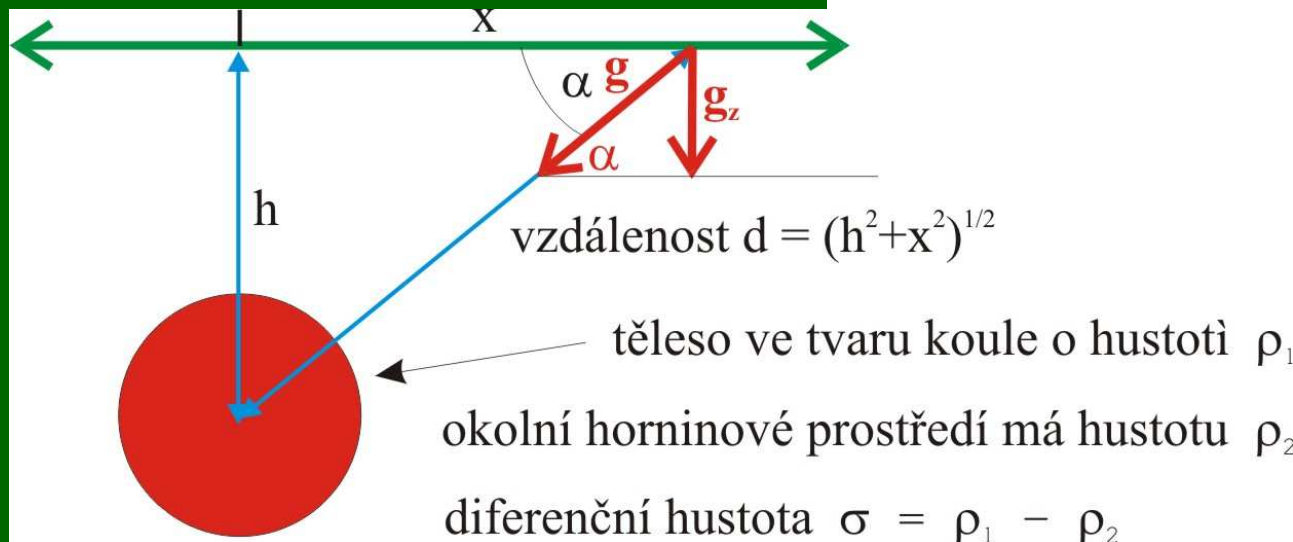
$$g_z = g \sin \alpha = \frac{\kappa M}{x^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{\kappa M h}{\sqrt{(x^2 + h^2)^3}}$$



1. Přímá úloha v gravimetrii

Hmotnost M je v našem případě nutno chápat nikoli jako celou hmotnost koule, ale jako diferenční hmotnost (oč je hmotnost odlišná od hmotnosti okolního prostředí o stejném objemu). M tedy závisí na objemu a na diferenční hustotě σ :

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \sigma$$



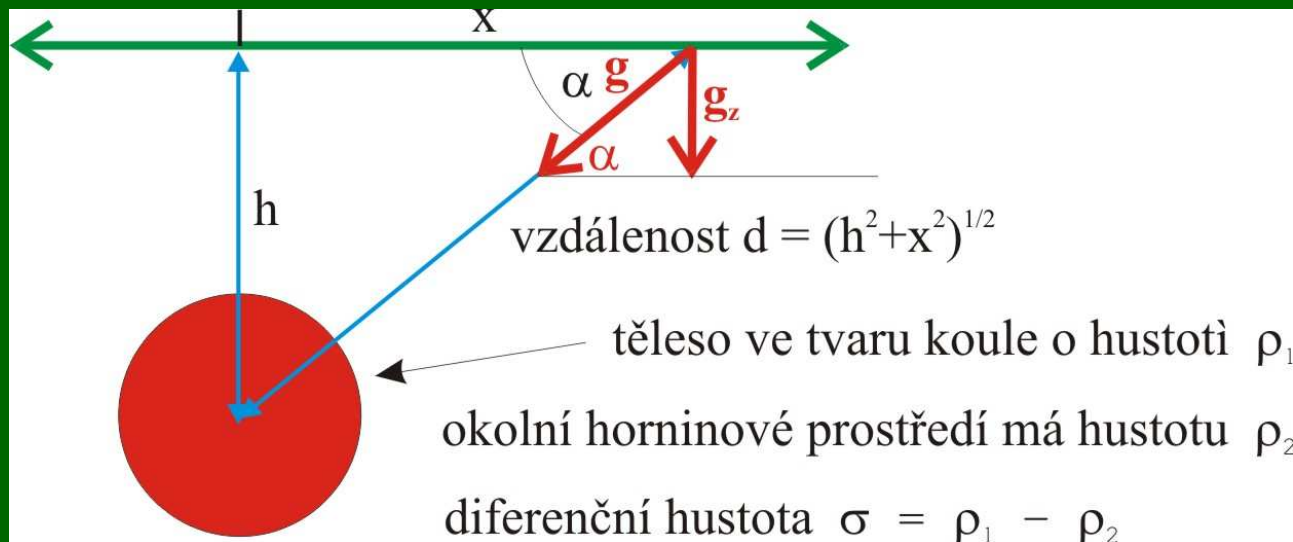
1. Přímá úloha v gravimetrii

Hmotnost M je v našem případě tedy:

$$M = \frac{4}{3} \pi 150^3 \cdot 500 = 7,068,583,471 \text{ kg}$$

Vertikální složka g je po dosazení:

$$g_z = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,068583471 \cdot 500}{\sqrt{(x^2 + 500^2)^3}} = \frac{235,737259}{\sqrt{(x^2 + 500^2)^3}} \text{ m.s}^{-2}$$



