Duktilní deformace, základní charakteristika

Duktilní (plastická) deformace je taková deformace, při níž se materiál deformuje bez přerušení koheze (soudržnosti).

Plasticita materiálu záleží na tzv. **mezi plasticity** (yield stress) - tj. kritickém napětí, při kterém se materiál přestává chovat (pouze) elasticky a začíná se chovat plasticky (začíná se plasticky deformovat). Je-li mez plasticity **vyšší**, než mez pevnosti, pak se materiál chová **křehce** - dříve, než se může deformovat duktilně, dojde k jeho křehkému porušení. Je-li mez plasticity **nižší** než mez pevnosti, pak se materiál chová **Duktilně (plasticky)**.

Duktilní deformace, základní charakteristika

Deformační analýza diskutovaná v rámci této a následujících přednášek se zabývá **duktilní deformací**.
Přitom ovšem sleduje deformaci pouze v daném měřítku, nezabývá se jejími příčinami, které plynou z procesů menších měřítek. **Makroskopická duktilní deformace** může být produktem **mikroskopických křehkých deformačních procesů**! Tyto vztahy budou ale v dalších úvahách zanedbány.

Složky deformace

Každý deformovaný objekt si lze vyjádřit pomocí **polohových vektorů** bodů, které tento objekt tvoří. Deformaci pak lze chápat jako proces vedoucí ke změně těchto polohových vektorů. Matematicky si lze proto deformaci vyjádřit ve formě transformační rovnice, která převádí složky původního polohového vektoru **X** (před deformací) na složky polohového vektoru **x** již deformovaného objektu.

Složky deformace

Deformaci lze současně chápat jako proces, který vede **ke změně stavu** objektu. Tento stav je obecně dán čtyřmi parametry:

1. poloha

2. orientace

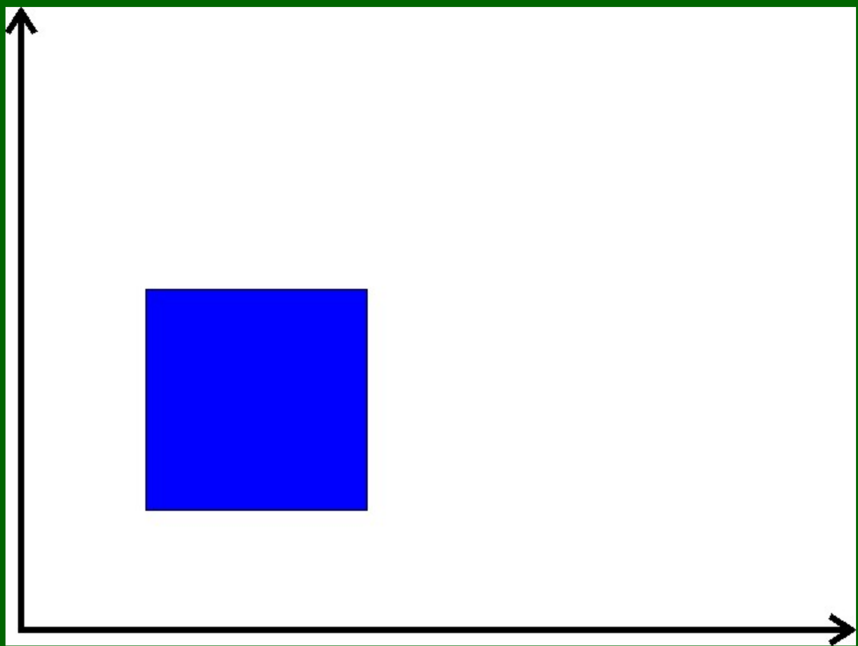
3. objem

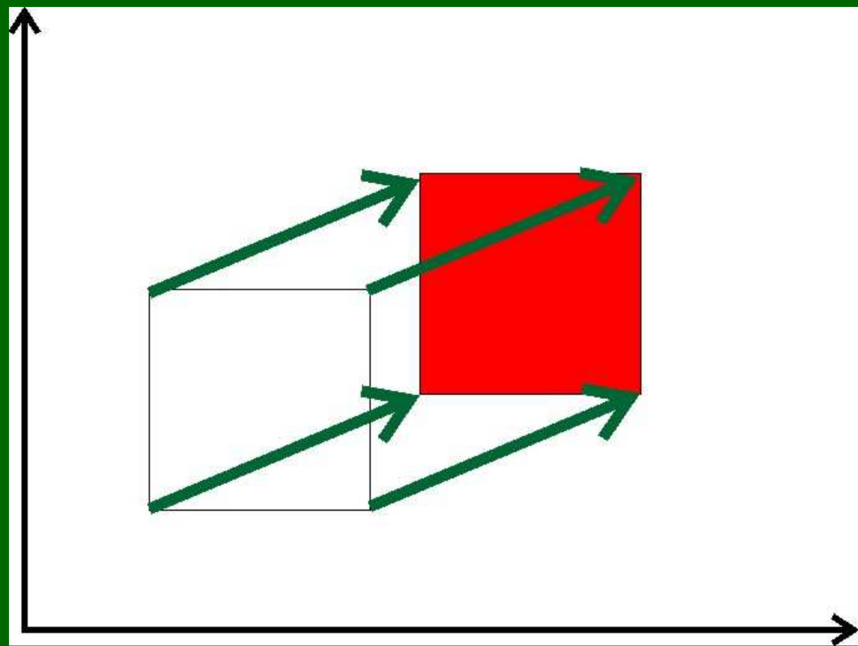
4. tvar

Složky deformace

1. poloha - změna polohy = translace

Translace dobře popisuje např. křehkou deformaci, kdy dochází k vzájemnému posunutí (změně polohy) dvou bloků oddělených diskontinuitou.





Složky deformace

Matematicky lze popsat translaci jako změnu všech polohových vektorů objektu o vždy stejný vektor translace **T**:

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{X}} + \mathbf{T}$$

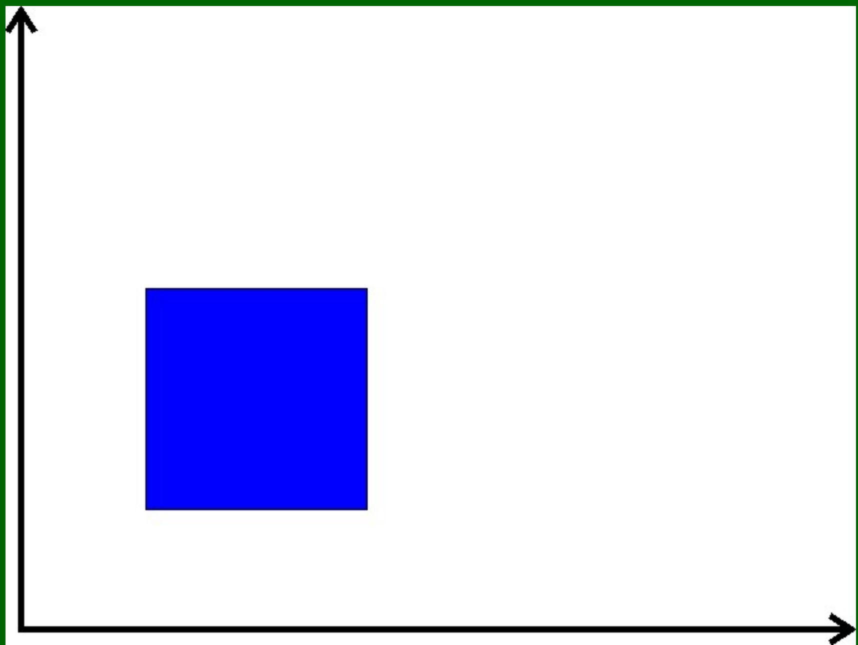
X je původní polohový vektor, **x** je polohový vektor po deformaci a **T** je vektor translace.

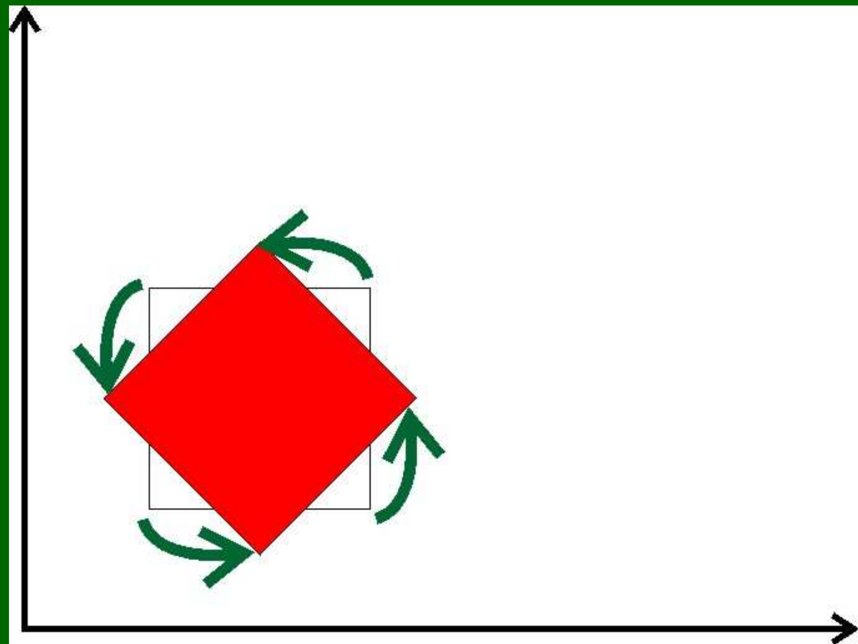
Translaci tak lze popsat ve 3D prostoru vektorem **T**, tj. <u>třemi nezávislými složkami</u> vektoru **T**.

