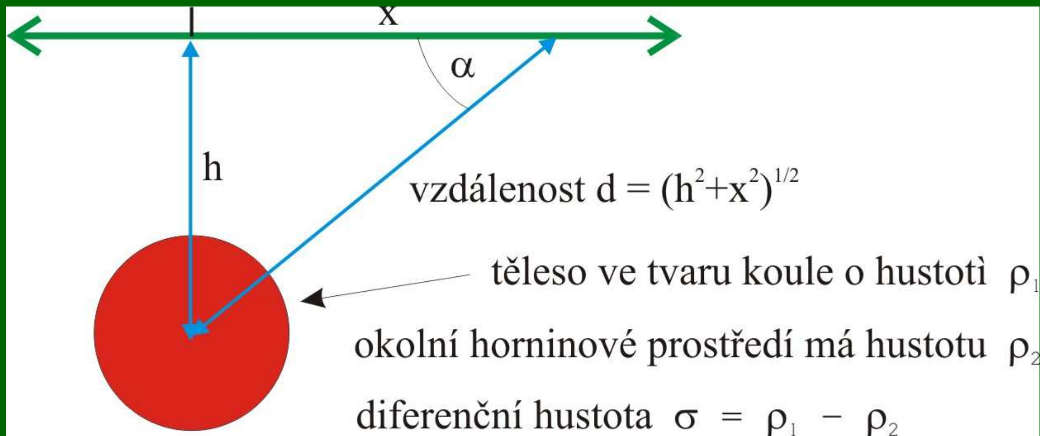
1. Přímá úloha v gravimetrii

Zadání: Vypočtěte tíhový účinek koule podle vzorce pro vertikální složku pro hodnoty x z intervalu (-2500m, 2500m). Výsledek vyneste do grafu s lineární x-ovou a logaritmickou y-ovou osou.

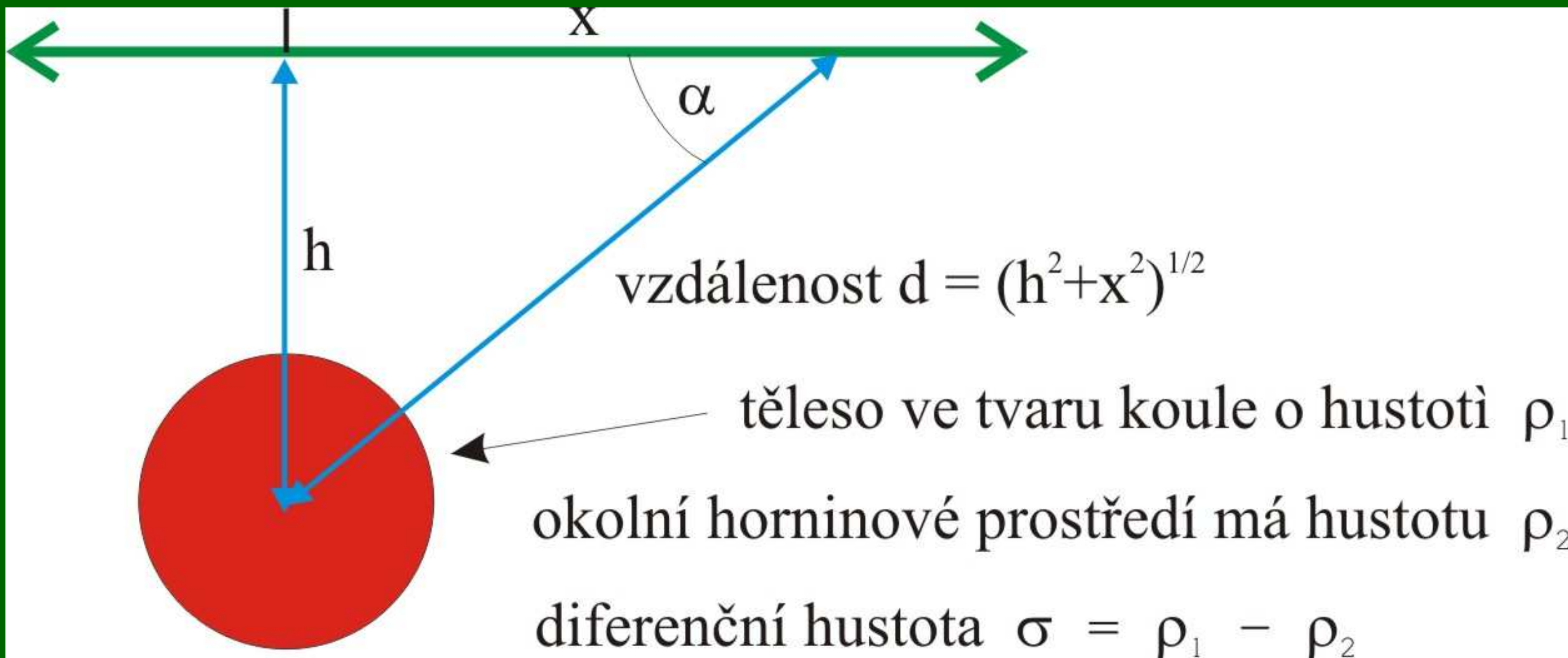
hloubka středu koule	$h = 500$ m
poloměr koule	$R = 150$ m
diferenční hustota	$\sigma = 500$ kg/m^{-3}



1. Přímá úloha v gravimetrii

Pro gravitační zrychlení g obecně platí: $$g = \frac{\kappa M}{d^2}$$

Vzdálenost je ale: $$d = \sqrt{x^2 + h^2}$$



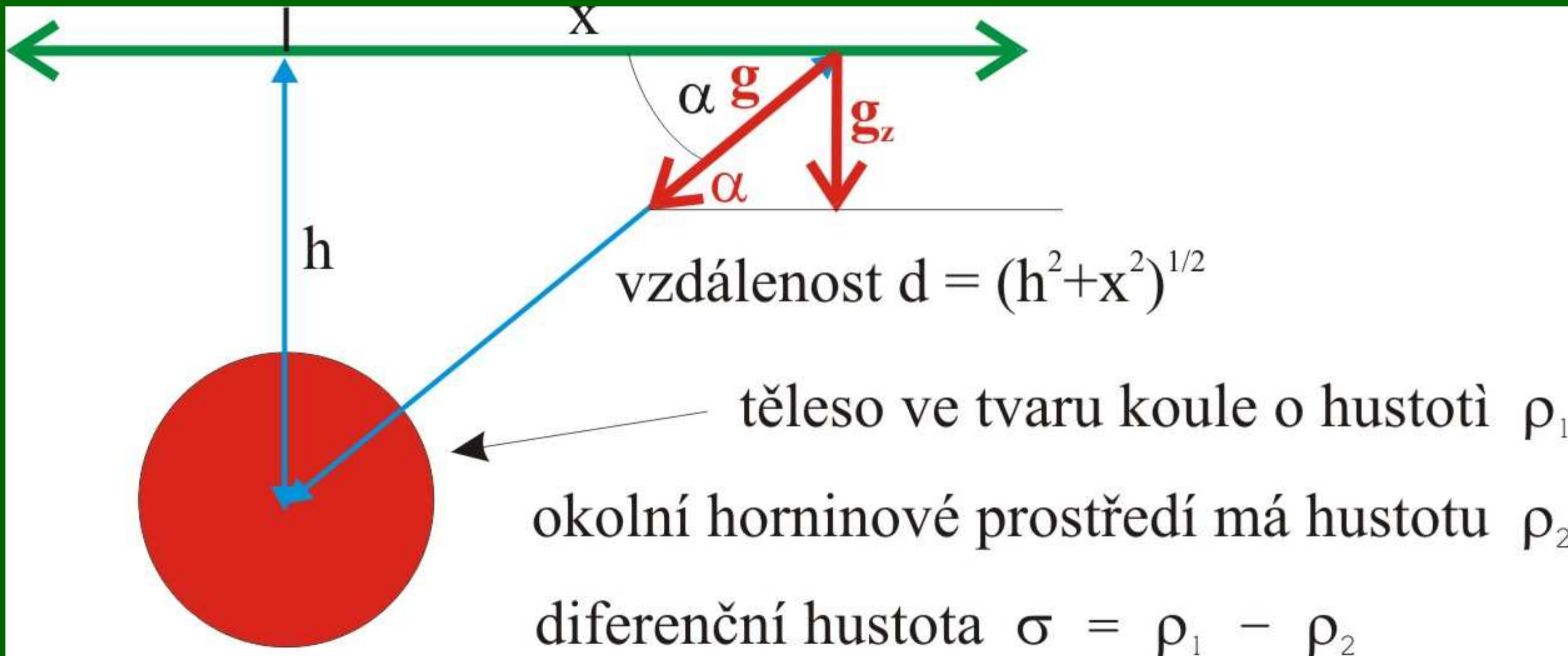
1. Přímá úloha v gravimetrii

Gravitační zrychlení tedy je dáno:

