Deformace v jednorozměrném prostředí

V jednom rozměru lze deformaci chápat jako změnu délky úsečky (natažení, či zkrácení). Porovnání původní délky úsečky a délky po deformaci pak určuje míru deformace.

Deformace v jednorozměrném prostředí

Používá se více parametrů popisujících jednorozměrnou deformaci, příkladem takového parametru je např. elongace e.

Elongace (extension) e ... poměr rozdílu délek deformované (l) a původní (l_0) úsečky ku původní délce:

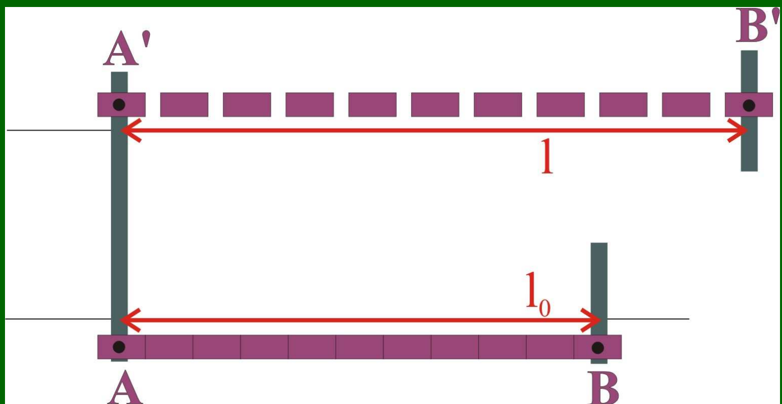
$$e = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Kladné hodnoty elongace znamenají prodloužení, záporné pak zkrácení délky úsečky.

Deformace v jednorozměrném prostředí

Chceme-li tedy kvantifikovat zkrácení či natažení, potřebujeme znát původní i konečnou délku úsečky.
Pro vyčíslení velikosti natažení nám mohou posloužit např. budinované objekty.

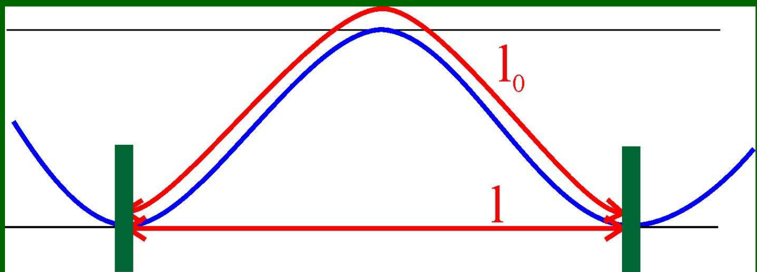
$$e = \frac{l - l_0}{l_0}$$



Deformace v jednorozměrném prostředí

Pro vyčíslení velikosti zkrácení nám mohou posloužit např. zvrásněné objekty.

$$e = \frac{l - l_0}{l_0}$$



Deformace v dvourozměrném prostředí

Ve dvou rozměrech lze popsat deformaci (nebudeme již uvažovat translaci) pomocí dvourozměrného tenzoru deformace:

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{D}.\vec{\mathbf{X}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = D_{11}.X_1 + D_{12}.X_2$$
$$x_2 = D_{21}.X_1 + D_{22}.X_2$$

Deformace v dvourozměrném prostředí

Tenzor deformace má v dvourozměrném prostředí tedy čtyři nezávislé parametry, z nichž jeden popisuje dilataci, jeden rotaci (úhel rotace ω) a dva distorzi (elipticita deformace R; úhel ϕ svíraný směrem dlouhé osy deformační elipsy - tj. směrem maximálního protažení - a osou x).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Deformace v dvourozměrném prostředí

Deformace - změna polohových vektorů - se nám obecně projeví v tělese dvěma různými způsoby (předpokládejme dále homogenní deformaci):