Složky deformace

2. orientace - změna orientace = rotace

Translace spolu s rotací úplně popisují pohyb jakékoli rigidní (tj. pevné, neměnící svůj tvar a objem) částice.





Složky deformace

Matematicky lze popsat rotaci pomocí matice rotace **R**, kterou lze chápat jako transformační matice mezi dvěma souřadnými soustavami, které jsou vzájemně pootočeny:

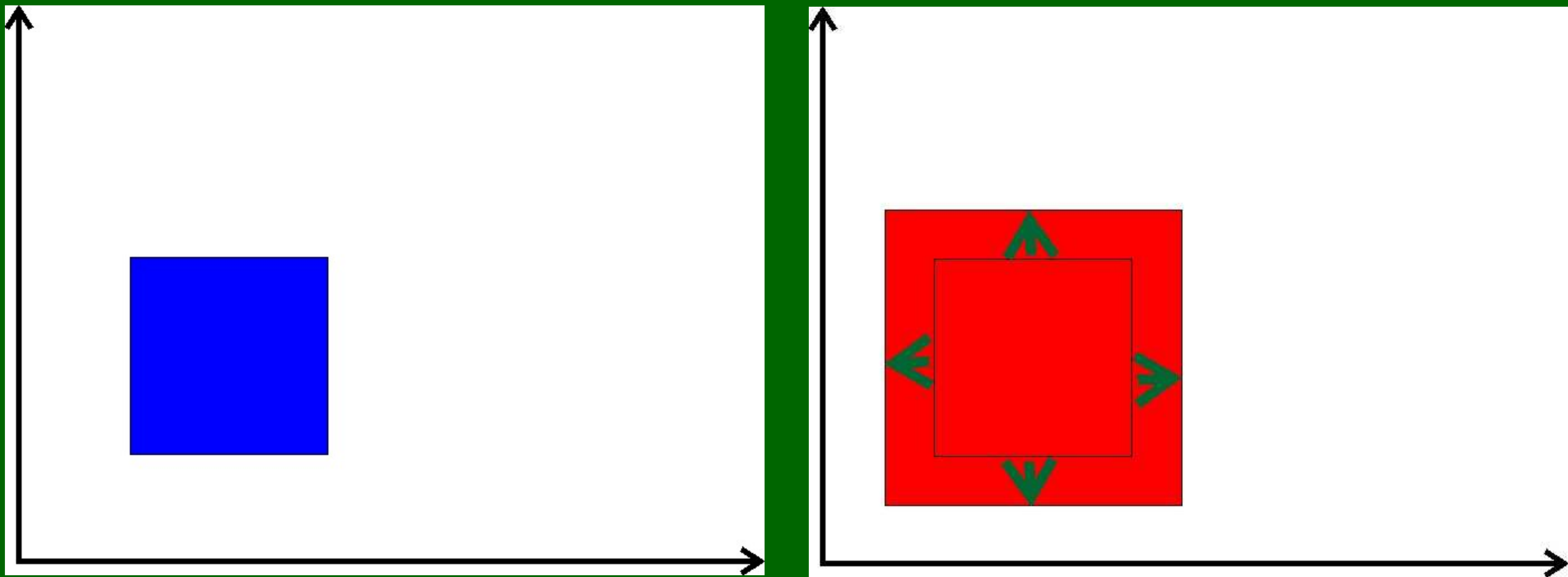
$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{R}.\vec{\mathbf{X}}$$

X je původní polohový vektor, **x** je polohový vektor po deformaci a **R** je matice rotace.

Matice rotace má <u>devět</u> členů a <u>není symetrická</u>. Z podmínky **ortogonality** souřadných os ale plyne, že pouze <u>tři parametry matice rotace jsou nezávislé</u>.

Složky deformace

3. objem - změna objemu = dilatace



Složky deformace

Matematicky lze popsat dilataci jako transformaci, při níž dochází pouze ke změně délky polohového vektoru (nedochází ke změně orientace polohového vektoru) a tato změna je dána poměrem, který je v každém bodě stejný:

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathrm{a}.\vec{\mathbf{X}}$$

X je původní polohový vektor, **x** je polohový vektor po deformaci a **a** je míra natažení.

Dilatace má tedy jeden jediný nezávislý parametr.

Složky deformace

V některých případech je užitečné popsat dilataci ve formě matice **V** 3 krát 3, která má prvky v hlavní diagonále rovny parametru **a** a prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové:

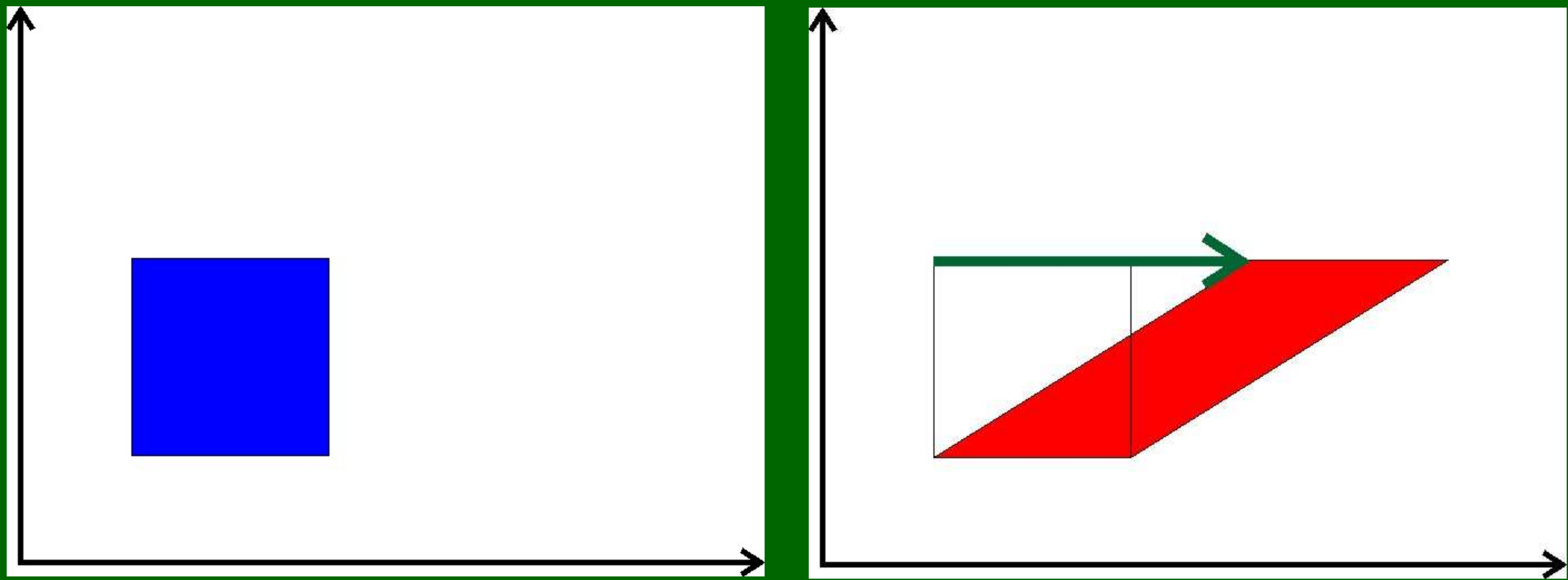
$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{V}.\vec{\mathbf{X}}$$

Složky deformace

4. tvar - změna tvaru = distorze

Ve velké míře se deformační analýza soustředí právě na tento deformační proces.



Složky deformace

Matematicky lze popsat distrozi jako transformaci popsanou maticí distorze **S**:

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{S}.\vec{\mathbf{X}}$$

X je původní polohový vektor, **x** je polohový vektor po deformaci a **S** je matice distorze.

Matice rotace má devět členů. Nezahrnuje ale rotaci (lze ukázat, že je proto symetrická) a nezahrnuje dilataci (lze ukázat, že je její determinant proto roven jedné). Proto má matice distorze pouze pět nezávislých parametrů.

Složky deformace

Obecně lze deformaci chápat jako proces skládající se z translace, rotace, dilatace a distorze:

$$\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{V.R.S}).\vec{\mathbf{X}} + \mathbf{T}$$

Deformaci tak matematicky úplně popisuje vektor translace T a tenzor deformace D, který zahrnuje rotaci, dilataci a distorzi:

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{D}.\vec{\mathbf{X}} + \mathbf{T}$$

X je původní polohový vektor, **x** je polohový vektor po deformaci, **D** je tenzor deformace a **T** je vektor translace.