$$g = \frac{\kappa M}{x^2 + h^2}$$

Podle zadání nás ale zajímá pouze vertikální složka gravitačního zrychlení g_z:

$$g_z = g \sin \alpha$$



1. Přímá úloha v gravimetrii

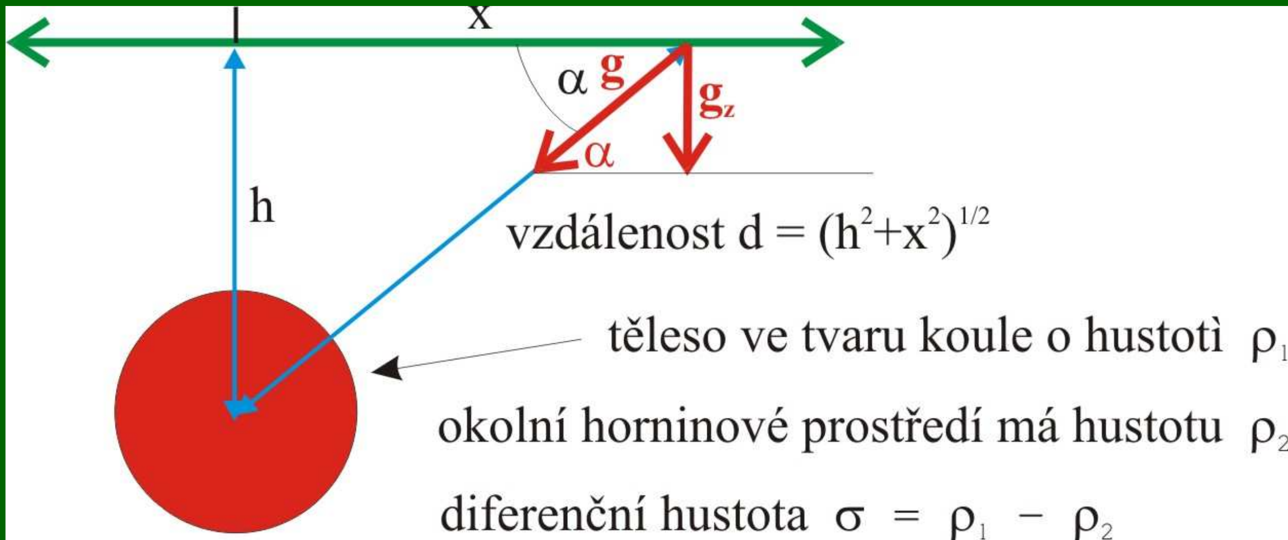
Gravitační zrychlení tedy je dáno:

$$g = \frac{\kappa M}{x^2 + h^2}$$

Podle zadání nás ale zajímá pouze vertikální složka gravitačního zrychlení g_z:

$$g_z = g \sin\alpha$$

Současně ale vidíme, že $\sin\alpha$ si můžeme vyjádřit jako:



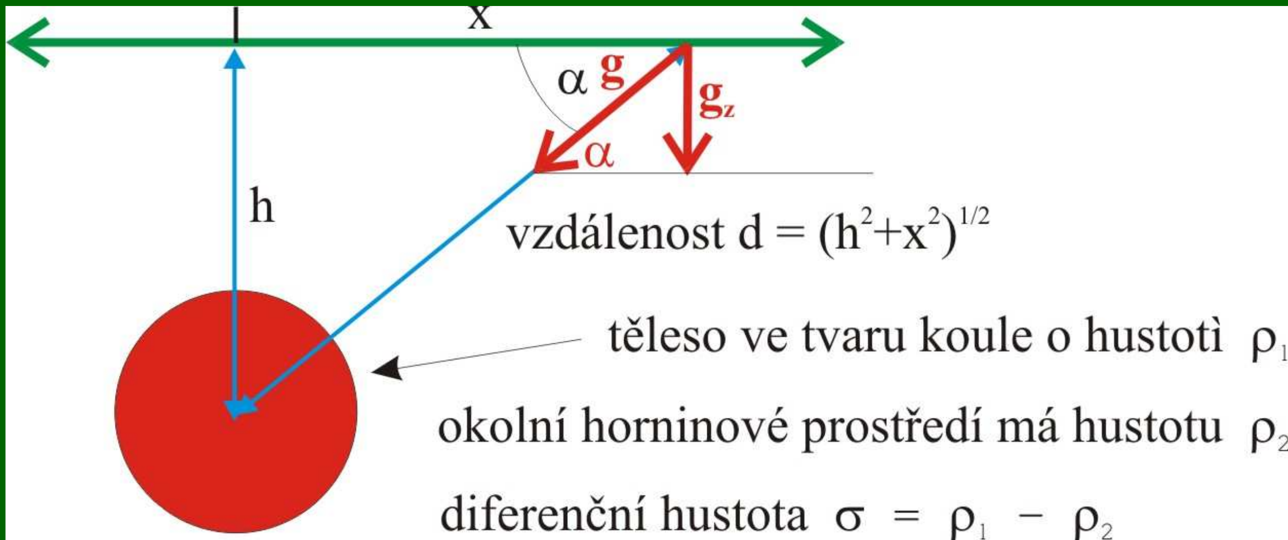
$$\sin\alpha = \frac{h}{d}$$

$$d = \sqrt{x^2 + h^2}$$

1. Přímá úloha v gravimetrii

Tedy:

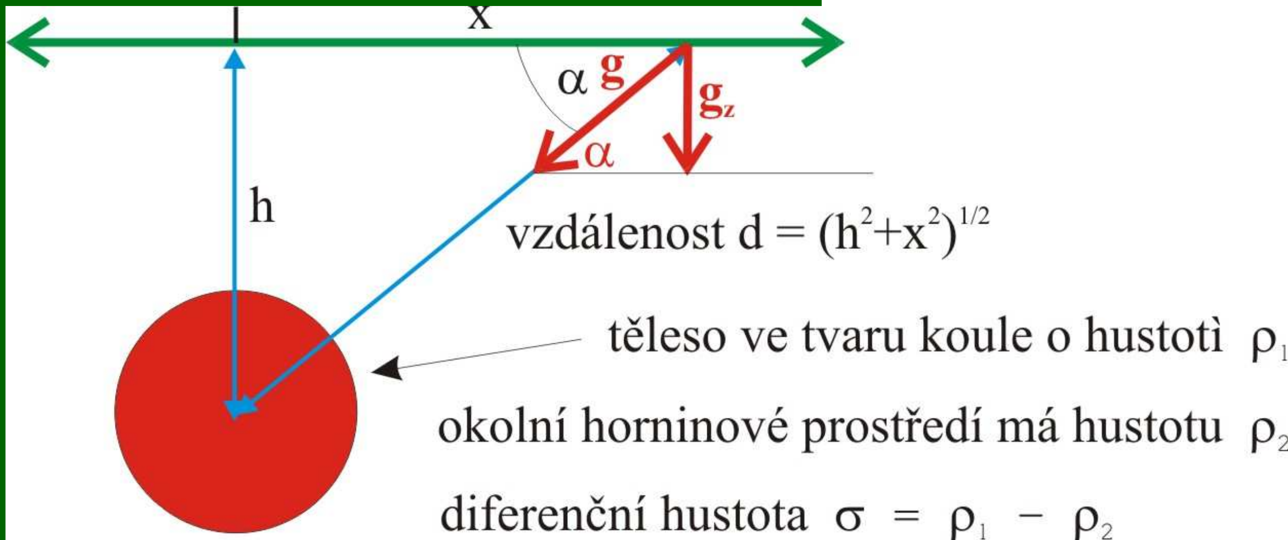
$$g_z = g\sin\alpha = \frac{\kappa M}{x^2+h^2}\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2+h^2\right)^3}}$$



1. Přímá úloha v gravimetrii

Hmotnost M je v našem případě nutno chápat nikoli jako celou hmotnost koule, ale jako diferenční hmotnost (oč je hmotnost odlišná od hmotnosti okolního prostředí o stejném objemu). M tedy závisí na objemu a na diferenční hustotě σ:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 . \sigma$$