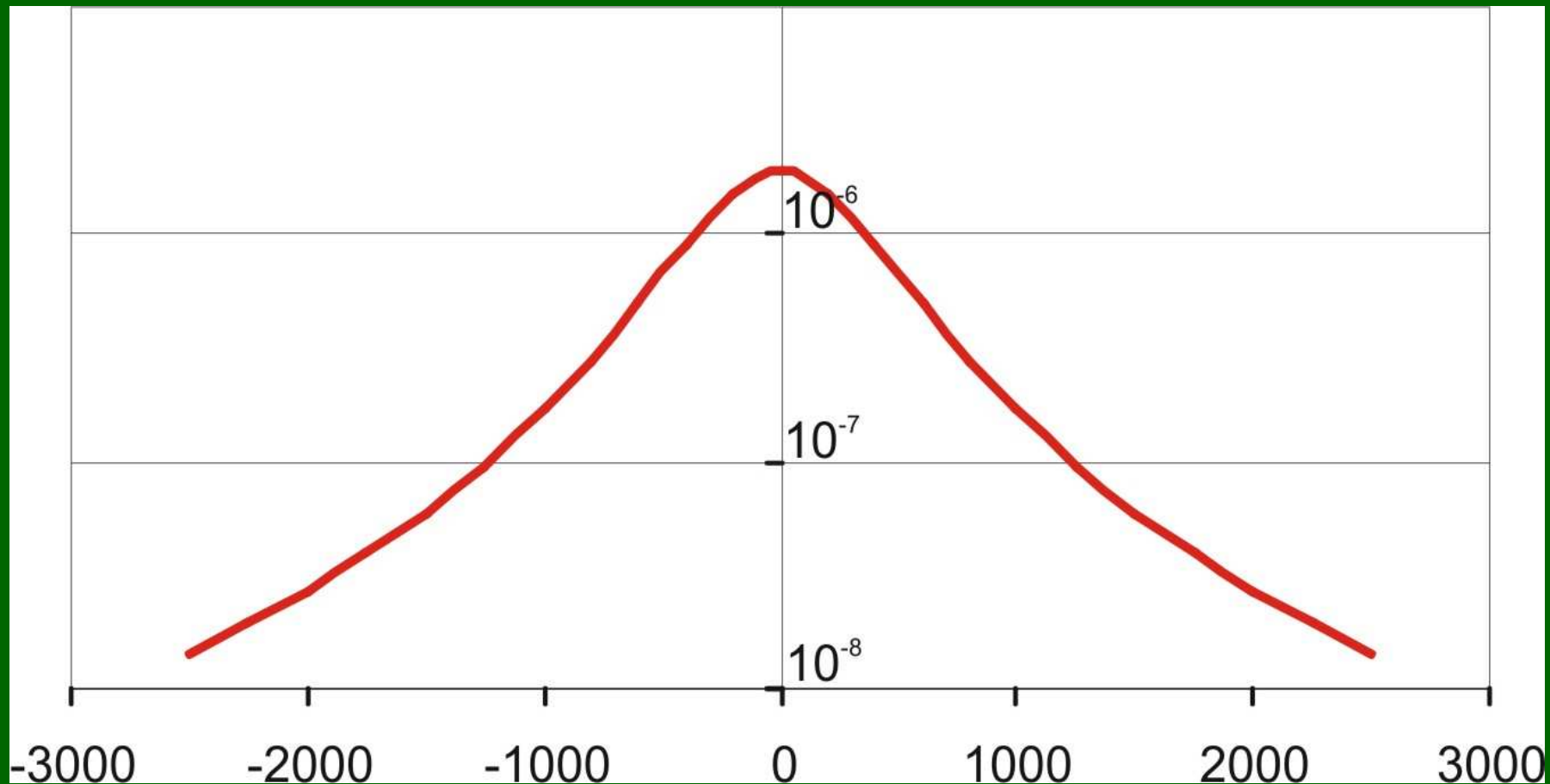
1. Přímá úloha v gravimetrii

Po dosazení za x (vzdálenost na profilu od bodu 0) můžeme doplnit tabulku hodnot vertikální složky gravitačního zrychlení v jednotlivých bodech profilu:

x [m]	V_z [m/s ²]	x [m]	V_z [m/s ²]
-2500	$1,42252 \cdot 10^{-8}$	200	$1,50949 \cdot 10^{-6}$
-2250	$1,92522 \cdot 10^{-8}$	400	$8,97951 \cdot 10^{-7}$
-2000	$2,69057 \cdot 10^{-8}$	600	$4,94804 \cdot 10^{-7}$
-1750	$3,91016 \cdot 10^{-8}$	800	$2,80765 \cdot 10^{-7}$
-1500	$5,96373 \cdot 10^{-8}$	1000	$1,6868 \cdot 10^{-7}$
-1250	$9,66076 \cdot 10^{-8}$	1250	$9,66076 \cdot 10^{-8}$
-1000	$1,6868 \cdot 10^{-7}$	1500	$5,96373 \cdot 10^{-8}$
-800	$2,80765 \cdot 10^{-7}$	1750	$3,91016 \cdot 10^{-8}$
-600	$4,94804 \cdot 10^{-7}$	2000	$2,69057 \cdot 10^{-8}$
-400	$8,97951 \cdot 10^{-7}$	2250	$1,92522 \cdot 10^{-8}$
-200	$1,50949 \cdot 10^{-6}$	2500	$1,42252 \cdot 10^{-8}$
0	$1,8859 \cdot 10^{-6}$		

1. Přímá úloha v gravimetrii

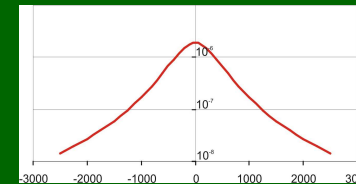
Vypočtené hodnoty pak vyneseme do grafu:



1. Přímá úloha v gravimetrii

Při vynášení do grafu s logaritmickou škálou je zapotřebí vyvarovat se některých chyb, mezi nejčastější patří:

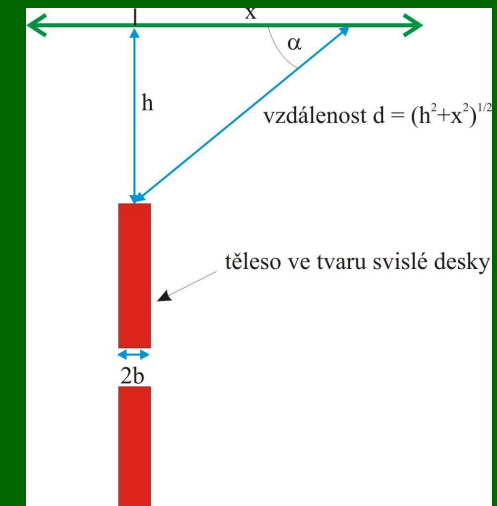
- Špatná volba minimální a maximální hodnoty zobrazené na ose s logaritmickou škálou – obě meze je nutno určit s ohledem na zobrazované hodnoty
- Zkombinování logaritmické a lineární škály (nelze rozdělit y-ovou osu na úseky podle logaritmické škály a v rámci úseků vynášet lineárně – vede to k zásadnímu zkreslení grafu)



2. Úloha z magnetometrie

Zadání: Na severojižním profilu byla zjištěna magnetická anomálie ΔT vyvolaná tenkou deskou. **Určete hloubku horního okraje této desky ze vztahu:**

$$h = (x_{\min} - x_{\max}) \frac{\sin 2I_n}{2}$$



x_{\min} ... x-ová souřadnice minima křivky $\Delta T(x)$

x_{\max} ... x-ová souřadnice maxima křivky $\Delta T(x)$

I_n ... inklinace normálního magnetického pole

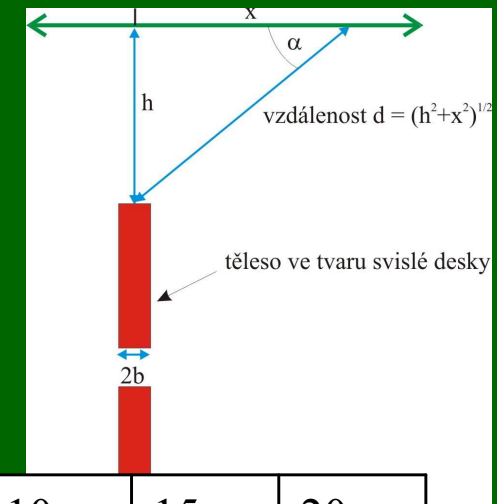
h ... hloubka horního okraje desky

x ... souřadnice na profilu, kladná osa je orientovaná k severu

2. Úloha z magnetometrie

Zadání: Na severojižním profilu byla zjištěna magnetická anomálie ΔT vyvolaná tenkou deskou. **Určete hloubku horního okraje této desky ze vztahu:**

$$h = (x_{\min} - x_{\max}) \frac{\sin 2I_n}{2}$$



x	0	1	2	3	4	5	6	7	10	15	20
ΔT	1.62	0.31	-0.84	-1.67	-2.18	-2.43	-2.53	-2.52	-2.27	-1.78	-1.43
x		-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-10	-15	-20
ΔT		2.80	3.63	4.05	4.15	4.05	3.85	3.61	2.92	2.11	1.62