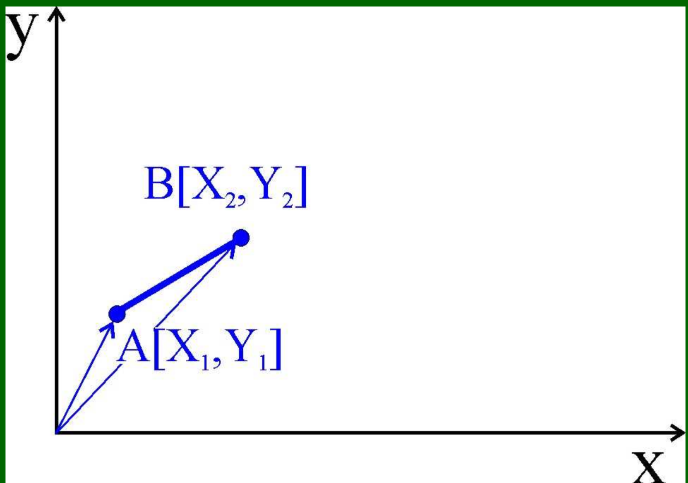
1. změny délek

2. změny úhlů

Deformace v dvourozměrném prostředí

1. změny délek

Změna délek může být popsána jako změna délky úsečky vymezené dvěma body **A[X_1,Y_1]** a **B[X_2,Y_2]**. Délka úsečky má před deformací velikost:



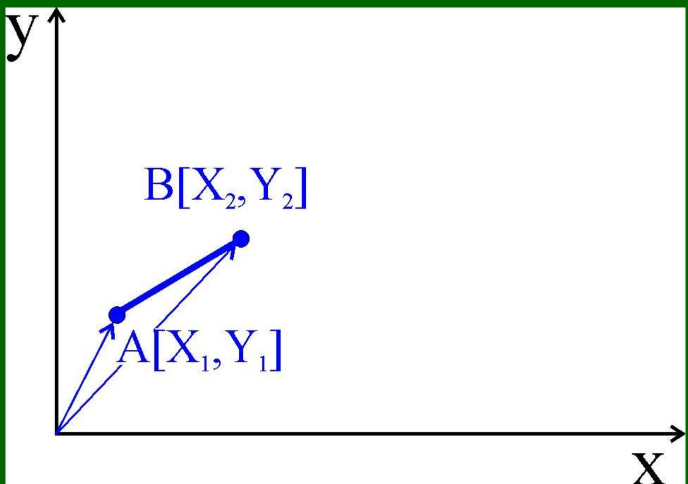
$$|AB| = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$$

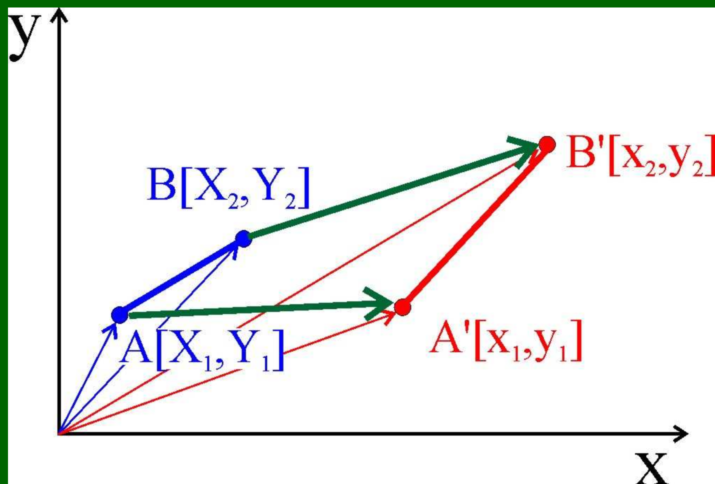
Deformace v dvourozměrném prostředí

Při deformaci dochází ke změně polohových vektorů podle transformační rovnice:

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{D}.\vec{\mathbf{X}}$$

Úsečka je pak po deformaci vymezena body **A‘[x_1,y_1]** a **B‘[x_2,y_2]**.