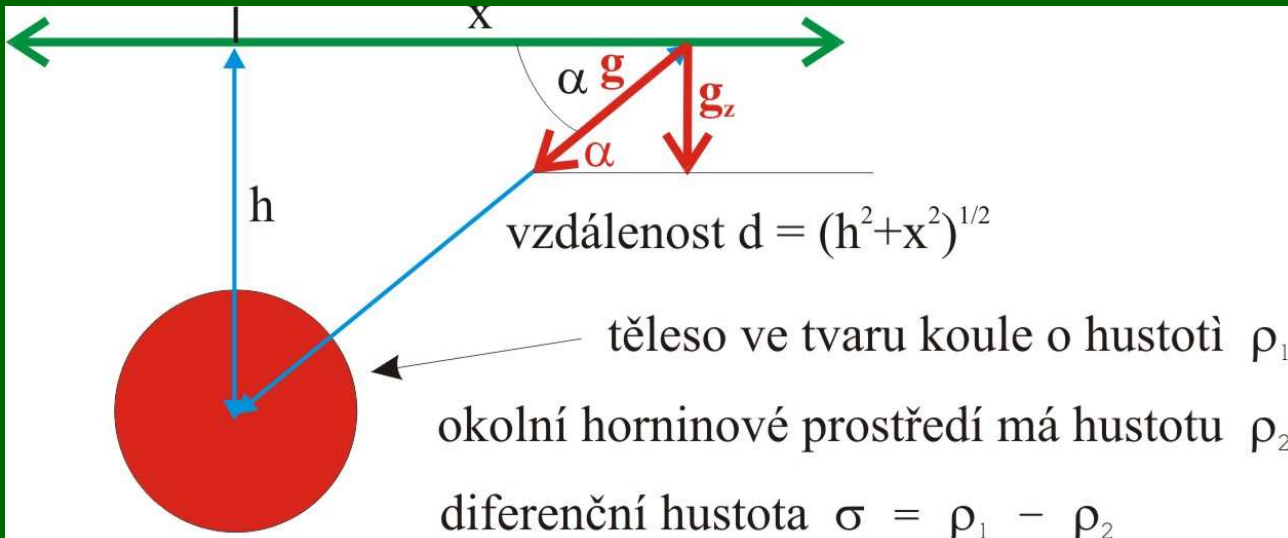
1. Přímá úloha v gravimetrii

Hmotnost M je v našem případě tedy:

$$M = \frac{4}{3}\pi 150^3.500 = 7{,}068{,}583{,}471 kg$$

Vertikální složka g je po dosazení:

$$g_z = \frac{6{,}67.10^{-11}.7068583471.500}{\sqrt{\left(x^2+500^2\right)^3}} = \frac{235{,}737259}{\sqrt{\left(x^2+500^2\right)^3}} m.s^{-2}$$



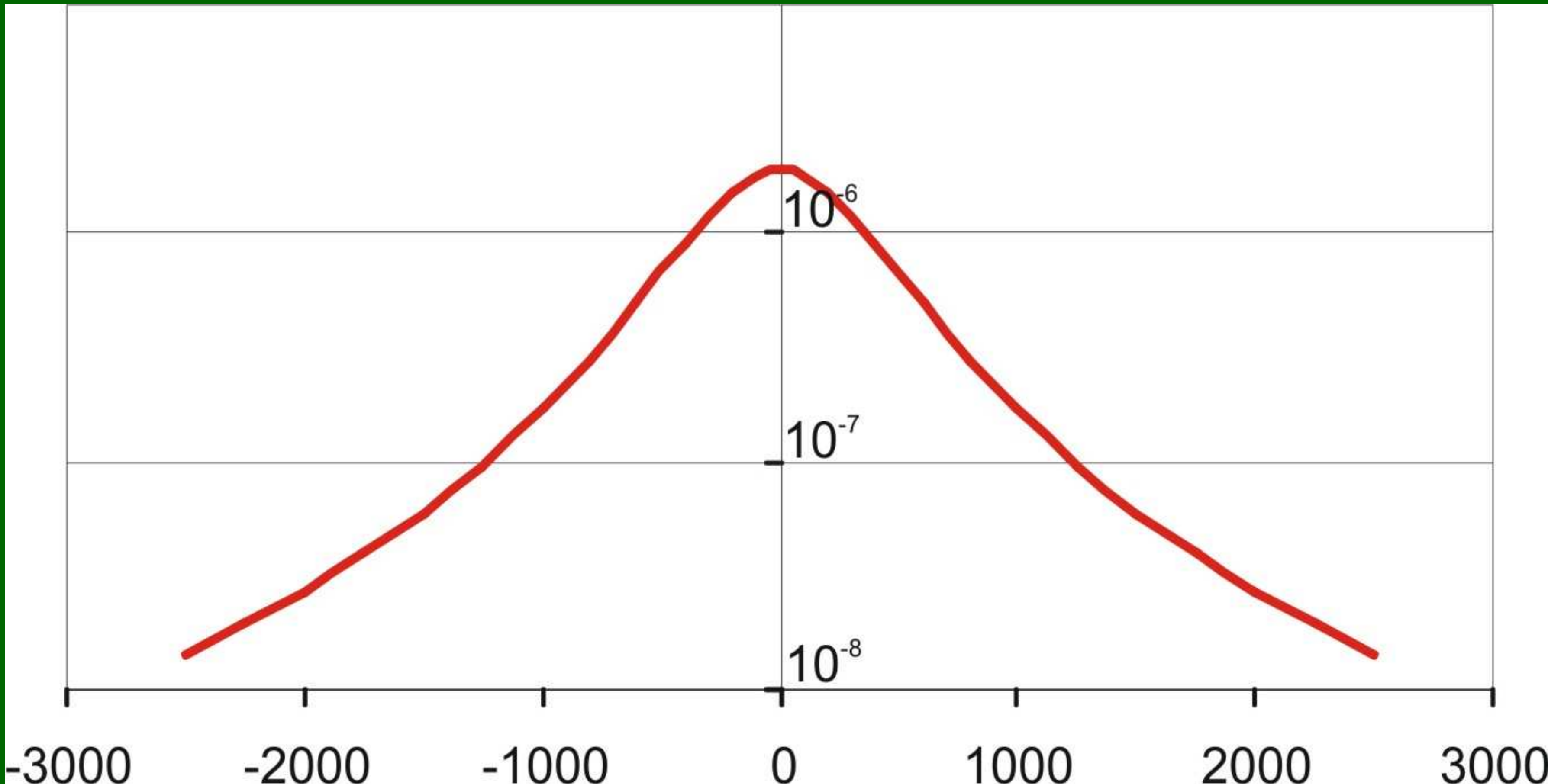
1. Přímá úloha v gravimetrii

Po dosazení za x (vzdálenost na profilu od bodu 0) můžeme doplnit tabulku hodnot vertikální složky gravitačního zrychlení v jednotlivých bodech profilu:

x [m]	Vz [m/s^2]	x [m]	Vz [m/s^2]
-2500	$1{,}42252 \cdot 10^{-8}$	200	$1{,}50949 \cdot 10^{-6}$
-2250	$1{,}92522 \cdot 10^{-8}$	400	$8{,}97951 \cdot 10^{-7}$
-2000	$2{,}69057 \cdot 10^{-8}$	600	$4{,}94804 \cdot 10^{-7}$
-1750	$3{,}91016 \cdot 10^{-8}$	800	$2{,}80765 \cdot 10^{-7}$
-1500	$5{,}96373 \cdot 10^{-8}$	1000	$1{,}6868 \cdot 10^{-7}$
-1250	$9{,}66076 \cdot 10^{-8}$	1250	$9{,}66076 \cdot 10^{-8}$
-1000	$1{,}6868 \cdot 10^{-7}$	1500	$5{,}96373 \cdot 10^{-8}$
-800	$2{,}80765 \cdot 10^{-7}$	1750	$3{,}91016 \cdot 10^{-8}$
-600	$4{,}94804 \cdot 10^{-7}$	2000	$2{,}69057 \cdot 10^{-8}$
-400	$8{,}97951 \cdot 10^{-7}$	2250	$1{,}92522 \cdot 10^{-8}$
-200	$1{,}50949 \cdot 10^{-6}$	2500	$1{,}42252 \cdot 10^{-8}$
0	$1{,}8859 \cdot 10^{-6}$		

1. Přímá úloha v gravimetrii

Vypočtené hodnoty pak vyneseme do grafu:

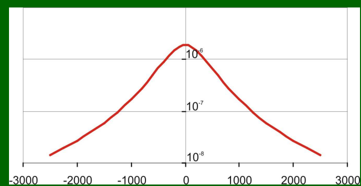


1. Přímá úloha v gravimetrii

Při vynášení do grafu s logaritmickou škálou je zapotřebí vyvarovat se některých chyb, mezi nejčastější patří:

- Špatná volba minimální a maximální hodnoty zobrazené na ose s logaritmickou škálou – obě meze je nutno určit s ohledem na zobrazované hodnoty