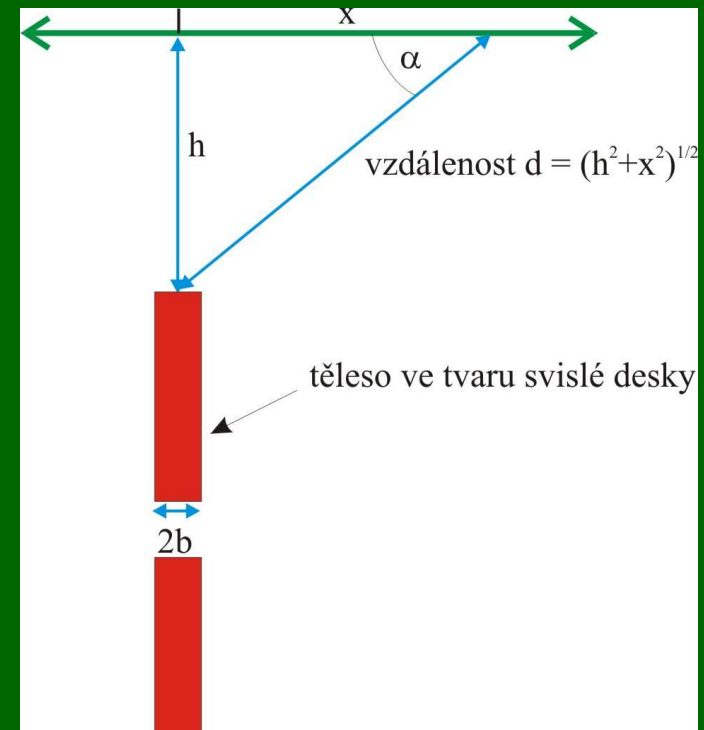
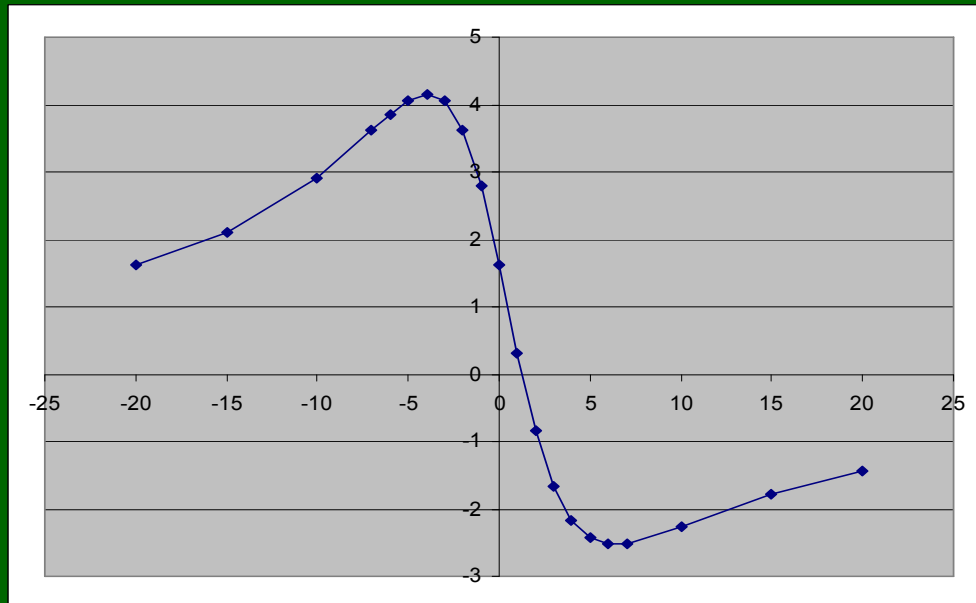
$$I_n = 52^\circ$$

2. Úloha z magnetometrie

Postup:

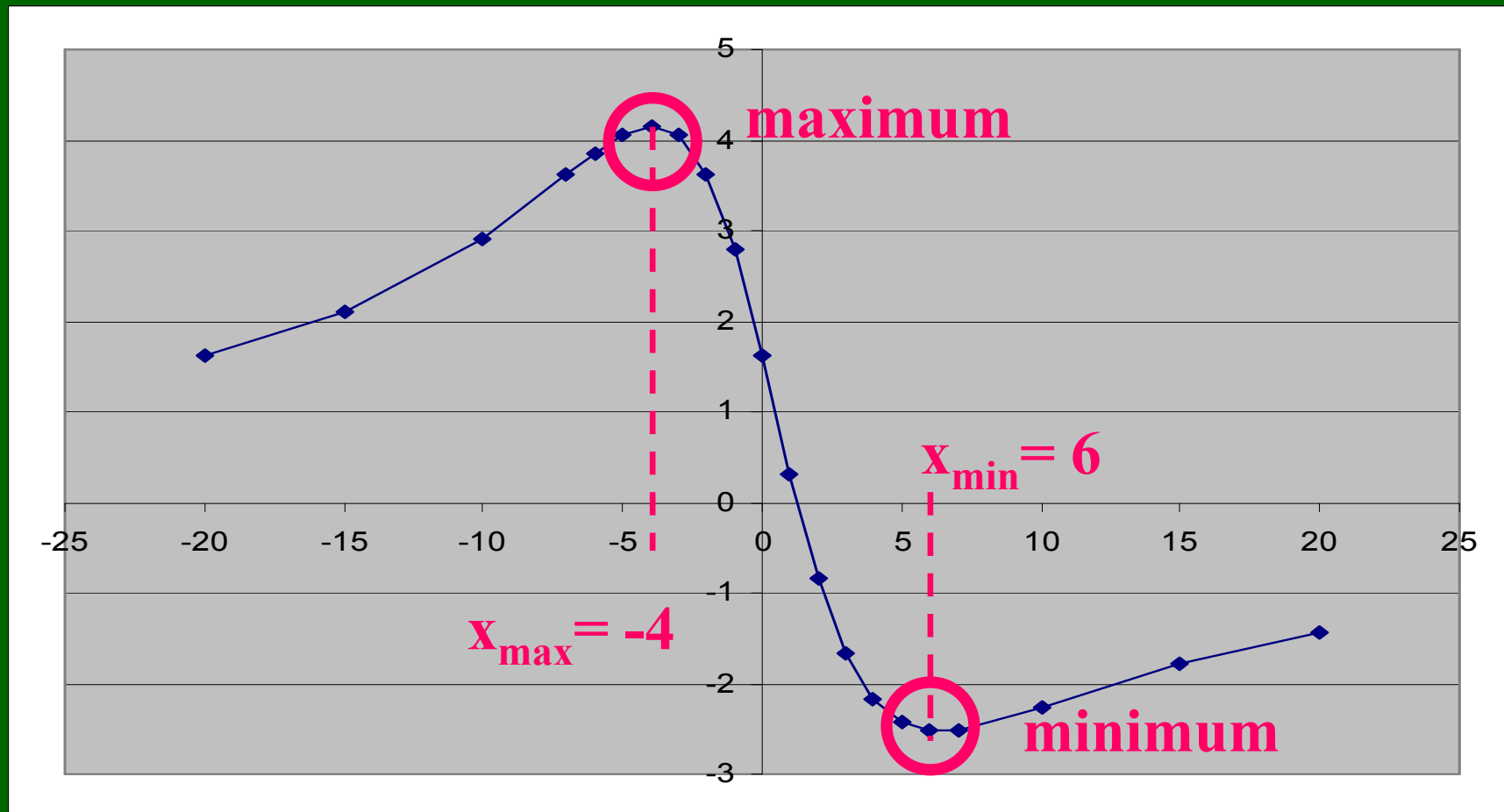
Vyneseme hodnoty z tabulky do grafu. Tyto hodnoty vychází ze vztahu pro magnetickou anomálii ΔT vyvolanou tenkou svislou deskou, který je v případě severojižního profilu:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$