Složky deformace

Tenzor deformace má devět složek. Není symetrický a všech devět složek je nezávislých. Devět nezávislých parametrů lze rozdělit tak, že jeden popisuje dilataci, tři rotaci a pět distorzi.

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{D}.\vec{\mathbf{X}} + \mathbf{T}$$

	počet nezávislých parametrů
dilatace	**1**
rotace	**3**
distorze	**5**
celkem	**9**

Složky deformace

Protože je translace popsána třemi parametry, lze v každém bodě kontinua úplně popsat deformaci pomocí dvanácti nezávislých parametrů.

	počet nezávislých parametrů
dilatace	**1**
rotace	**3**
distorze	**5**
translace	**3**
celkem	**12**

Pole vektorů přemístění

Deformace je v každém bodě kontinua popsána transformační rovnicí:

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{D}.\vec{\mathbf{X}} + \mathbf{T}$$

Tato transformační rovnice definuje vztah mezi souřadnicemi bodu kontinua před a po deformaci. Vektor spojující tyto body pak lze chápat jako **vektor přemístění**, k němuž došlo v důsledku deformace.

Pole vektorů přemístění

Libovolnou deformaci pak lze vyjádřit pomocí **pole vektorů přemístění**.

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{X})$$

$$\mathrm{x}_\mathrm{i} = f_i(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)$$

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{X}} + \vec{\mathbf{U}}$$

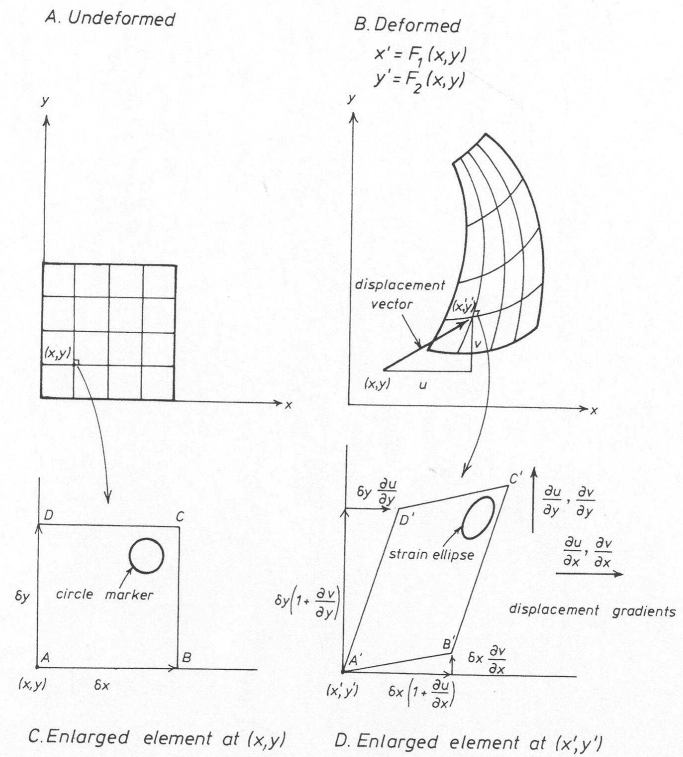


Figure 33.3. A Lagrangian view of the general transformation of a two-dimensional body, A, to its heterogeneously deformed state, B, according to two non-linear but continous displacement functions. The components of the displacement vector of an initial point (x, y) to final position (x', y') are u and v parallel to the x- and y-axes. C and D illustrate the details of changes taking place in a very small element of material around (x, y) and (x', y') respectively.

Pole vektorů přemístění

Přemístění lze pomocí transformačních rovnic popsat ze dvou pohledů – buď jako funkce definující konečné souřadnice v závislosti na původních souřadnicích, nebo naopak jako funkce definující původní souřadnice v závislosti na konečných.

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{X})$$

$$\mathrm{x}_{\mathrm{i}} = f_i(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)$$

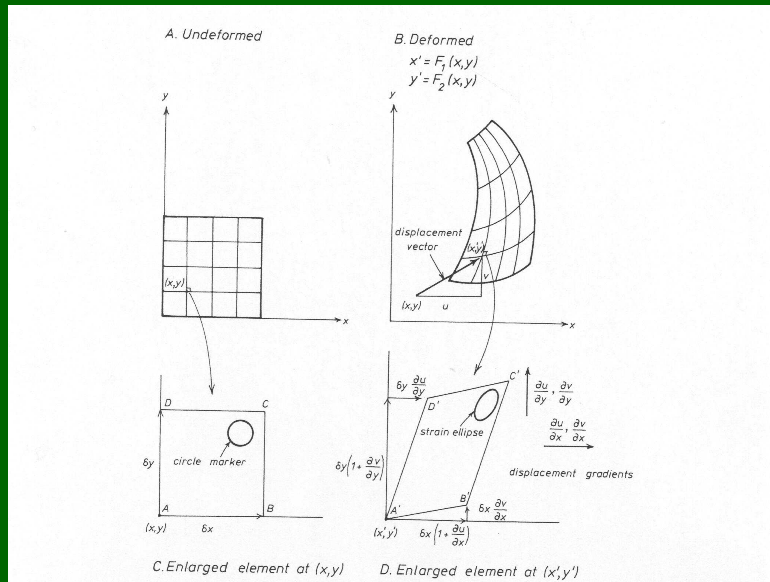


Figure 33.3. A Lagrangian view of the general transformation of a two-dimensional body, A, to its heterogeneously deformed state, B, according to two non-linear but continous displacement functions. The components of the displacement vector of an initial point (x, y) to final position (x', y') are u and v parallel to the x- and y-axes. C and D illustrate the details of changes taking place in a very small element of material around (x, y) and (x', y') respectively.

Pole vektorů přemístění

Funkce definující konečné souřadnice v závislosti na původních souřadnicích se označují jako **Lagrangeův popis přemístění**.

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{X})$$

$$\mathrm{x}_{\mathrm{i}} = f_i(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)$$

Joseph-Louis Lagrange
1736-1813

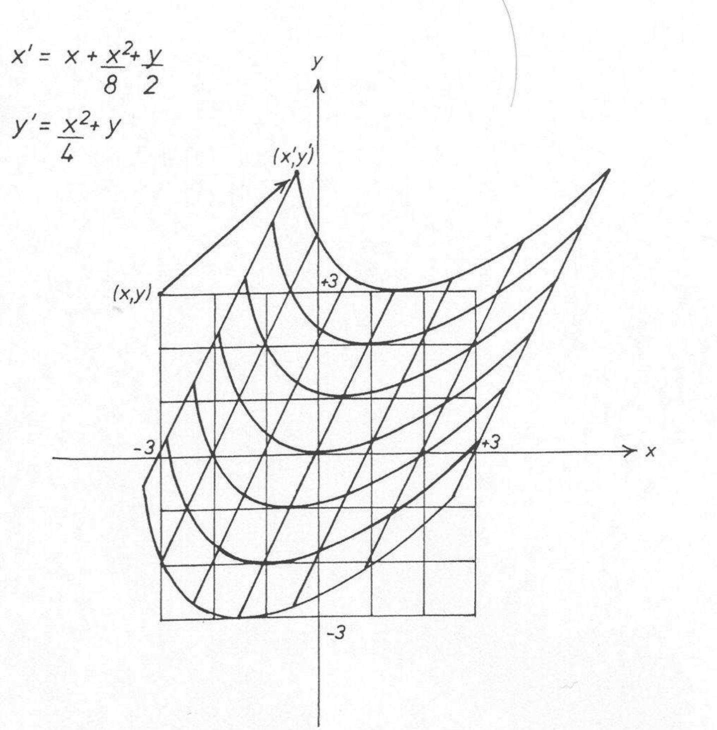


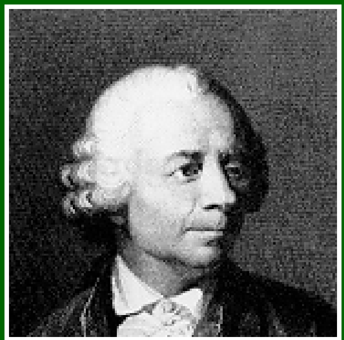
Figure 33.5. Lagrangian representation of the transformation of an initially orthogonal grid system according to Equations 33.21 (values of x from −3·0 to +3·0, and y from −3·0 to +3·0).