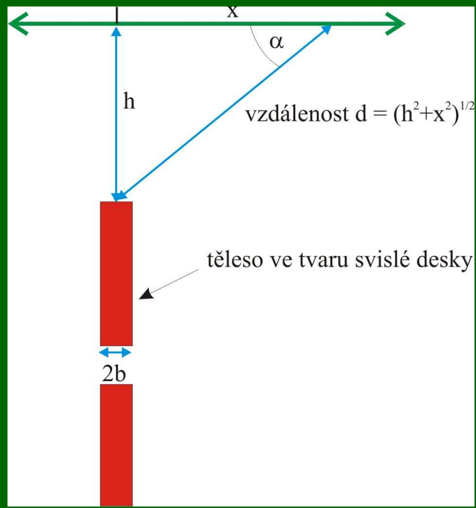
- Zkombinování logaritmické a lineární škály (nelze rozdělit y-ovou osu na úseky podle logaritmické škály a v rámci úseků vynášet lineárně – vede to k zásadnímu zkreslení grafu)



2. Úloha z magnetometrie

Zadání: Na severojižním profilu byla zjištěna magnetická anomálie ΔT vyvolaná tenkou deskou. **Určete hloubku horního okraje této desky ze vztahu:**

$$h = (x_{min} - x_{max})\frac{\sin 2I_n}{2}$$

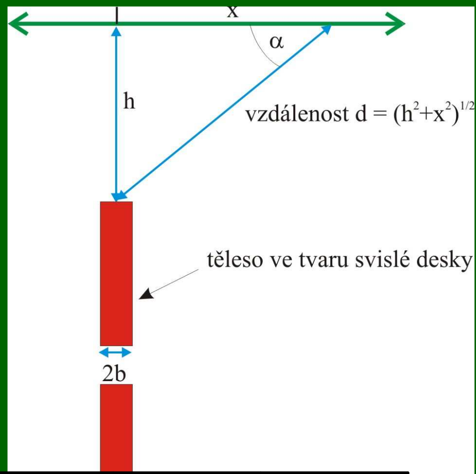


x_{min} ... x-ová souřadnice minima křivky ΔT(x)
x_{max} ... x-ová souřadnice maxima křivky ΔT(x)
I_n … inklinace normálního magnetického pole
h … hloubka horního okraje desky
x … souřadnice na profilu, kladná osa je orientovaná k severu

2. Úloha z magnetometrie

Zadání: Na severojižním profilu byla zjištěna magnetická anomálie ΔT vyvolaná tenkou deskou. **Určete hloubku horního okraje této desky ze vztahu:**

$$h = (x_{min} - x_{max}) \frac{\sin 2I_n}{2}$$



x	0	1	2	3	4	5	6	7	10	15	20
ΔT	1.62	0.31	-0.84	-1.67	-2.18	-2.43	-2.53	-2.52	-2.27	-1.78	-1.43
x		-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-10	-15	-20
ΔT		2.80	3.63	4.05	4.15	4.05	3.85	3.61	2.92	2.11	1.62

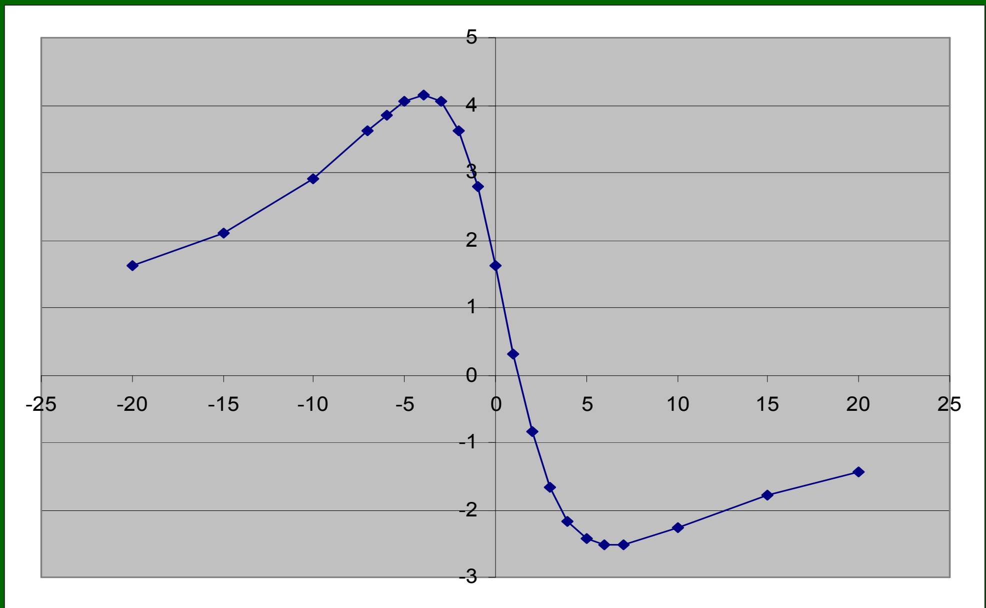
$I_n = 52°$

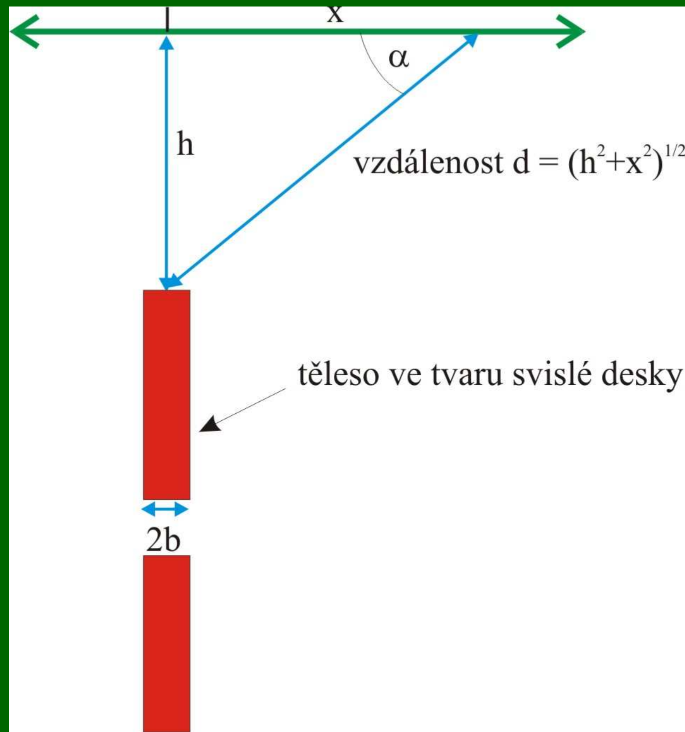
2. Úloha z magnetometrie

Postup:

Vyneseme hodnoty z tabulky do grafu. Tyto hodnoty vychází ze vztahu pro magnetickou anomálii ΔT vyvolanou tenkou svislou deskou, který je v případě severojižního profilu:

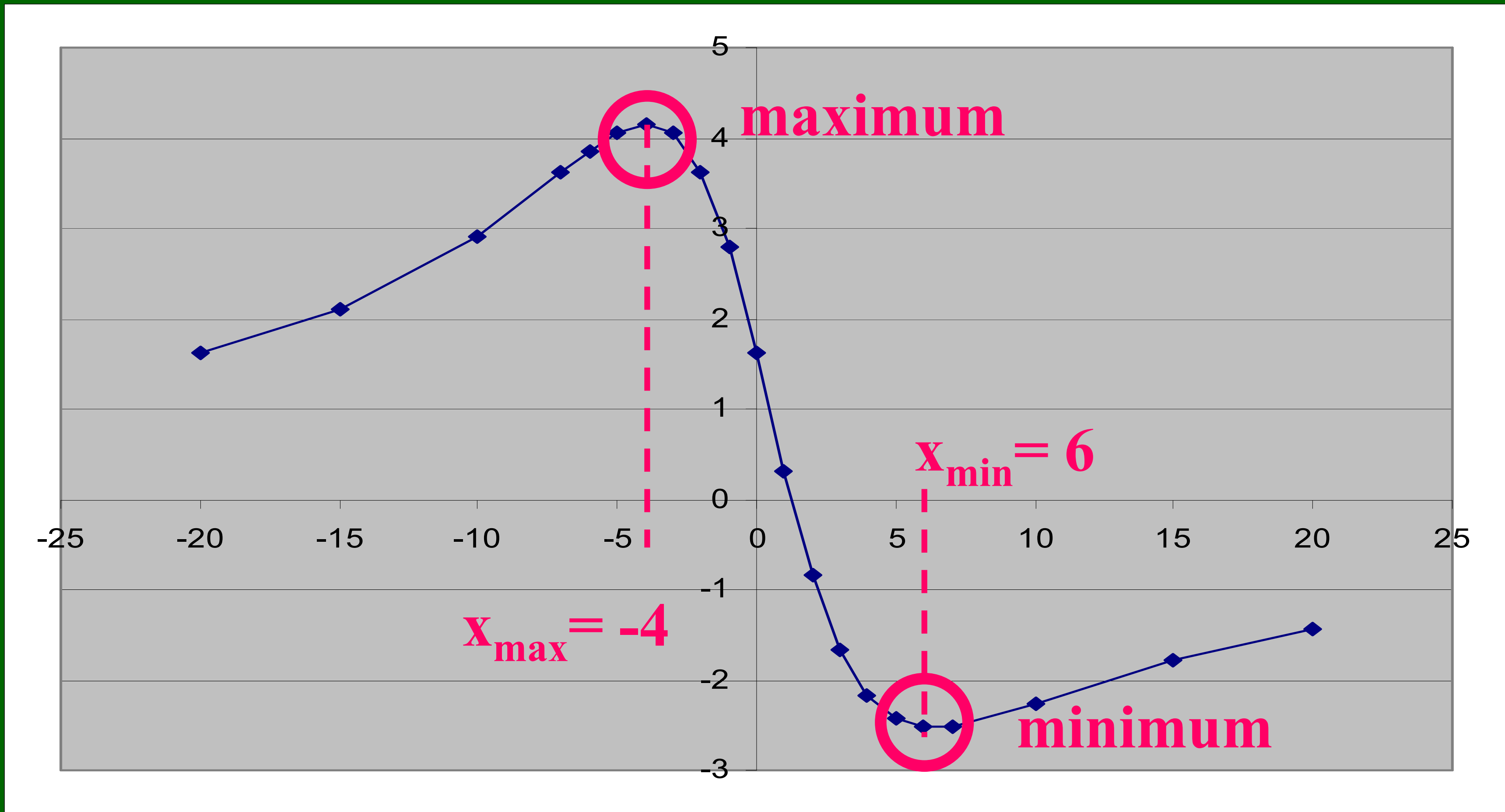
$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right)$$