2. Úloha z magnetometrie

V grafu pak nalezneme maximum a minimum funkce ΔT a odečteme x-ové souřadnice těchto bodů.



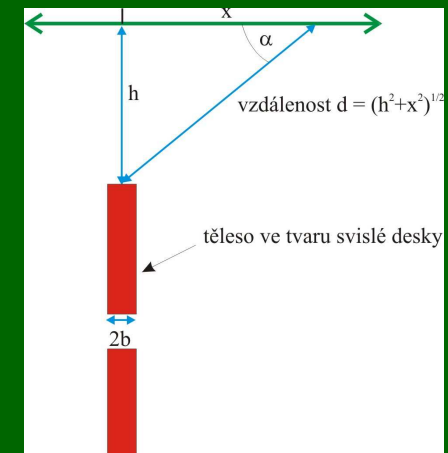
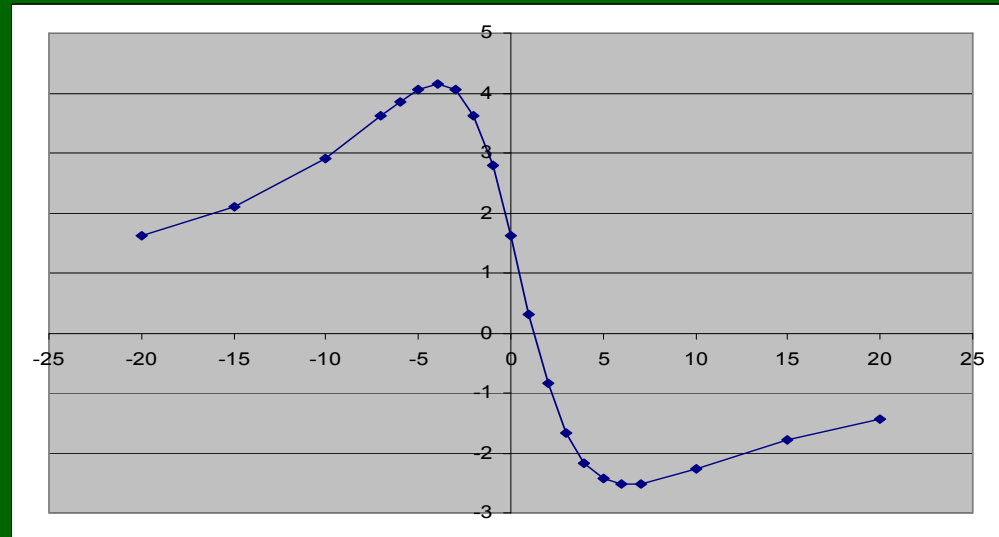
2. Úloha z magnetometrie

Odečtené souřadnice pak dosadíme do vzorce:

$$h = (x_{\min} - x_{\max}) \frac{\sin 2I_n}{2}$$

$$h = (6 - -4) \frac{\sin 104^\circ}{2}$$

$$h = (10) * 0.485 = 4.85 \cong 5 \text{metrů}$$



2. Úloha z magnetometrie

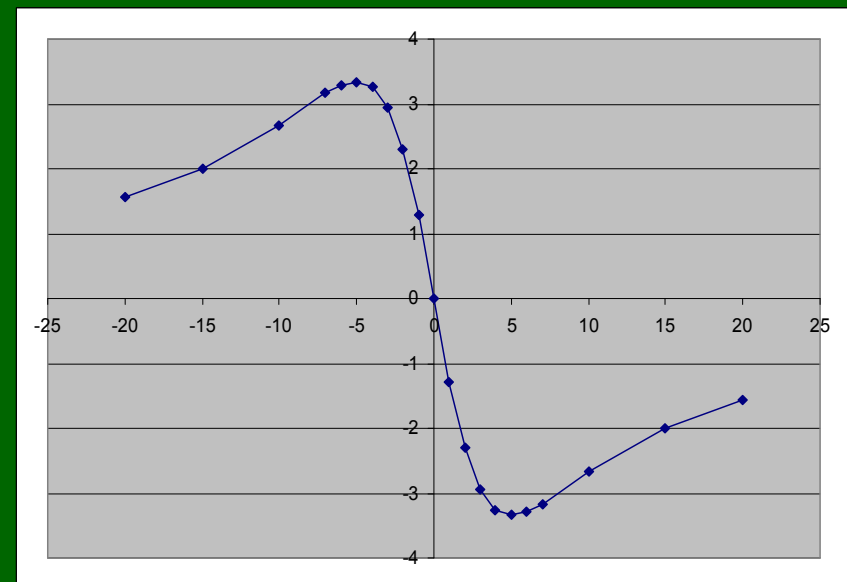
Všimněme si, že pro případy, kdy je hodnota inklinace I_n rovna 45° , přechází vztahy použité v tomto úkolu do jednodušších vztahů a graf funkce ΔT je středově symetrický:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(90^\circ) + x \sin(90^\circ)) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} x$$

$$h = (x_{\min} - x_{\max}) \frac{\sin 2I_n}{2}$$

$$h = (x_{\min} - x_{\max}) \frac{\sin 90^\circ}{2} = \frac{(x_{\min} - x_{\max})}{2}$$

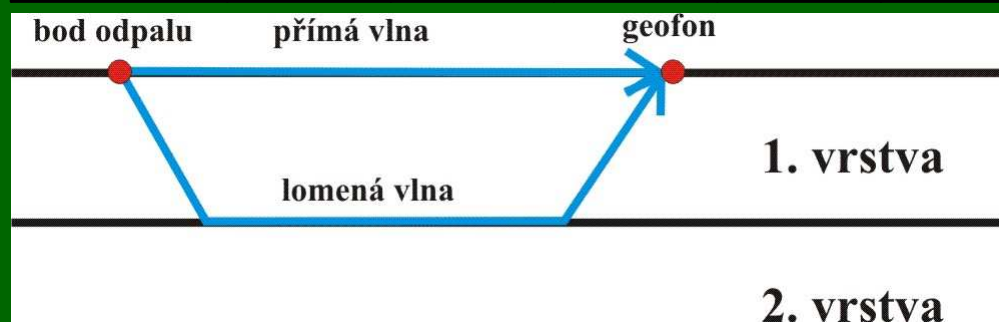


3. Úloha z refrakční seismiky

Zadání: Pro určení parametrů zvětralé vrstvy byla využita mělká varianta refrakční seismiky. V místě měření byl proveden odpal nálože z mělkého vývrtnu. Vybuzený signál byl registrován geofony umístěnými na profilu ve vzdálenostech uvedených v tabulce.