Pole vektorů přemístění

Funkce definující původní souřadnice v závislosti na konečných souřadnicích se označují jako **Eulerův popis přemístění**.

$$\mathbf{X} = f(\mathbf{x})$$

$$\mathrm{X}_{\mathrm{i}} = f_i(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$$



Leonhard Euler
1707-1783

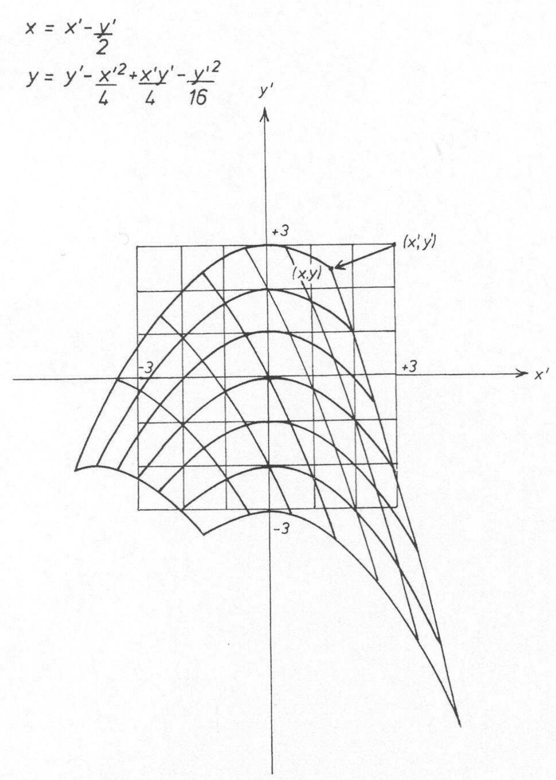


Figure 33.6. Eulerian representation of the same overall displacement pattern as that of Figure 33.5, according to the reciprocal displacement equations 33.20.

Elipsoid deformace

V dalších úvahách se nyní budeme zabývat pouze tenzorem deformace a nebudeme tedy uvažovat translaci.

Elipsoid deformace

Deformaci (s výjimkou translace) si lze geometricky vyjádřit pomocí tzv. **elipsoidu deformace**. Ten je definován jako tvar, který vznikne deformací původní jednotkové koule:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}.\mathbf{I}.\mathbf{X} = 1$$

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 1$$

Elipsoid deformace

Deformaci (s výjimkou translace) si lze geometricky vyjádřit pomocí tzv. **elipsoidu deformace**. Ten je definován jako tvar, který vznikne deformací původní jednotkové koule:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}.\mathbf{I}.\mathbf{X} = 1$$

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 1$$

Deformace je popsána transformací pomocí tenzoru deformace **D**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}.\mathbf{X}$$

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}.\mathbf{D}^{\mathrm{T}}.\mathbf{I}.\mathbf{D}.\mathbf{X} = 1$$

Elipsoid deformace

Deformační elipsoid je pak popsán maticí vzniklou ze vztahu **D**^{T}.**D**, která je vždy symetrická, třebaže matice deformace **D** obecně symetrická není.

$$\mathbf{X}^{\mathbf{T}}.\mathbf{D}^{\mathbf{T}}.\mathbf{I}.\mathbf{D}.\mathbf{X} = 1$$

Hlavní osy elipsoidu deformace - dané charakteristickými vektory matice - se nazývají **osy deformace**. Označují se obvykle jako **X** (osa maximálního prodloužení), **Y** (střední osa) a **Z** (osa maximálního zkrácení). Lze je popsat třemi nezávislými parametry.

Elipsoid deformace

Deformační elipsoid je pak popsán maticí vzniklou ze vztahu $\mathbf{D}^T.\mathbf{D}$, která je vždy symetrická, třebaže matice deformace **D** obecně symetrická není.

$$\mathbf{X}^T.\mathbf{D}^T.\mathbf{I}.\mathbf{D}.\mathbf{X} = 1$$

Charakteristická čísla matice - a tedy délky hlavních os deformačního elipsoidu - popisují velikost natažení či zkrácení ve směru paralelním s hlavní osou deformace.

Elipsoid deformace

Délky hlavních poloos deformačního elipsoidu odpovídají velikosti natažení **s** (stretch) v daném směru.

Délky hlavních poloos deformačního elipsoidu jsou označovány jako X (dlouhá osa - ve směru maximálního prodloužení), Y (střední osa) a Z (krátká osa - ve směru maximálního zkrácení).

Elipsoid deformace

Přestože jsou délky hlavních os deformačního elipsoidu popsány třemi parametry, pokud zanedbáme objemové změny (dilataci), budou pouze **dva** z nich **nezávislé**. Tyto dva parametry popisují **tvar** deformačního elipsoidu (třetí parametr by popisoval velikost a tedy dilataci).

Elipsoid deformace

Tyto dva parametry popisují **tvar** deformačního elipsoidu.
Tvar deformačního elipsoidu je obvykle popisován pomocí poměrů délek jeho hlavních os. Tyto poměry odpovídají elipticitě průřezů deformačního elipsoidu v řezech XY, XZ a YZ:

$$R_{XY} = \frac{X}{Y}$$

$$R_{XZ} = \frac{X}{Z}$$

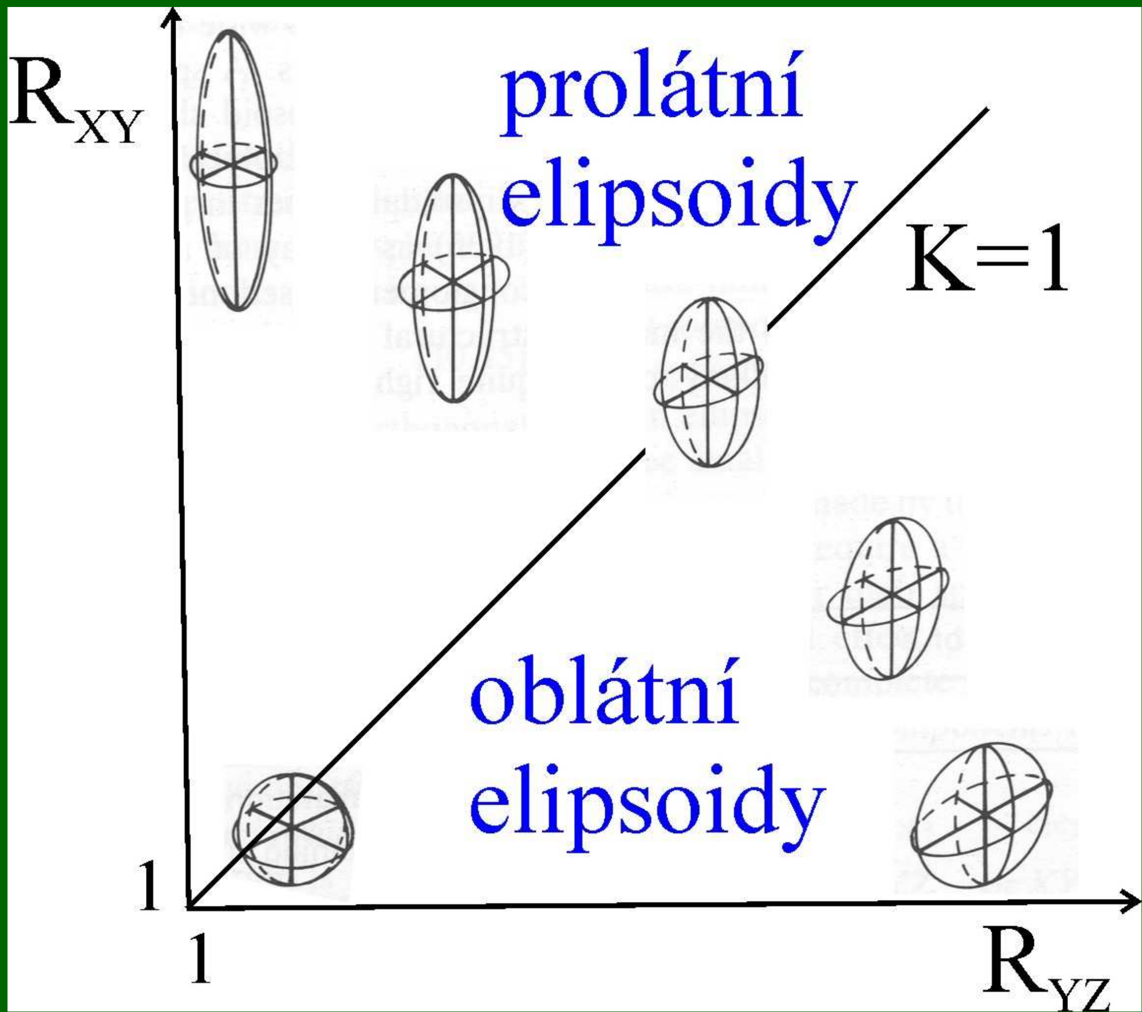
$$R_{YZ} = \frac{Y}{Z}$$

$$R_{XZ} = R_{XY} . R_{YZ}$$

Elipsoid deformace

Poměry R_{XY} a R_{YZ} jsou vynášeny do tzv. **Flinnova grafu** (Flinn 1962).