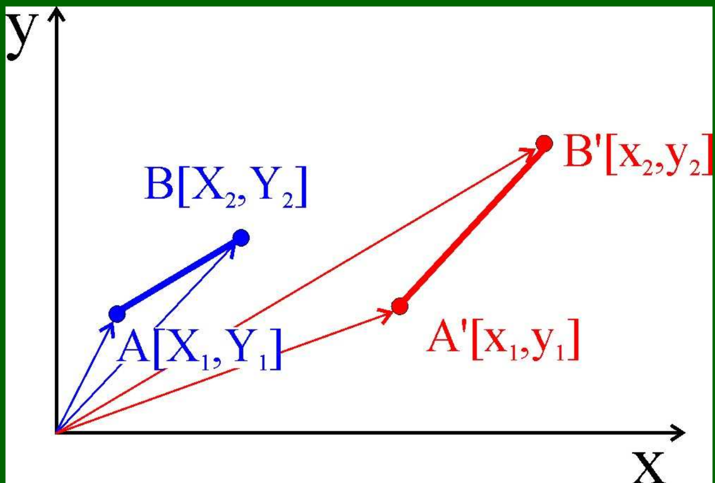


Deformace v dvourozměrném prostředí

Délka úsečky má po deformací velikost:

$$|A'B'| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

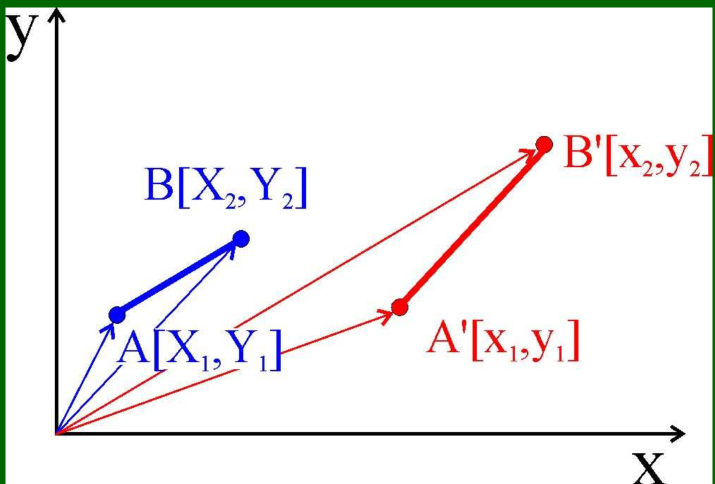
$$|A'B'| = \sqrt{[D_{11}(X_1 - X_2) + D_{12}(Y_1 - Y_2)]^2 + [D_{21}(X_1 - X_2) + D_{22}(Y_1 - Y_2)]^2}$$



Deformace v dvourozměrném prostředí

Změnu délky úsečky AB si pak lze vyjádřit např. pomocí elongace:

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{|A'B'| - |AB|}{|AB|}$$

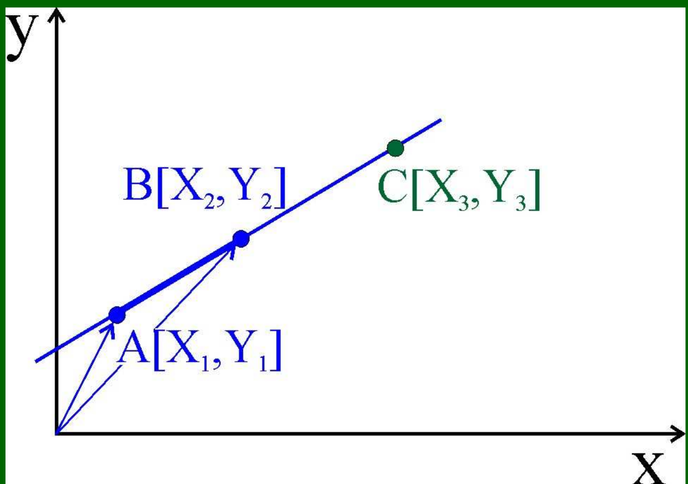


Deformace v dvourozměrném prostředí

Zvolíme-li na přímce dané body AB libovolný další bod **C[X_3,Y_3]**, pak lze z parametrického vyjádření přímky odvodit, že souřadnice bodu **C** mají tvar:

$$X_3 = X_1 + k\left(X_2 - X_1\right)$$
$$Y_3 = Y_1 + k\left(Y_2 - Y_1\right)$$

kde k je reálné číslo

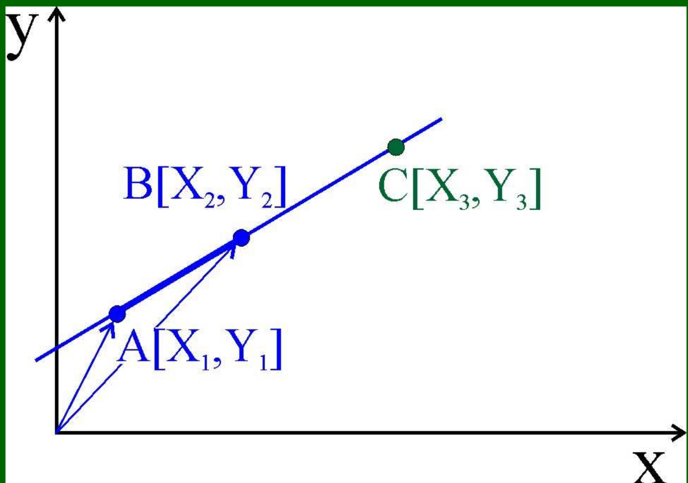


Deformace v dvourozměrném prostředí

Velikost úsečky AC je tedy:

$$|\mathrm{AC}| = \sqrt{(X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2}$$

$$|\mathrm{AC}| = \sqrt{k^2(X_1 - X_2)^2 + k^2(Y_1 - Y_2)^2} = k|\mathrm{AB}|$$



$$X_3 = X_1 + k(X_2 - X_1)$$
$$Y_3 = Y_1 + k(Y_2 - Y_1)$$

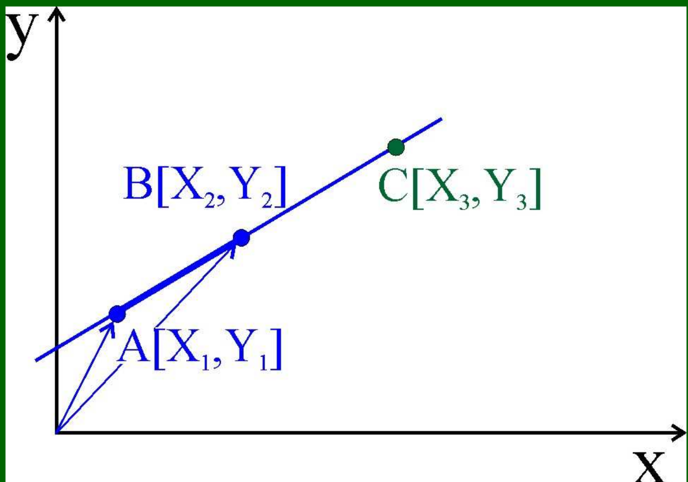
Deformace v dvourozměrném prostředí

Podobně po deformaci je velikost úsečky A‘C‘:

$$|A'C'| = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$$

$$|A'C'| = \sqrt{[D_{11}(X_1 - X_3) + D_{12}(Y_1 - Y_3)]^2 + [D_{21}(X_1 - X_3) + D_{22}(Y_1 - Y_3)]^2}$$

$$|A'C'| = \sqrt{[kD_{11}(X_1 - X_2) + kD_{12}(Y_1 - Y_2)]^2 + [kD_{21}(X_1 - X_2) + kD_{22}(Y_1 - Y_2)]^2} = k|A'B'|$$



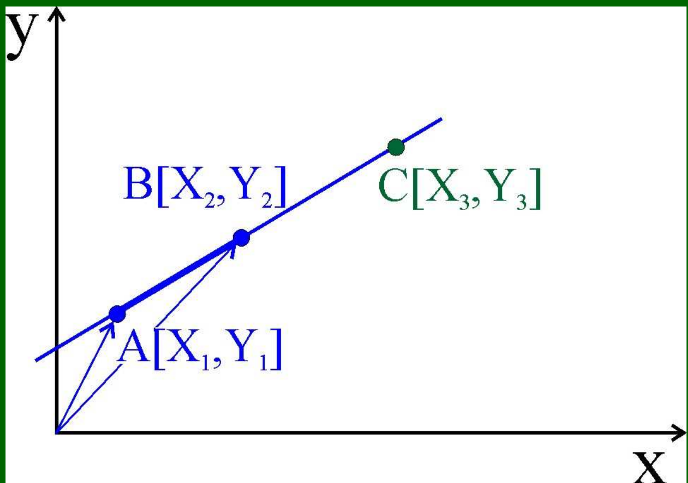
$$X_3 = X_1 + k(X_2 - X_1)$$
$$Y_3 = Y_1 + k(Y_2 - Y_1)$$