Na pořizeném seismickém záznamu pak byly odečteny časy prvního nasazení přímé vlny.

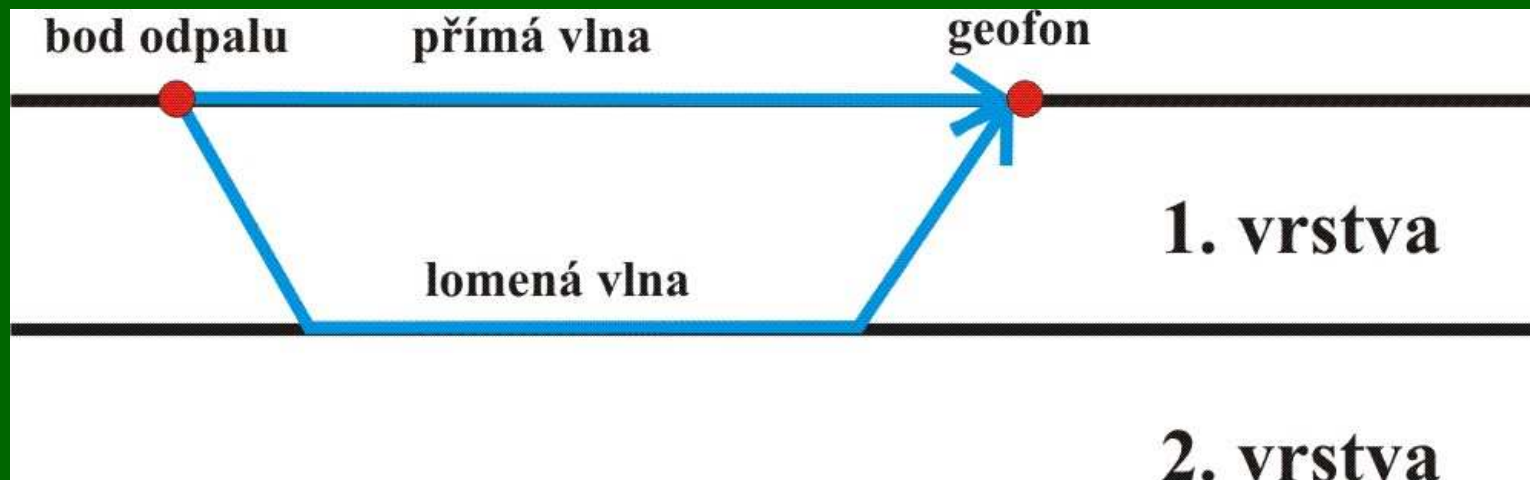
x [m]	2	5	10	15	20	25	40	80	120	150
t [ms]	3.3	8.3	16.7	25.0	33.3	41.7	51.8	71.8	91.8	106.8



3. Úloha z refrakční seismiky

Zadání: Určete mocnost první vrstvy.

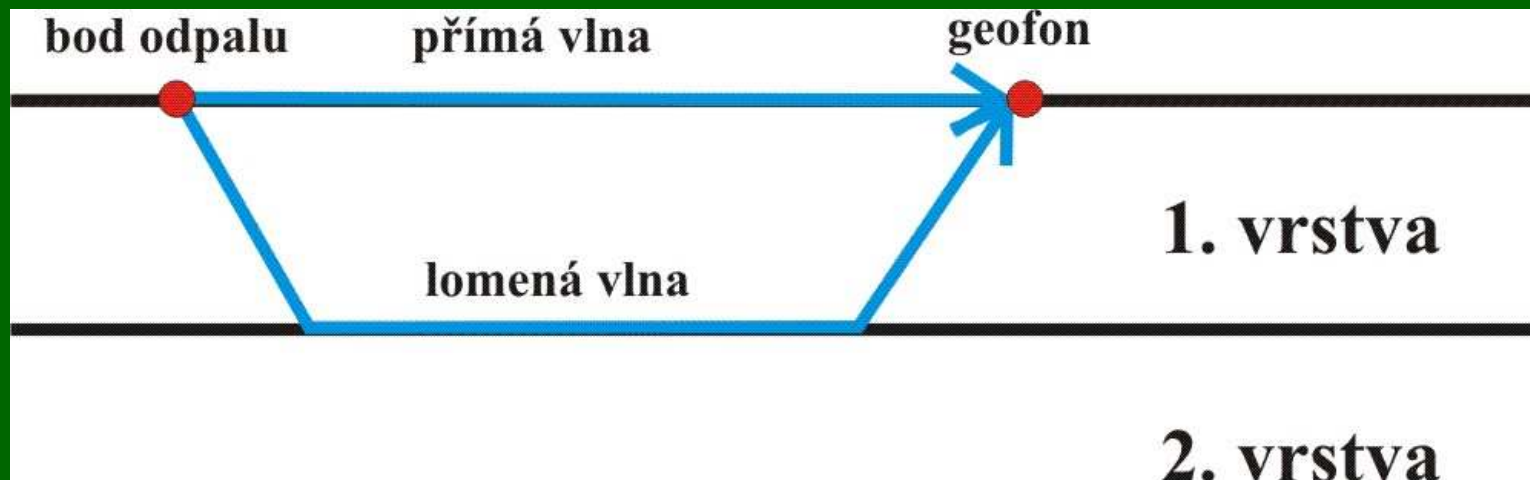
x [m]	2	5	10	15	20	25	40	80	120	150
t [ms]	3.3	8.3	16.7	25.0	33.3	41.7	51.8	71.8	91.8	106.8



3. Úloha z refrakční seismiky

Postup: Vyneste do grafu hodochronu prvního nasazení. Naměřenými hodnotami proložte přímkové úseky hodochrony přímé vlny a hodochron lomených vln.

x [m]	2	5	10	15	20	25	40	80	120	150
t [ms]	3.3	8.3	16.7	25.0	33.3	41.7	51.8	71.8	91.8	106.8