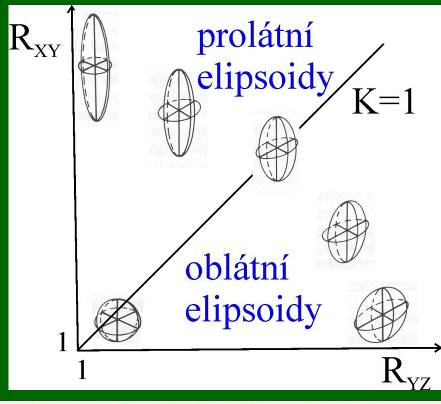
$$K = \frac{R_{XY} - 1}{R_{YZ} - 1}$$



Elipsoid deformace

Poměry R_{XY} a R_{YZ} jsou vynášeny do tzv. **Flinnova grafu** (Flinn 1962).

$$K = \frac{R_{XY} - 1}{R_{YZ} - 1}$$



Lze rozlišit pět základních tvarů deformačního elipsoidu:

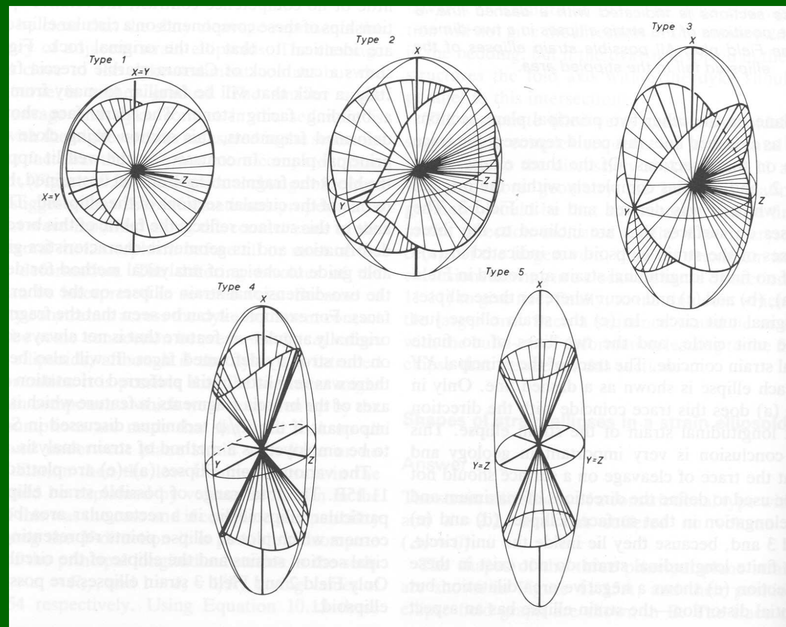
1. $R_{XY} = 1$, jednoosé zkrácení

2. $R_{XY} < R_{ZY}$

3. $R_{XY} = R_{YZ}$, rovinná deformace (plane strain)

4. $R_{XY} > R_{ZY}$

5. $R_{ZY} = 1$, jednoosé protažení



Čistý a jednoduchý střih

Stav tělesa po deformaci representuje **konečnou deformaci** (finite strain). Této konečné deformace bylo dosaženo v průběhu **deformačního procesu**, který obsahuje sérii po sobě jdoucích tzv. **deformačních přírůstků** (strain increments).

Ke shodné konečné deformaci lze za určitých podmínek dospět pomocí různých deformačních procesů obsahujících deformační přírůstky různého charakteru. Na základě charakteru deformačních přírůstků lze ovšem rozlišit dva základní deformační režimy.

Čistý a jednoduchý střih

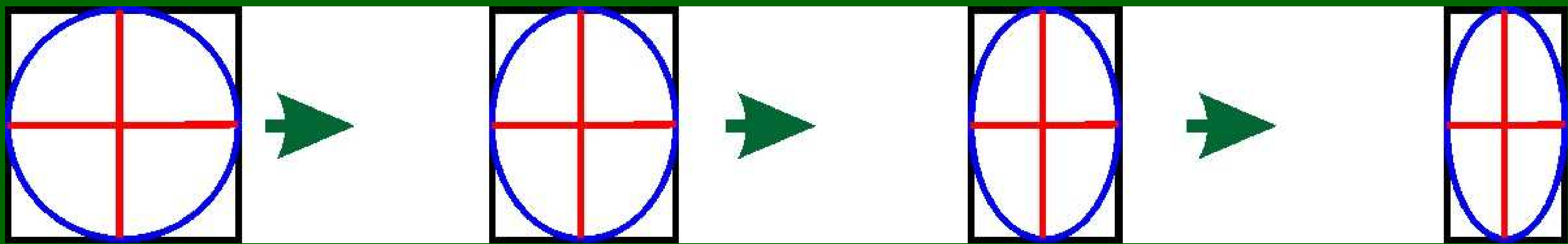
Ke shodné konečné deformaci lze za určitých podmínek dospět pomocí různých deformačních procesů obsahujících deformační přírůstky různého charakteru. Na základě charakteru deformačních přírůstků lze ovšem rozlišit dva základní deformační režimy:

Koaxiální deformace ... nerotační deformace, při které hlavní osy deformačního elipsoidu zachovávají v průběhu celého deformačního procesu stále stejnou orientaci.

Čistý a jednoduchý střih

Koaxiální deformace ... nerotační deformace, při které hlavní osy deformačního elipsoidu zachovávají v průběhu celého deformačního procesu stále stejnou orientaci.

Koaxiální deformací je tzv. **čistý střih** (pure shear). Tato deformace neobsahuje žádnou složku rotace.



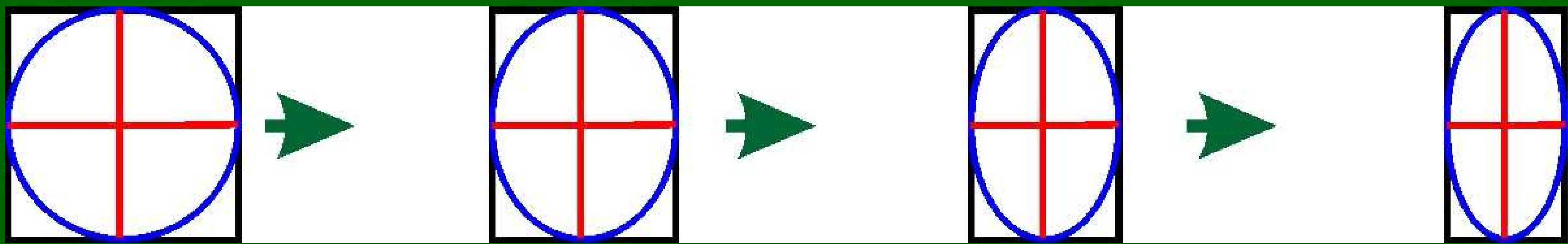
Čistý a jednoduchý střih

Dvourozměrně lze čistý střih s hlavními osami deformace paralelními se souřadnými osami vyjádřit transformací:

$$x = \sqrt{R}.X$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{R}}.Y$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{R}} \end{pmatrix}$$



Čistý a jednoduchý střih

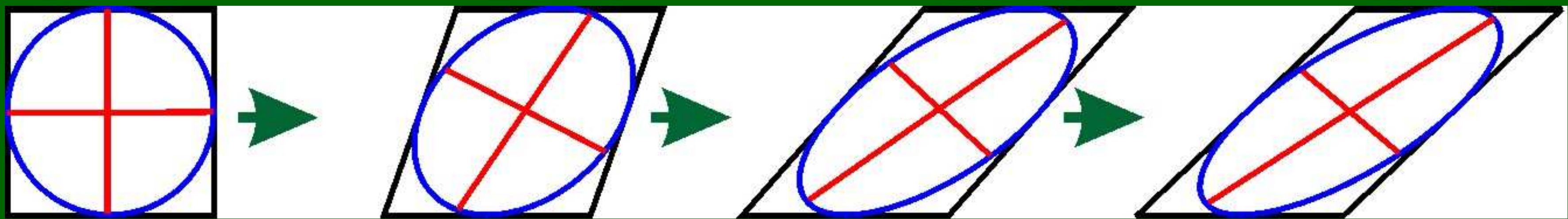
Ke shodné konečné deformaci lze za určitých podmínek dospět pomocí různých deformačních procesů obsahujících deformační přírůstky různého charakteru. Na základě charakteru deformačních přírůstků lze ovšem rozlišit dva základní deformační režimy:

Nekoaxiální deformace ... rotační deformace, při které hlavní osy deformačního elipsoidu v průběhu deformačního procesu rotují, jednotlivé deformační přírůstky tak jsou representovány různě orientovanými deformačními elipsoidy.

Čistý a jednoduchý střih

Nekoaxiální deformace ... rotační deformace, při které hlavní osy deformačního elipsoidu v průběhu deformačního procesu rotují, jednotlivé deformační přírůstky tak jsou representovány různě orientovanými deformačními elipsoidy.

Příkladem nekoaxiální deformace je tzv. **jednoduchý střih** (simple shear).