Deformace v dvourozměrném prostředí

Elongace úsečky AC je tedy:

$$e = \frac{|A'C'| - |AC|}{|AC|} = \frac{k|A'B'| - k|AB|}{k|AB|} =$$

$$= \frac{k}{k}\left(\frac{|A'B'| - |AB|}{|AB|}\right) = \frac{|A'B'| - |AB|}{|AB|}$$



$$X_3 = X_1 + k(X_2 - X_1)$$
$$Y_3 = Y_1 + k(Y_2 - Y_1)$$

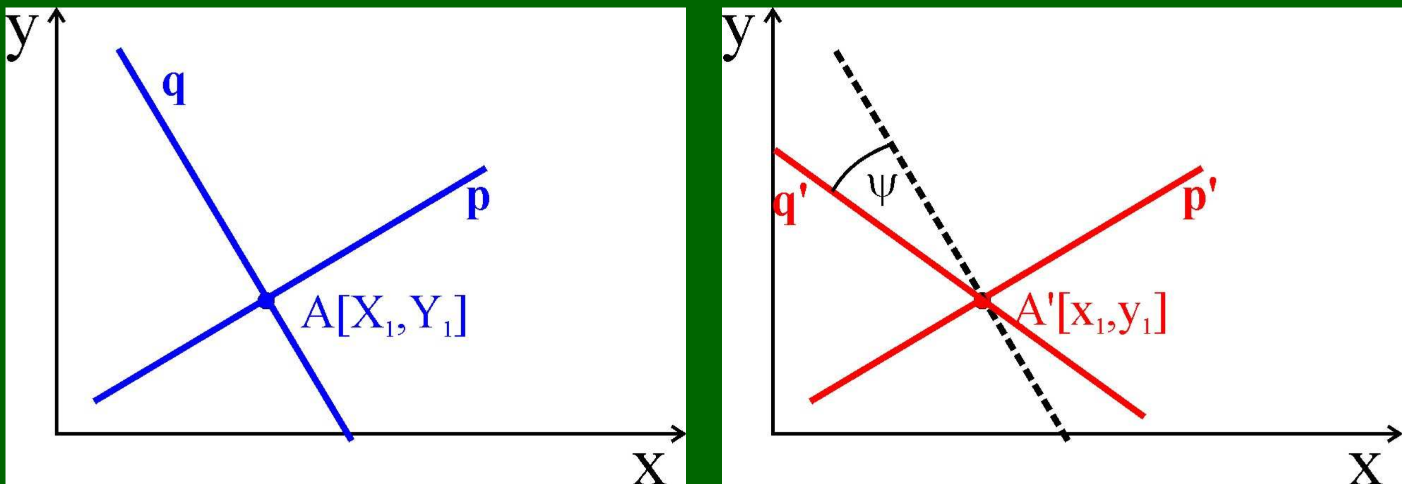
Deformace v dvourozměrném prostředí

Elongace je tedy funkcí **matice deformace** a **směru** (orientace deformované úsečky) - nezávisí na přesné poloze a velikosti úsečky.