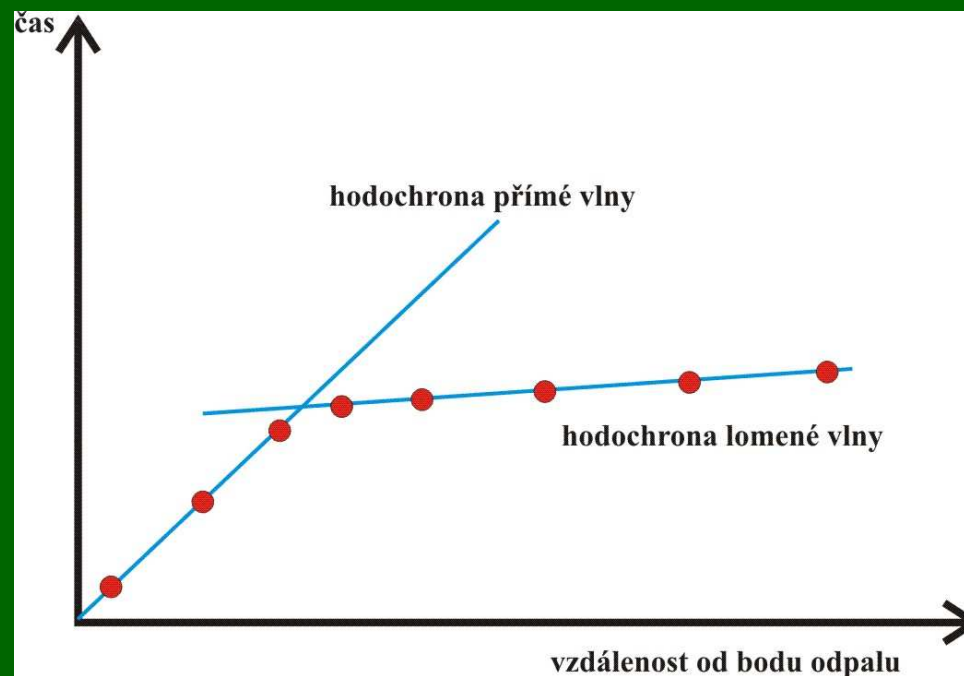
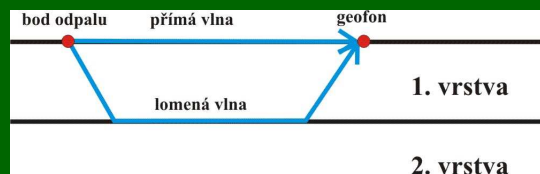


3. Úloha z refrakční seismiky

Hodochrona je křivka popisující závislost mezi časem detekce a vzdáleností od hypocentra. V homogenním prostředí je tato závislost přímková:

$$t = \frac{d}{v}$$

t ... čas detekce
d ... dráha
v ... rychlost

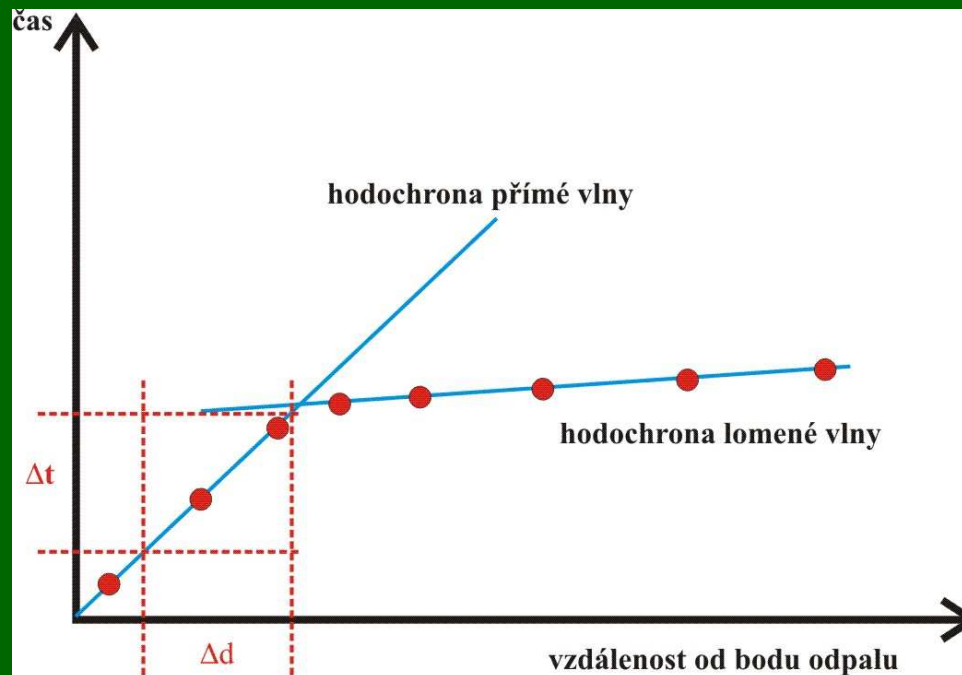
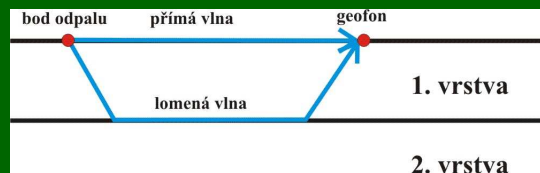


3. Úloha z refrakční seismiky

Z přímkových závislostí pak snadno můžeme odvodit rychlost:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

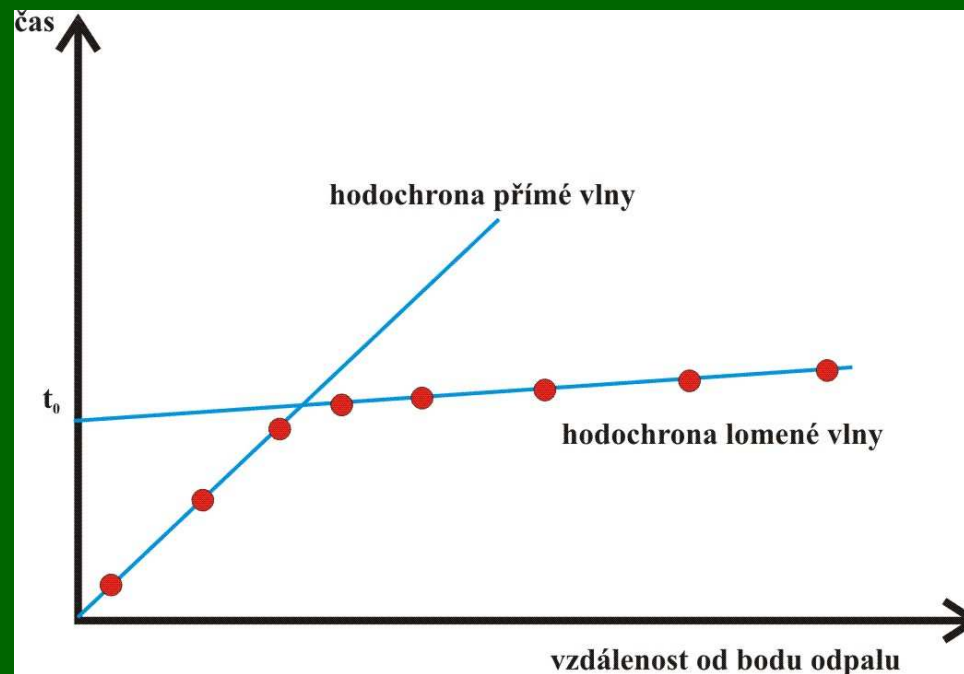
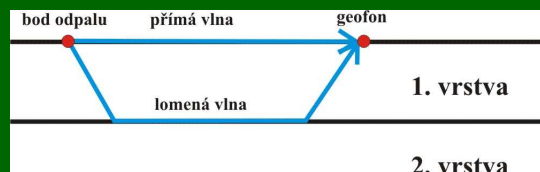
t ... čas detekce
d ... dráha
v ... rychlost



3. Úloha z refrakční seismiky

Pro odvození mocnosti první vrstvy h potřebujeme znát kritický úhel i a souřadnici t_0 udávající bod, v němž přímková hodochrona lomené vlny teoreticky protíná svislou souřadnou osu.