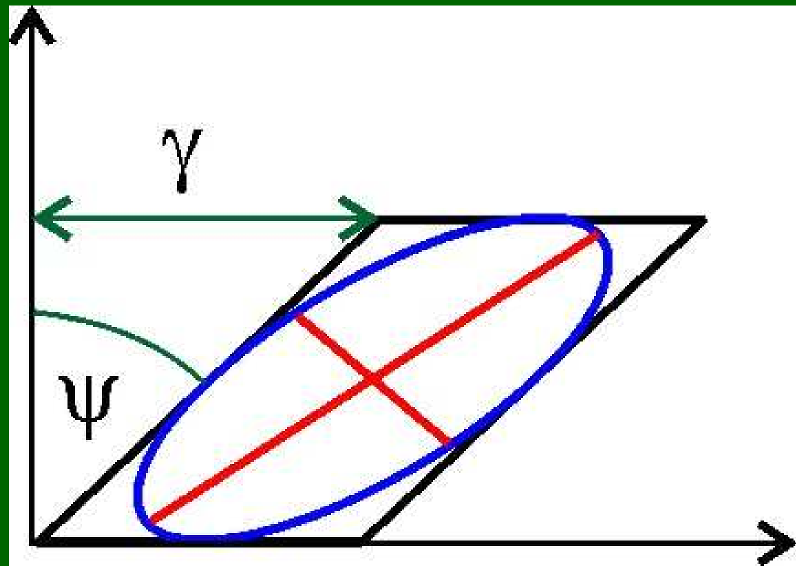
Čistý a jednoduchý střih

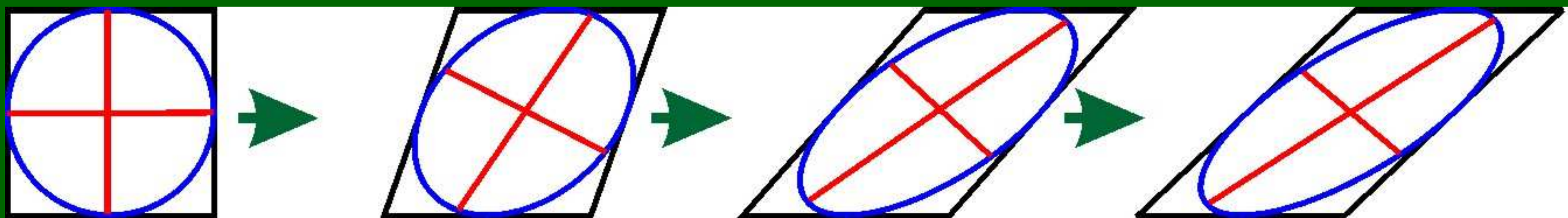
Dvourozměrně lze jednoduchý střih se směrem střihu paralelním s osou x vyjádřit transformací:

$$x = X - \gamma . Y$$
$$y = Y$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \tan\psi$$





Homogenní a nehomogenní deformace

Deformaci lze v každém bodě popsat pomocí 12 (případně 9 neuvažujeme-li translaci) nezávislých parametrů:

$$\vec{x} = \mathbf{D}.\vec{X} + \mathbf{T}$$

Homogenní deformace je popsána v každém bodě kontinua <u>stejnými</u> parametry. Její popis je nezávislý na volbě počátku souřadné soustavy.

Homogenní a nehomogenní deformace

Heterogenní deformace je popsána v každém bodě kontinua obecně různými parametry. Parametry popisující deformaci jsou tedy také funkcí místa (závisí na souřadnicích či na polohovém vektoru).

Funkční závislost parametrů deformace na poloze lze teoreticky matematicky popsat a lze tak odvodit transformační rovnice popisující heterogenní deformaci.

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{D}(\omega, \alpha, \varphi, a, b, c, \xi, \zeta, \psi) . \vec{\mathbf{X}} + \mathbf{T}(t_1, t_2, t_3)$$

$$\omega, \alpha, \varphi, a, b, c, \xi, \zeta, \psi, t_1, t_2, t_3 = f(X_1, X_2, X_3)$$

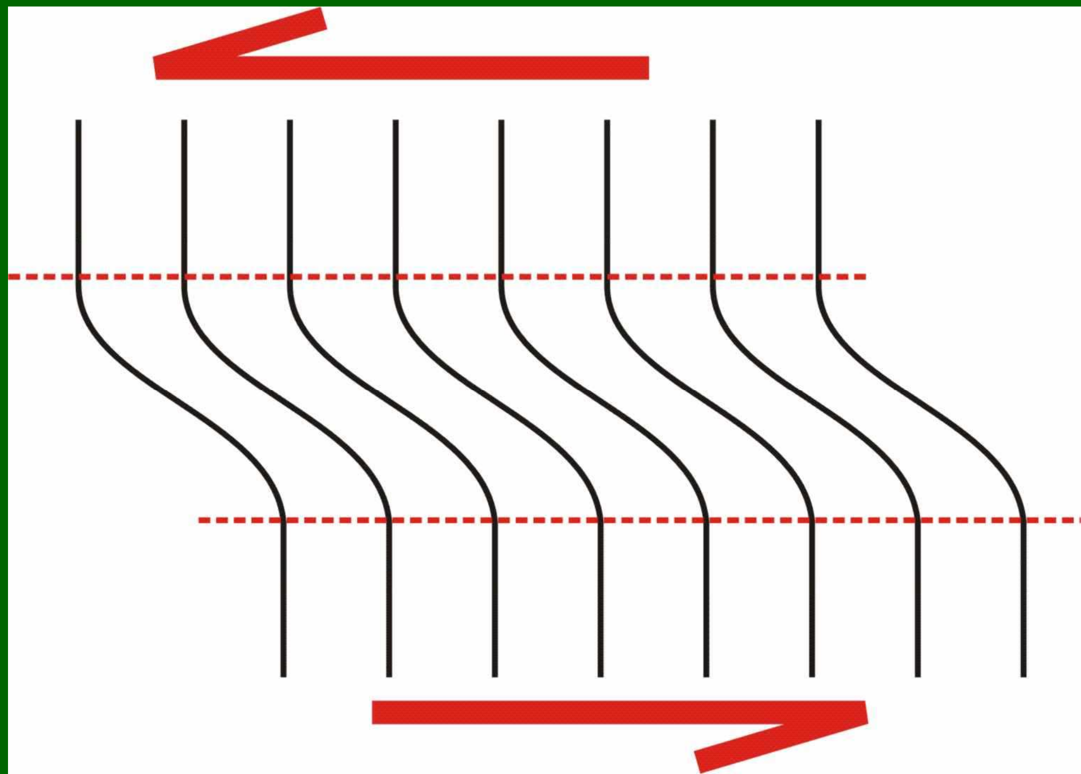
Homogenní a nehomogenní deformace

S heterogenní deformací se setkáváme poměrně běžně a to v různých měřítcích.

Příkladem heterogenní deformace může být např. deformace ve vrásách (různá deformace v zámku a v rameni vrásy, různá deformace uvnitř vrstev a při vrstevním rozhraní, …), nebo deformace ve střižných zónách.

Střižné zóny

Střižnou zónu lze chápat jako zónu v níž se soustředí deformace, zatímco deformace mimo tuto zónu je zanedbatelná či homogenní. Uvnitř této zóny je pak deformace závislá na místě (obecně např. na vzdálenosti od středu zóny).



Střižné zóny

Obecně lze deformaci ve střižné zóně popsat jako kombinaci tří různých deformačních polí.

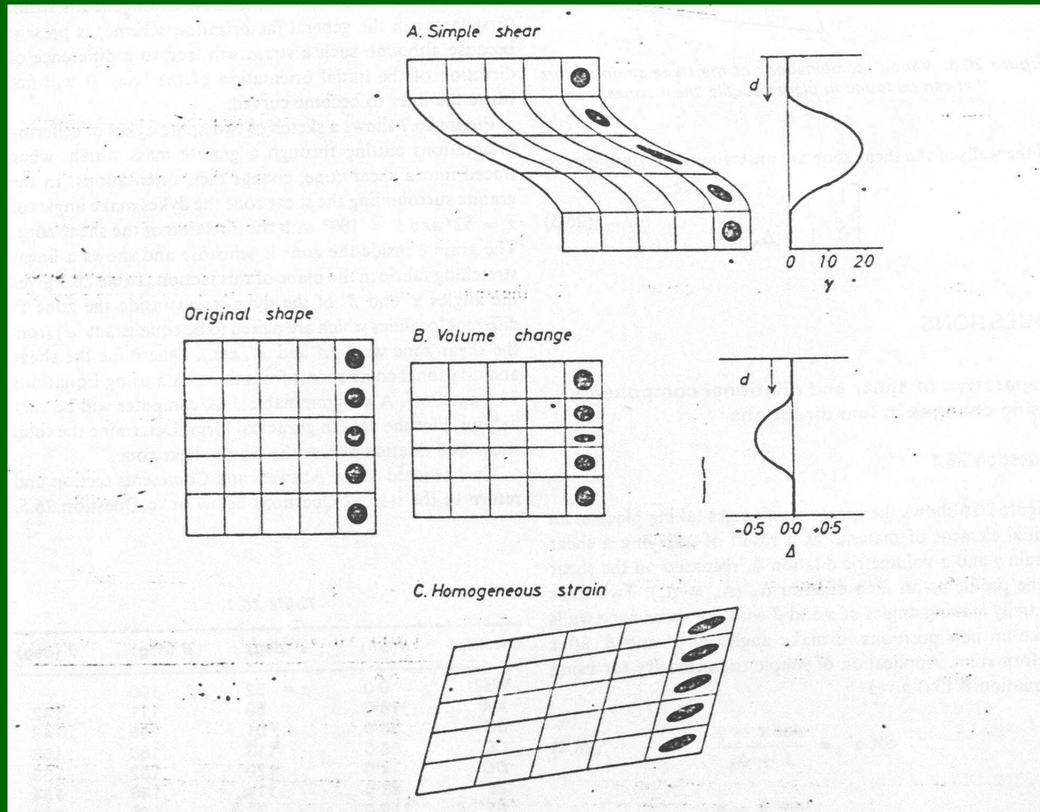


Figure 26.4. Main types of strain factors that can exist in planar ductile shear zones.