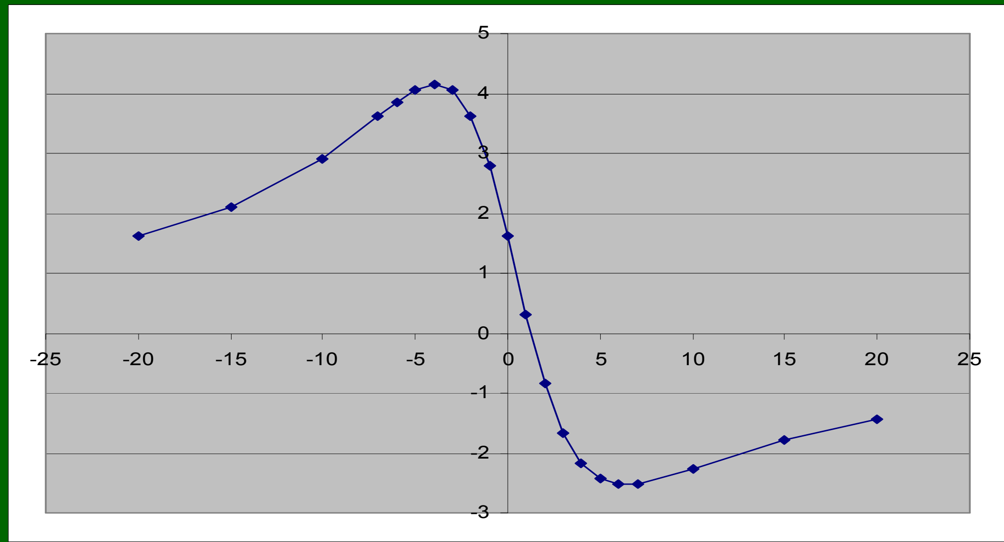
2. Úloha z magnetometrie

V grafu pak nalezneme maximum a minimum funkce ΔT a odečteme x-ové souřadnice těchto bodů.



2. Úloha z magnetometrie

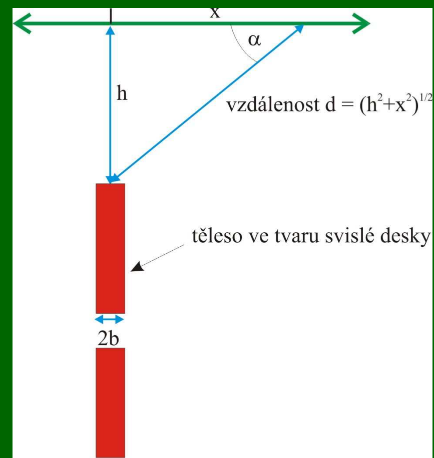
Odečtené souřadnice pak dosadíme do vzorce:



$$h = (x_{min} - x_{max})\frac{\sin 2I_n}{2}$$

$$h = (6 - -4)\frac{\sin 104^\circ}{2}$$

$$h = (10) * 0.485 = 4.85 \cong 5\text{metrů}$$



2. Úloha z magnetometrie

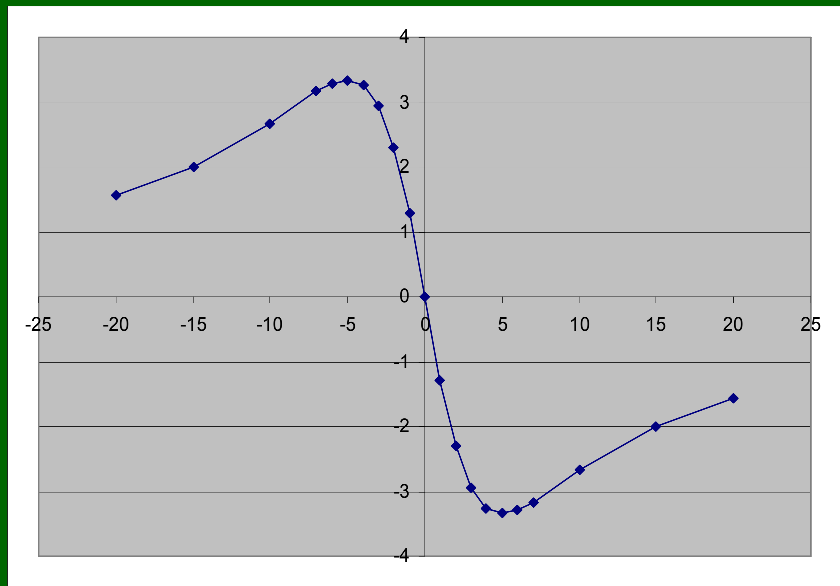
Všimněme si, že pro případy, kdy je hodnota inklinace I_n rovna 45°, přechází vztahy použité v tomto úkolu do jednodušších vztahů a graf funkce ΔT je středově symetrický:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos(2I_n)+x\sin(2I_n)\right)$$

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos(90°)+x\sin(90°)\right) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}x$$

$$h = (x_{min} - x_{max})\frac{\sin 2I_n}{2}$$

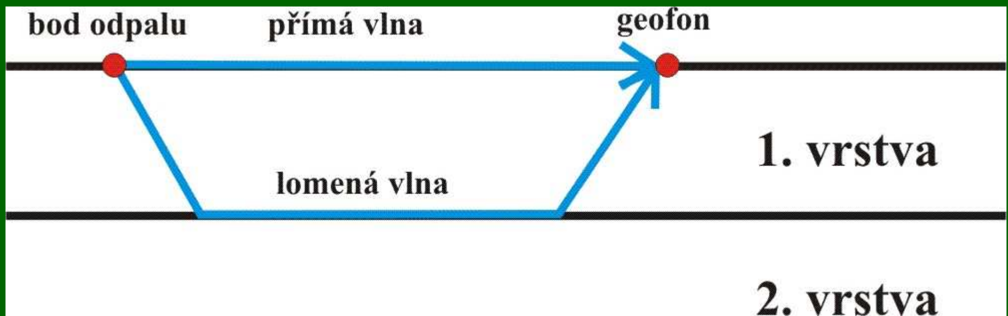
$$h = (x_{min} - x_{max})\frac{\sin 90°}{2} = \frac{(x_{min} - x_{max})}{2}$$



3. Úloha z refrakční seismiky

Zadání: Pro určení parametrů zvětralé vrstvy byla využita mělká varianta refrakční seismiky. V místě měření byl proveden odpal nálože z mělkého vývrtu. Vybuzený signál byl registrován geofony umístěnými na profilu ve vzdálenostech uvedených v tabulce.
Na pořízeném seismickém záznamu pak byly odečteny časy prvního nasazení přímé vlny.