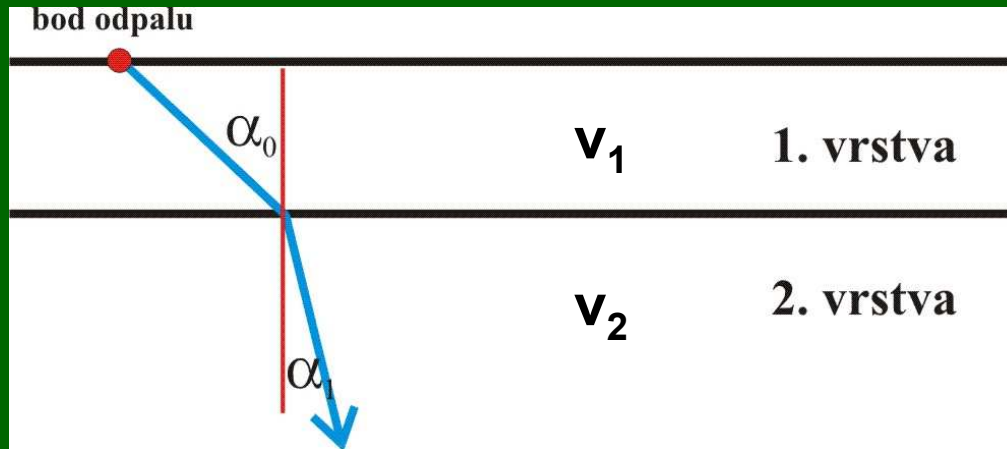
$$h = \frac{t_0 \cdot v_1}{2 \cos(i)}$$



3. Úloha z refrakční seismiky

Kritický úhel odvodíme ze Snellova vztahu:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$$



**Willebrord van Roijen
Snell**

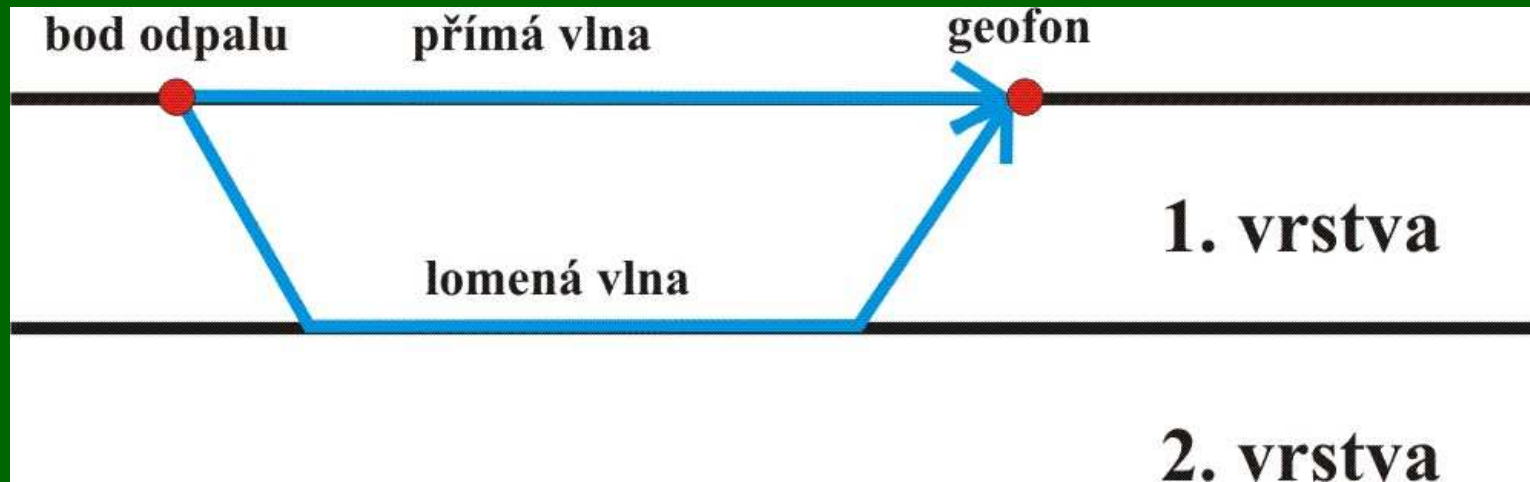
(1580-1626)

3. Úloha z refrakční seismiky

Kritický úhel odvodíme ze Snellova vztahu:

$$\frac{\sin \alpha_1}{V_1} = \frac{\sin 90^\circ}{V_2} = \frac{1}{V_2}$$

$$\sin(i) = \frac{V_1}{V_2}$$



3. Úloha z refrakční seismiky

Z rychlostí seismických vln získáme tedy sinus úhlu i :

$$\sin(i) = \frac{V_1}{V_2}$$

Pro další výpočet však potřebujeme jeho cosinus:

$$h = \frac{t_0 \cdot V_1}{2 \cos(i)}$$

Bud' si tedy musíme úhel i vyjádřit pomocí funkce arcsin, nebo si jeho cosinus odvodíme ze vztahu:

$$\sin^2(i) + \cos^2(i) = 1 \Rightarrow \cos(i) = \sqrt{1 - \sin^2(i)}$$

3. Úloha z refrakční seismiky

Pak snadno dosadíme konkrétní hodnoty do vztahu:

$$h = \frac{t_0 \cdot v_1}{2 \cos(i)}$$

(např. odvodíme-li z grafu rychlosti $v_1=650\text{ms}^{-1}$, $v_2=2000\text{ms}^{-1}$, pak nám vyjde kritický úhel přibližně 19° . Odečteme-li dále hodnotu t_0 jako 29 milisekund, dosadíme do vzorce:

$$h = \frac{t_0 \cdot v_1}{2 \cos(i)} = \frac{0,029 \cdot 650}{2 \cos 19^\circ} \cong \frac{18,85}{1,891} \cong 10 \text{metrů}$$

4. Úloha z radiometrie

Zadání: Uran ${}_{92}^{235}\text{U}$ se rozpadá na thorium ${}_{90}^{231}\text{Th}$ s poločasem rozpadu $T=7 \cdot 10^8$ let.