Střižné zóny

A) Heterogenní jednoduchý střih se střižnou plochou paralelní s rovinou střižné zóny.

Velikost střihu γ je funkcí místa.

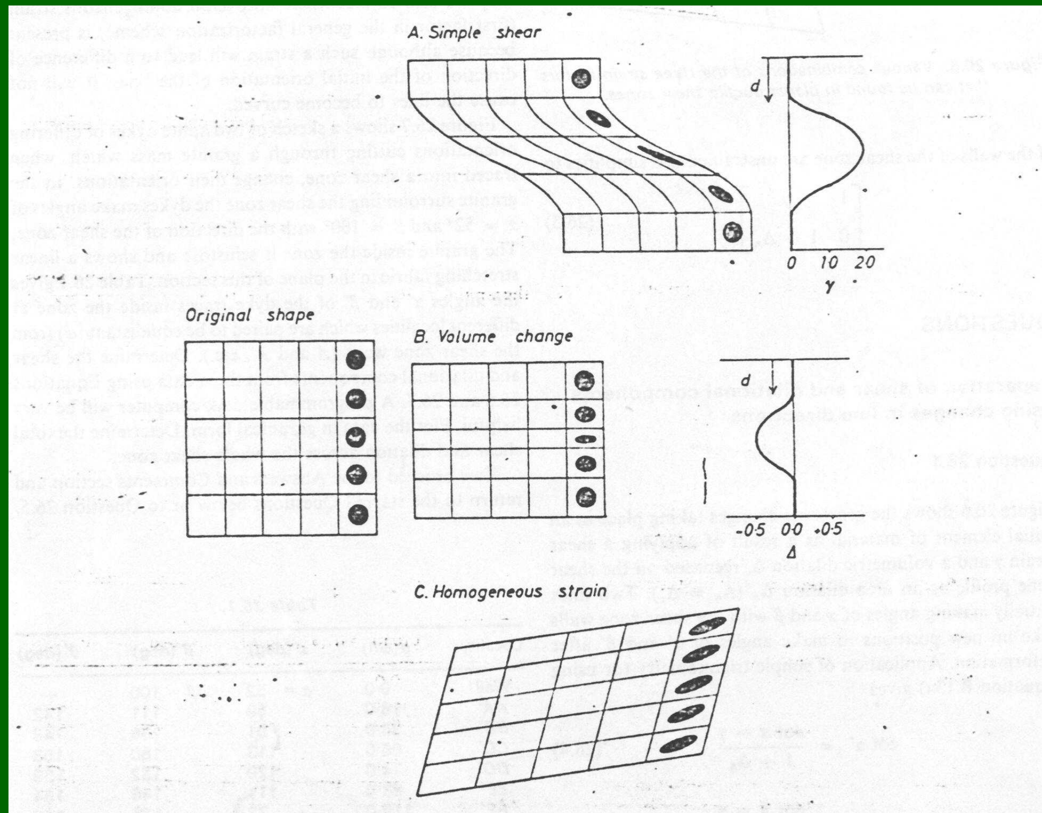


Figure 26.4. Main types of strain factors that can exist in planar ductile shear zones.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = f(d)$$

Střižné zóny

B) Heterogenní objemová změna spojená s přemístěním kolmým na rovinu střižné zóny.

Velikost dilatace Δ_A je funkcí místa.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\Delta_A \end{bmatrix}$$

$$\Delta_A = f(d)$$

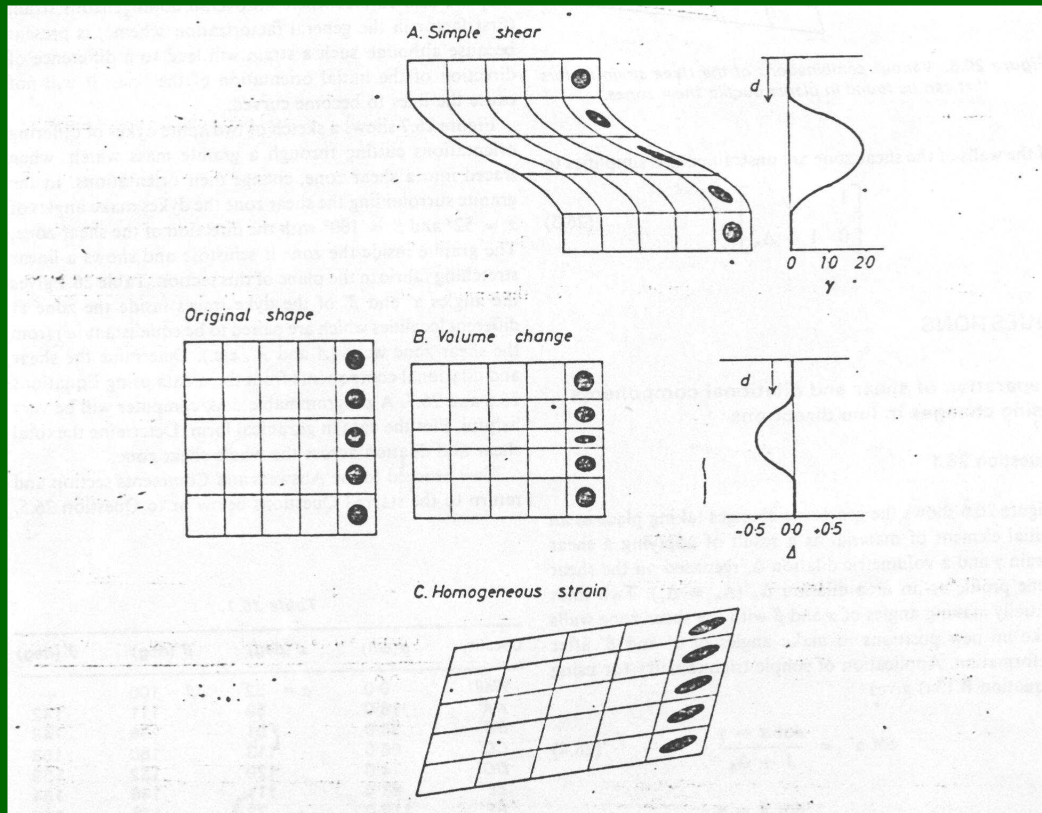


Figure 26.4. Main types of strain factors that can exist in planar ductile shear zones.

Střižné zóny

C) Homogenní deformace libovolného typu.

V 2D prostředí je popsána čtyřmi nezávislými parametry, které nezávisí na poloze.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \neq f(d)$$

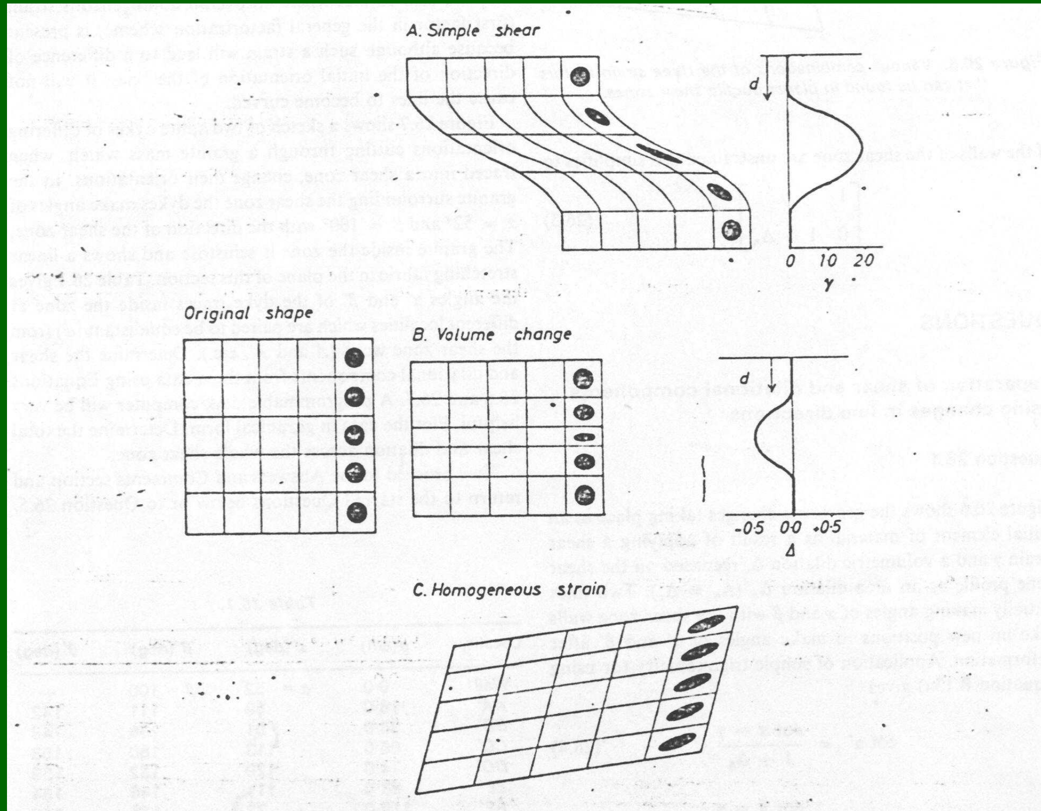


Figure 26.4. Main types of strain factors that can exist in planar ductile shear zones.