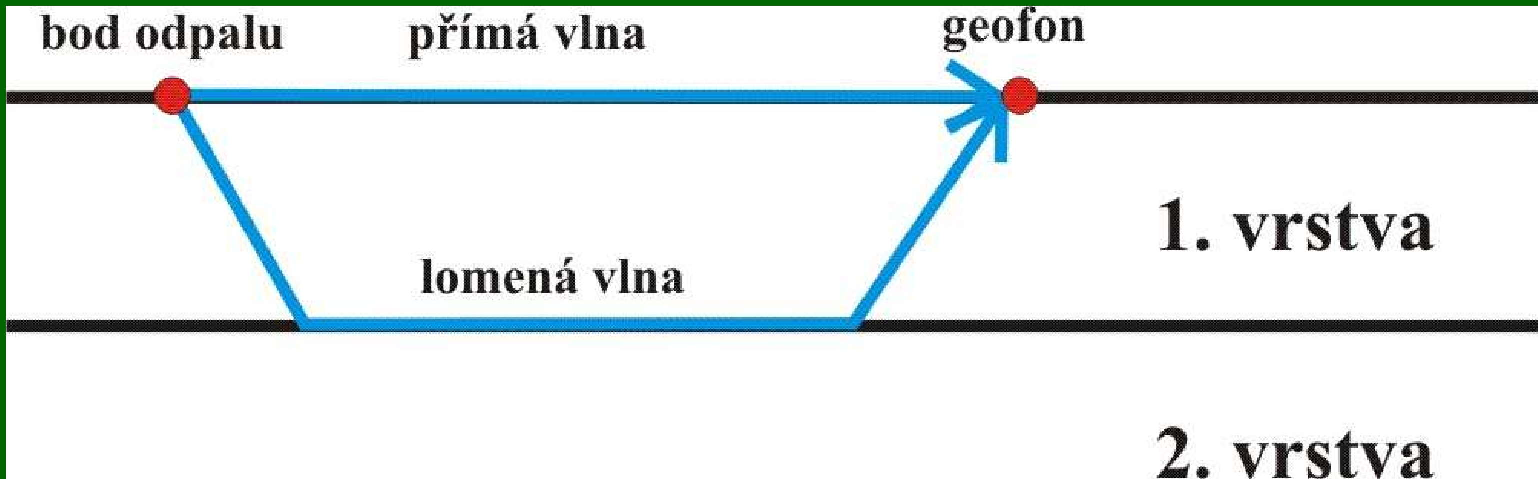
x [m]	2	5	10	15	20	25	40	80	120	150
t [ms]	3.3	8.3	16.7	25.0	33.3	41.7	51.8	71.8	91.8	106.8



3. Úloha z refrakční seismiky

Zadání: Určete mocnost první vrstvy.

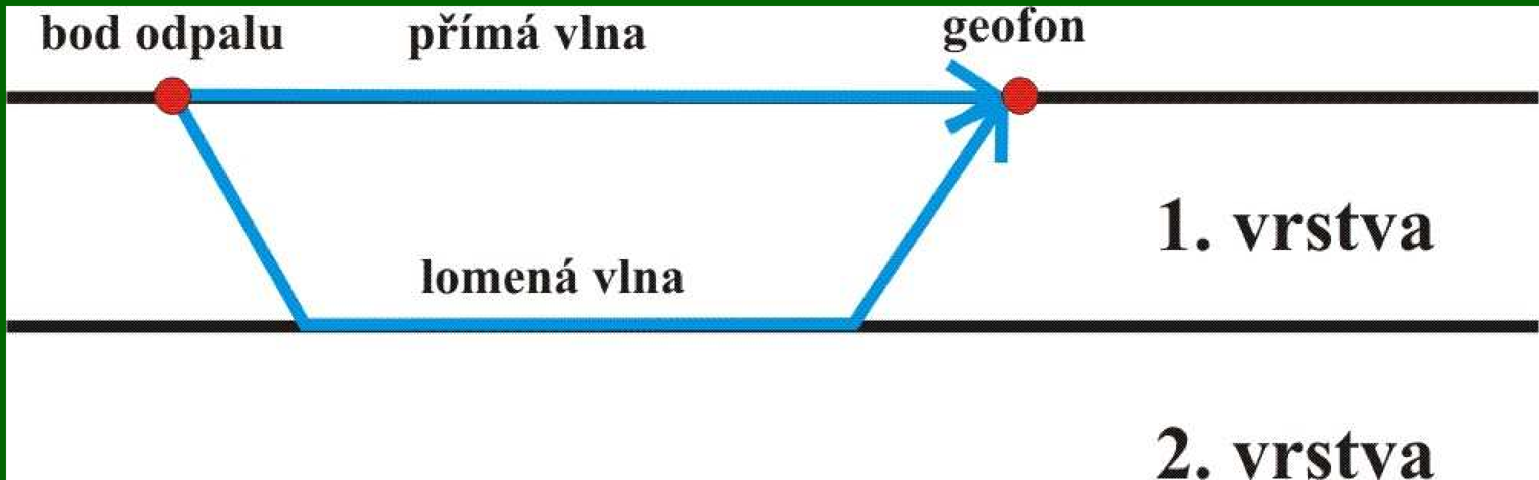
x [m]	2	5	10	15	20	25	40	80	120	150
t [ms]	3.3	8.3	16.7	25.0	33.3	41.7	51.8	71.8	91.8	106.8



3. Úloha z refrakční seismiky

Postup: Vyneste do grafu hodochronu prvního nasazení. Naměřenými hodnotami proložte přímkové úseky hodochrony přímé vlny a hodochron lomených vln.

x [m]	2	5	10	15	20	25	40	80	120	150
t [ms]	3.3	8.3	16.7	25.0	33.3	41.7	51.8	71.8	91.8	106.8

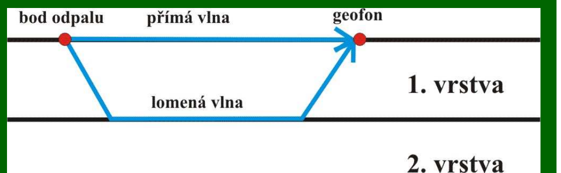


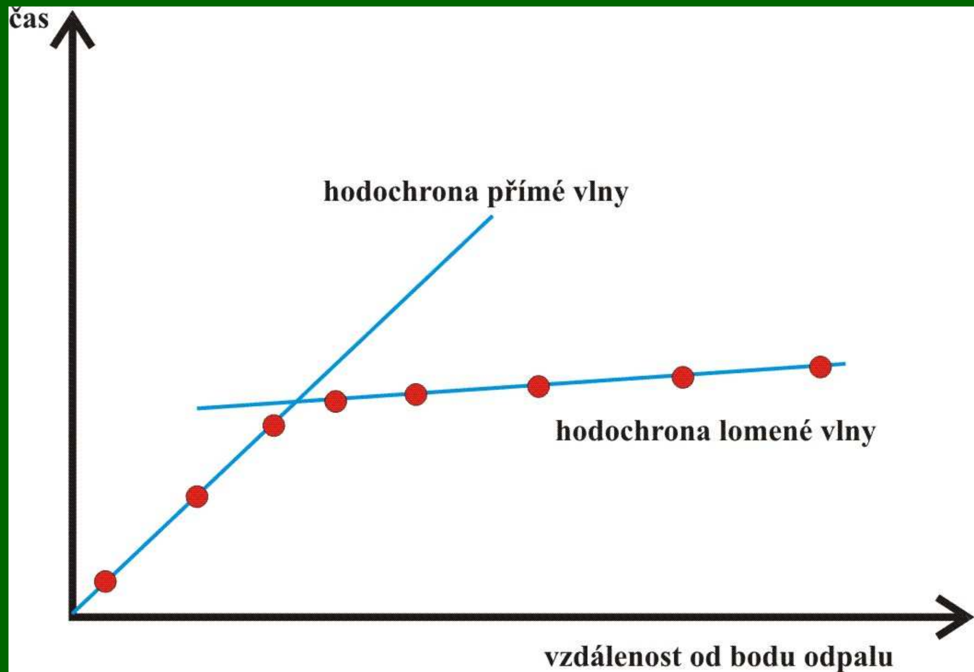
3. Úloha z refrakční seismiky

Hodochrona je křivka popisující závislost mezi časem detekce a vzdáleností od hypocentra. V homogenním prostředí je tato závislost přímková:

$$t = \frac{d}{v}$$

t … čas detekce
d … dráha
v … rychlost



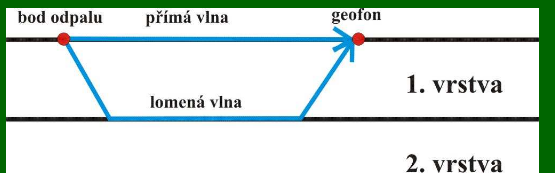


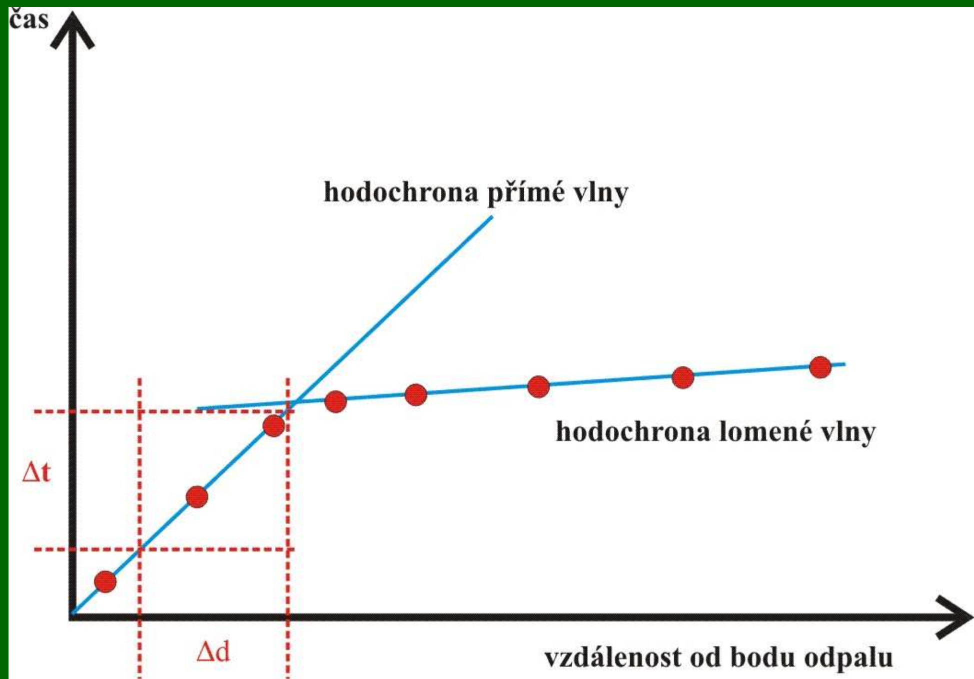
3. Úloha z refrakční seismiky

Z přímkových závislostí pak snadno můžeme odvodit rychlost:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

t … čas detekce
d … dráha
v … rychlost

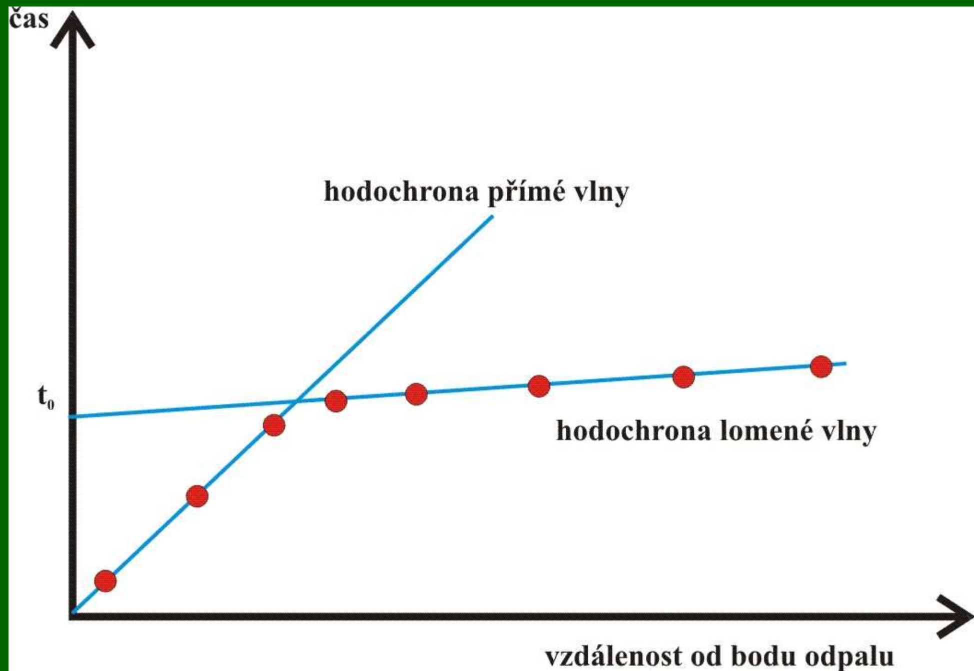


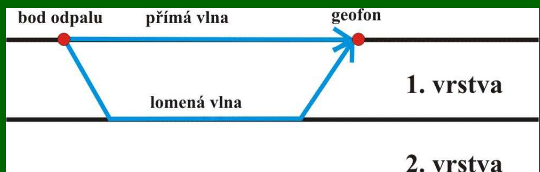


3. Úloha z refrakční seismiky

Pro odvození mocnosti první vrstvy h potřebujeme znát kritický úhel i a souřadnici t_0 udávající bod, v němž přímková hodochrona lomené vlny teoreticky protíná svislou souřadnou osu.

$$h = \frac{t_0 . v_1}{2\cos(i)}$$

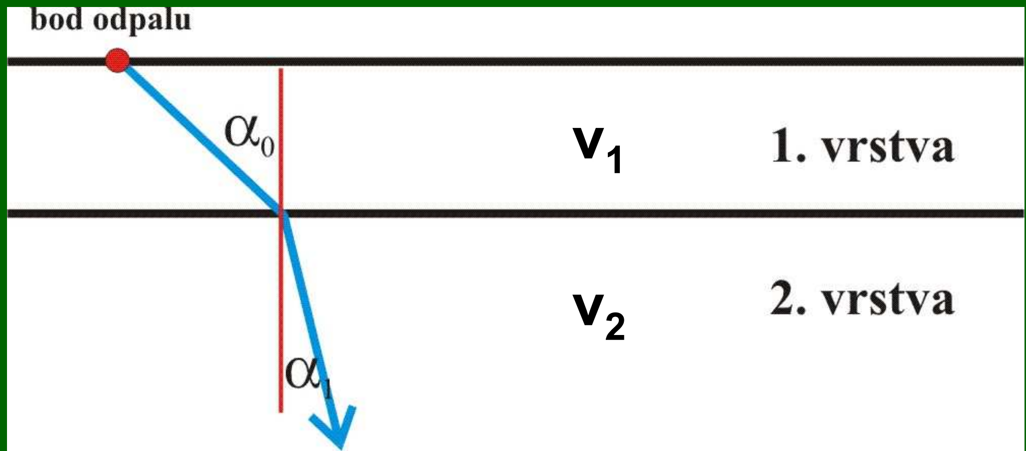




3. Úloha z refrakční seismiky

Kritický úhel odvodíme ze Snellova vztahu:

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$$



Willebrord van Roijen Snell

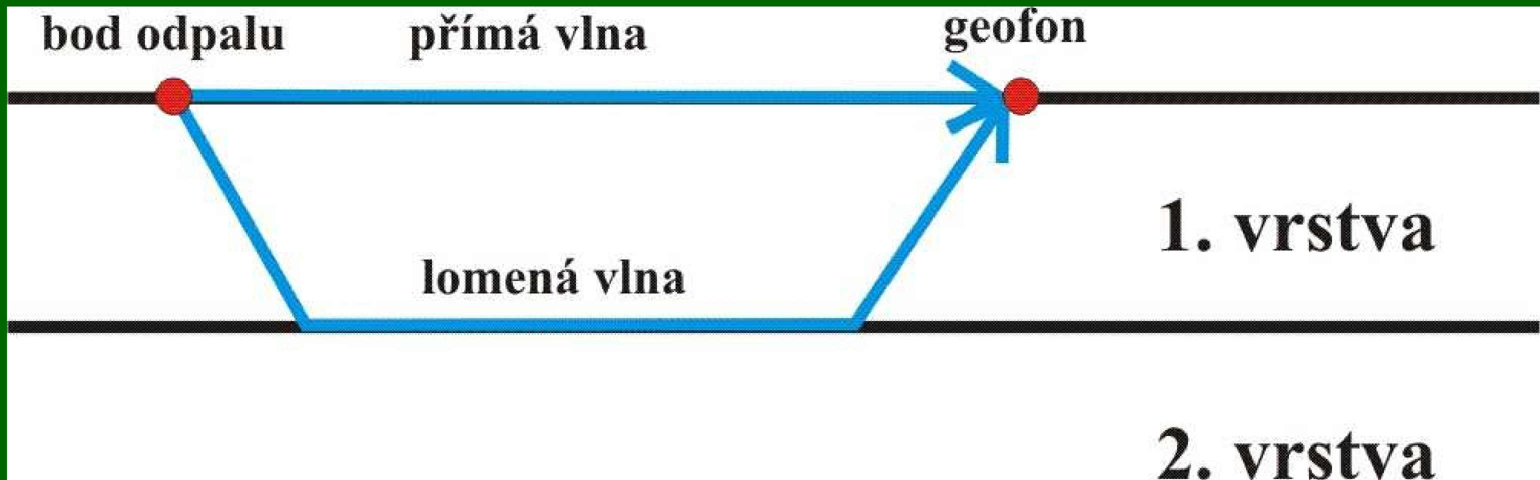
(1580-1626)