Sestrojte graf vyjadřující úbytek atomů uranu v čase (tj. graf N_t/N_0 ku času t), délku osy pro čas t volte blízkou pětinasobku poločasu rozpadu.

Vypočítejte dobu, za kterou se rozpadne 75% atomů uranu. Výpočet zkontrolujte v grafu.

4. Úloha z radiometrie

Mezi počátečním počtem atomů uranu N_0 a počtem zbývajících atomů N_t v čase t platí vztah:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$$

kde λ je rozpadová konstanta prvku, která souvisí s poločasem rozpadu T podle vztahu:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

4. Úloha z radiometrie

Máme sestrojít graf vyjadřující úbytek atomů uranu v čase (tj. graf N_t/N_0 ku času t), vyjádříme si tedy vztah pro poměr N_t/N_0 :

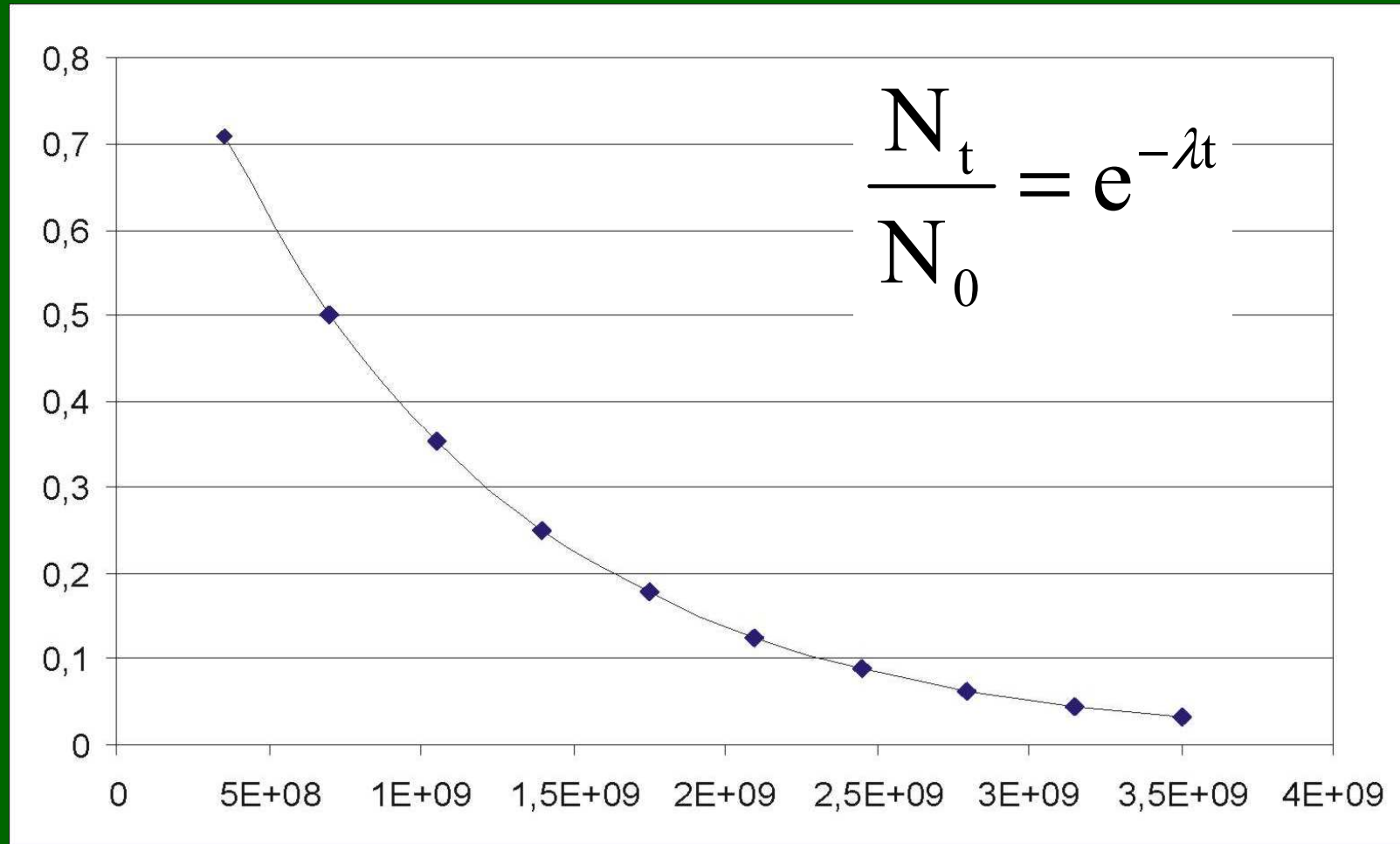
$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

Vypočteme hodnoty poměru N_t/N_0 pro vhodně zvolené časy t tak, abychom mohli sestrojít požadovaný graf (krok na časové ose tedy volíme s ohledem na velikost poločasu rozpadu).

4. Úloha z radiometrie

Pak sestrojíme graf:



4. Úloha z radiometrie

Dále máme vypočítat dobu, za kterou se rozpadne 75% atomů uranu – tj. máme vypočítat dobu, za kterou v systému zůstane zachováno 25% původních atomů uranu (totiž 100% - 75%). Předpokládáme-li, že v čase $t=0$ je v systému množství atomů odpovídající 100% (tj. $N_0=100\%$), pak v hledaném čase $t=x$, zůstane jen 25% původního množství atomů (tj. $N_t=25\%$) a vzájemný poměr N_t/N_0 je pak roven 25%/100%, což je 0.25. Dosazením do vztahu pro závislost poměru N_t/N_0 na čase tak získáme vztah, ve kterém bude jedinou neznámou čas t .

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N_t}{N_0} = (1 - 0.75) = 0.25 = e^{-\lambda t}$$

4. Úloha z radiometrie

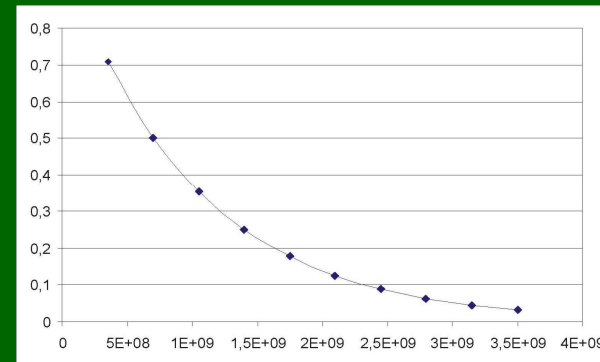
Získanou rovnicí o jedné neznámé pak snadno vyřešíme.

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N_t}{N_0} = (1 - 0.75) = 0.25 = e^{-\lambda t}$$

$$0.25 = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow \ln(0.25) = -\lambda t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0.25)}{-\lambda}$$

$$t = 1,4 \cdot 10^9 \text{ let}$$



4. Úloha z radiometrie

V grafu pak zkontrolujeme, zda poměr N_t/N_0 odpovídající hodnotě 0.25 je skutečně dosažen při $t=1,4 \cdot 10^9$ let:

$$0.25 = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow \ln(0.25) = -\lambda t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0.25)}{-\lambda}$$

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