Střižné zóny

Celková heterogenní deformace střižné zóny je pak chápána jako kombinace uvedených tří deformací, jejichž parametry jsou hledány. Přitom je nutné si uvědomit, že při skládání dílčích deformačních polí záleží na pořadí!

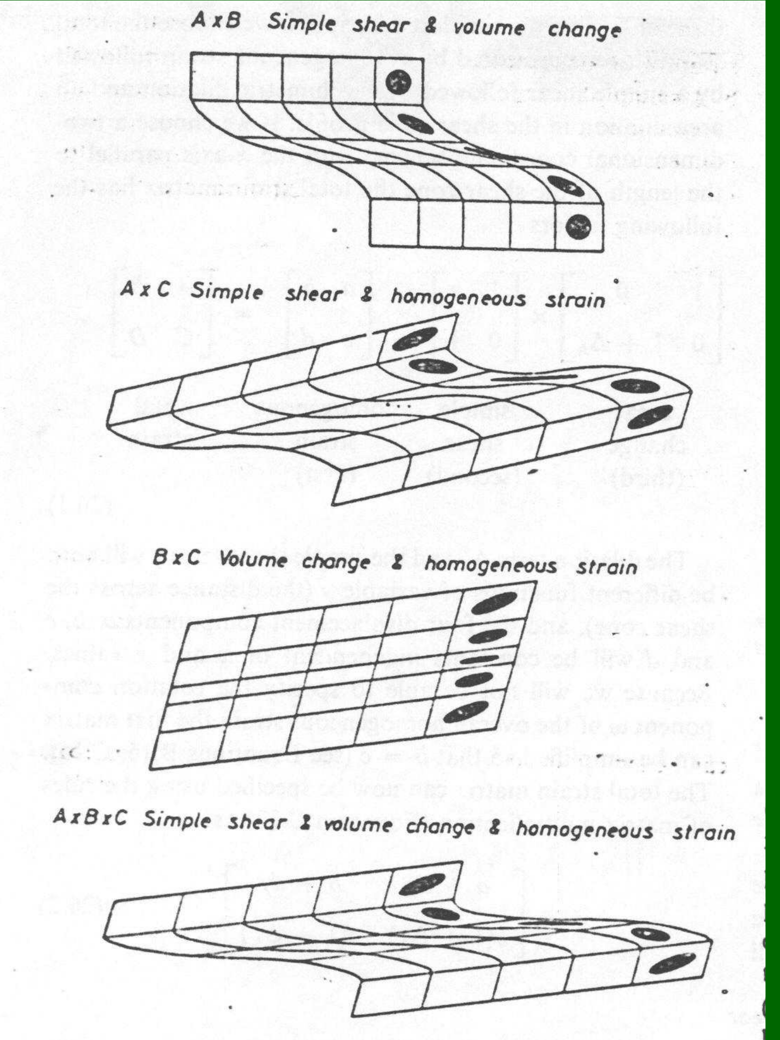


Figure 26.5. Various combinations of the three strain factors that can be found in planar ductile shear zones.

Střižné zóny

Předpokládáme-li např. nejprve homogenní deformaci, následovanou heterogenním jednoduchým střihem a nakonec pak heterogenní objemovou změnu, můžeme výslednou heterogenní deformaci vyjádřit jako:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\Delta_A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{21}\gamma & a_{12} + a_{22}\gamma \\ a_{21}(1+\Delta_A) & a_{22}(1+\Delta_A) \end{bmatrix}$$

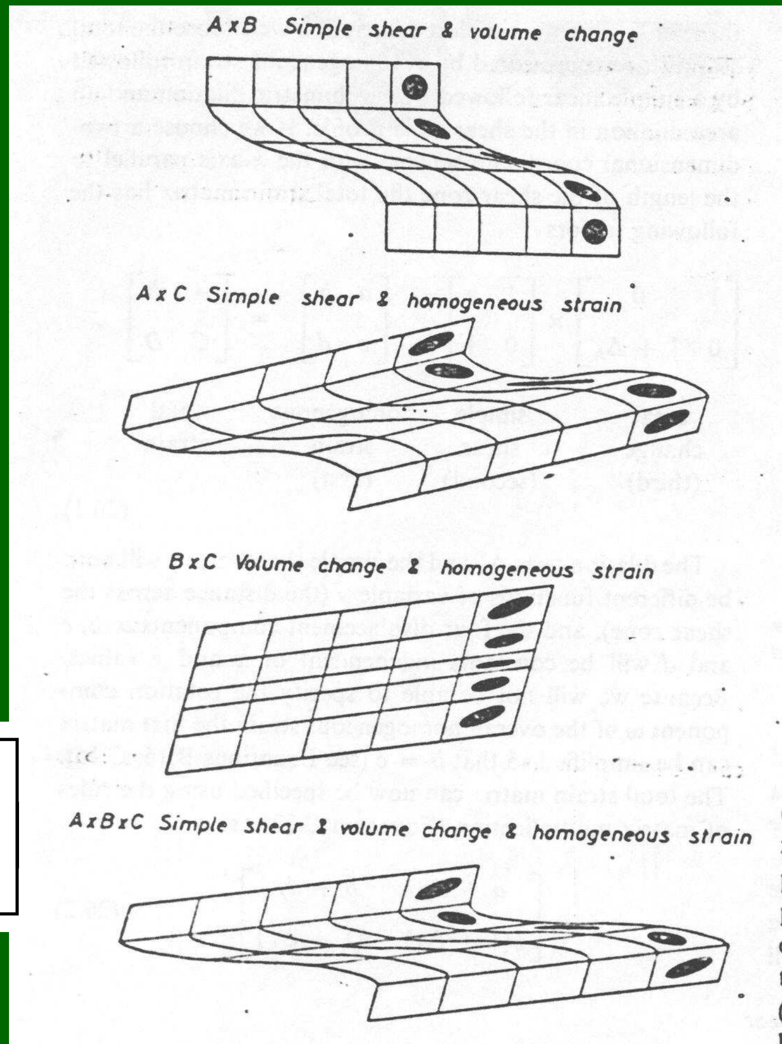


Figure 26.5. Various combinations of the three strain factors that can be found in planar ductile shear zones.

Střižné zóny

Zvolíme-li jiné pořadí jednotlivých dílčích polí, získáme jinou heterogenní deformaci.

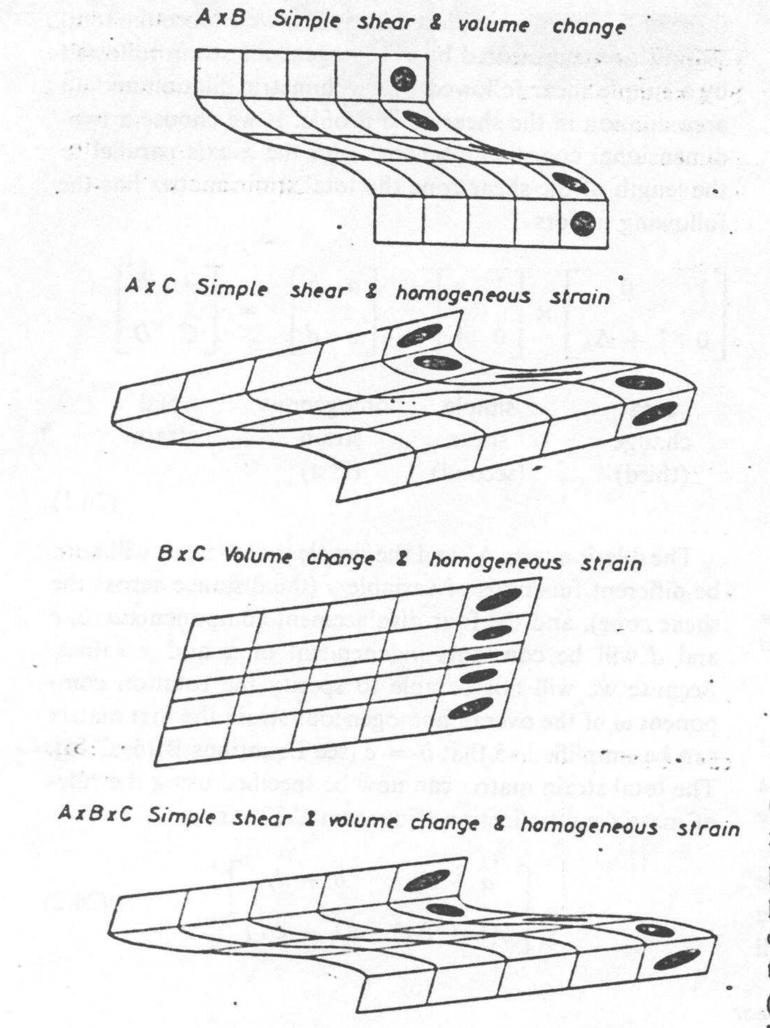


Figure 26.5. Various combinations of the three strain factors that can be found in planar ductile shear zones.