3. Úloha z refrakční seismiky

Kritický úhel odvodíme ze Snellova vztahu:

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin 90°}{v_2} = \frac{1}{v_2}$$

$$\sin(i) = \frac{v_1}{v_2}$$



3. Úloha z refrakční seismiky

Z rychlostí seismických vln získáme tedy sinus úhlu i:

$$\sin(i) = \frac{v_1}{v_2}$$

Pro další výpočet však potřebujeme jeho cosinus:

$$h = \frac{t_0 . v_1}{2\cos(i)}$$

Buď si tedy musíme úhel i vyjádřit pomocí funkce arcsin, nebo si jeho cosinus odvodíme ze vztahu:

$$\sin^2(i) + \cos^2(i) = 1 \Rightarrow \cos(i) = \sqrt{1 - \sin^2(i)}$$

3. Úloha z refrakční seismiky

Pak snadno dosadíme konkrétní hodnoty do vztahu:

$$h = \frac{t_0 . v_1}{2\cos(i)}$$

(např. odvodíme-li z grafu rychlosti $v_1=650ms^{-1}$, $v_2=2000ms^{-1}$, pak nám vyjde kritický úhel přibližně 19°. Odečteme-li dále hodnotu t_0 jako 29 milisekund, dosadíme do vzorce:

$$h = \frac{t_0 . v_1}{2\cos(i)} = \frac{0{,}029.650}{2\cos 19°} \cong \frac{18{,}85}{1{,}891} \cong 10\,\text{metrů}$$

)

4. Úloha z radiometrie

Zadání: Uran $^{235}_{92}U$ se rozpadá na thorium $^{231}_{90}Th$ s poločasem rozpadu $T=7.10^8$ let.

Sestrojte graf vyjadřující úbytek atomů uranu v čase (tj. graf N_t/N_0 ku času t), délku osy pro čas t volte blízkou pětinásobku poločasu rozpadu.

Vypočítejte dobu, za kterou se rozpadne 75% atomů uranu. Výpočet zkontrolujte v grafu.

4. Úloha z radiometrie

Mezi počátečním počtem atomů uranu N_0 a počtem zbývajících atomů N_t v čase t platí vztah:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$$

kde λ je rozpadová konstanta prvku, která souvisí s poločasem rozpadu T podle vztahu:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

4. Úloha z radiometrie

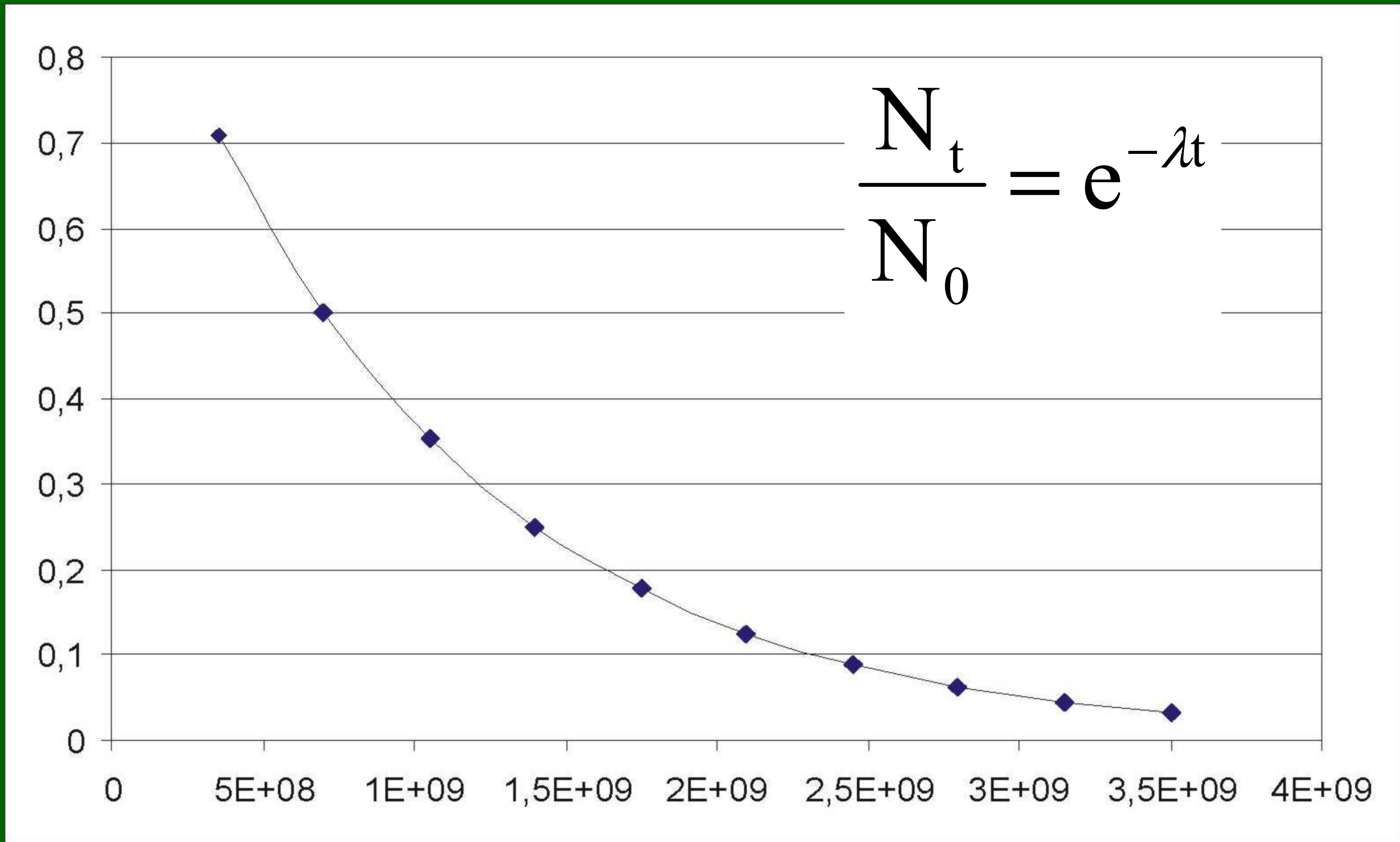
Máme sestrojit graf vyjadřující úbytek atomů uranu v čase (tj. graf N_t/N_0 ku času t), vyjádříme si tedy vztah pro poměr N_t/N_0:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

Vypočteme hodnoty poměru N_t/N_0 pro vhodně zvolené časy t tak, abychom mohli sestrojit požadovaný graf (krok na časové ose tedy volíme s ohledem na velikost poločasu rozpadu).

4. Úloha z radiometrie

Pak sestrojíme graf:



4. Úloha z radiometrie

Dále máme vypočítat dobu, za kterou se rozpadne 75% atomů uranu – tj. máme vypočítat dobu, za kterou v systému zůstane zachováno 25% původních atomů uranu (totiž 100% - 75%). Předpokládáme-li, že v čase t=0 je v systému množství atomů odpovídající 100% (tj. N_0=100%), pak v hledaném čase t=x, zůstane jen 25% původního množství atomů (tj. N_t=25%) a vzájemný poměr N_t/N_0 je pak roven 25%/100%, což je 0.25. Dosazením do vztahu pro závislost poměru N_t/N_0 na čase tak získáme vztah, ve kterém bude jedinou neznámou čas t.

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N_t}{N_0} = (1 - 0.75) = 0.25 = e^{-\lambda t}$$

4. Úloha z radiometrie

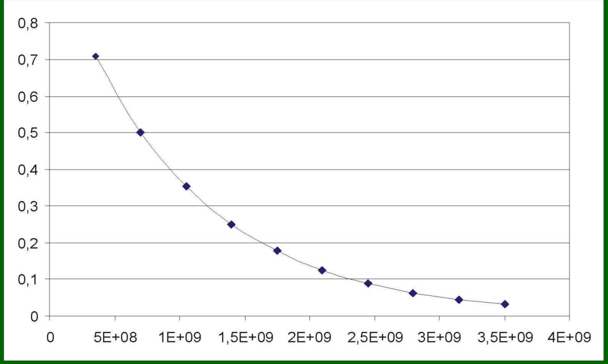
Získanou rovnici o jedné neznámé pak snadno vyřešíme.

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N_t}{N_0} = (1 - 0.75) = 0.25 = e^{-\lambda t}$$

$$0.25 = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow \ln(0.25) = -\lambda t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0.25)}{-\lambda}$$

$$t = 1{,}4.10^{9}\,let$$



4. Úloha z radiometrie

V grafu pak zkontrolujeme, zda poměr N_t/N_0 odpovídající hodnotě 0.25 je skutečně dosažen při t=1,4 . 10^9 let:

$$0.25 = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow \ln(0.25) = -\lambda t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0.25)}{-\lambda}$$

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$