Deformace v dvourozměrném prostředí

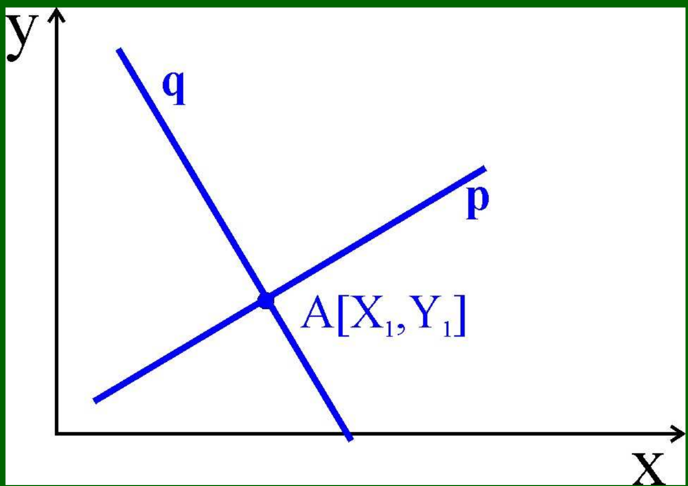
2. změny úhlů

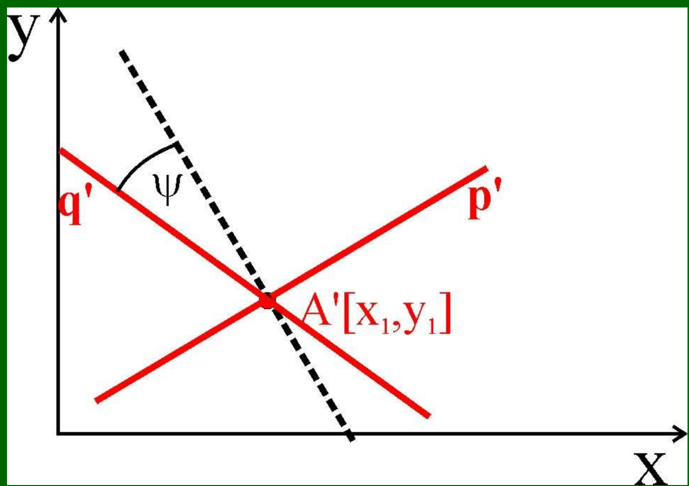
Změna úhlů může být popsána jako změna velikosti úhlu svíraného dvěma přímkami, které byly původně vzájemně kolmé.



Deformace v dvourozměrném prostředí

Sledujeme-li změnu úhlu pro přímku **p**, pak je tato změna definována velikostí úhlu ψ, který po deformaci svírá přímka **q'** (přímka původně kolmá k přímce **p**) a přímka kolmá k deformované přímce **p'**.

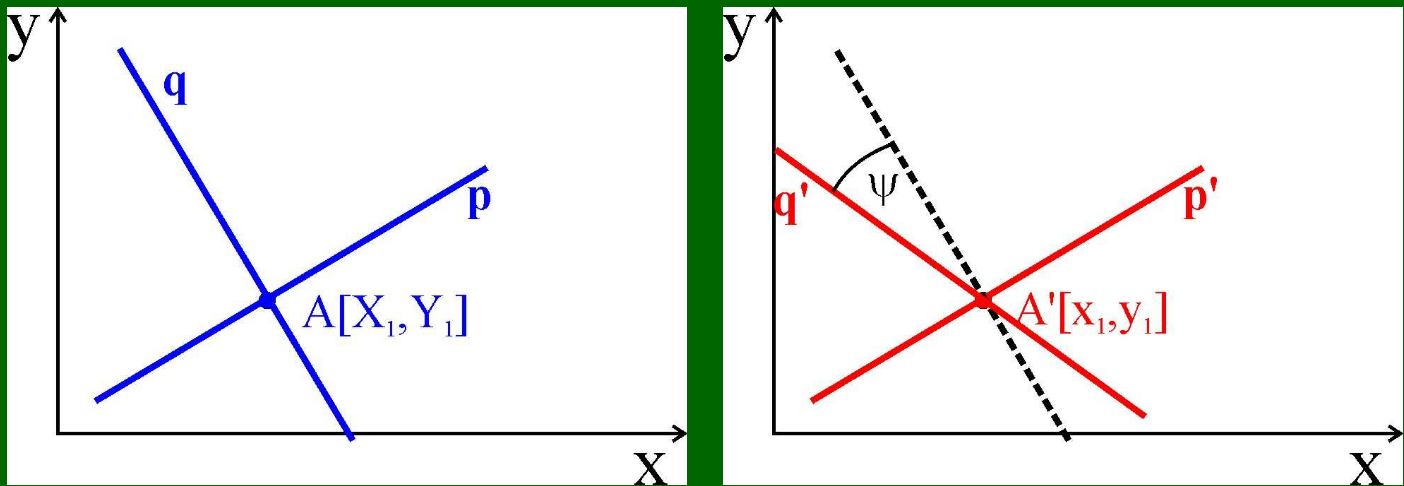




Deformace v dvourozměrném prostředí

Úhel ψ se nazývá **úhlová střižná deformace** (angular shear strain).
Jeho tangens odpovídá velikosti veličiny γ nazývané **střižná deformace** (shear strain).

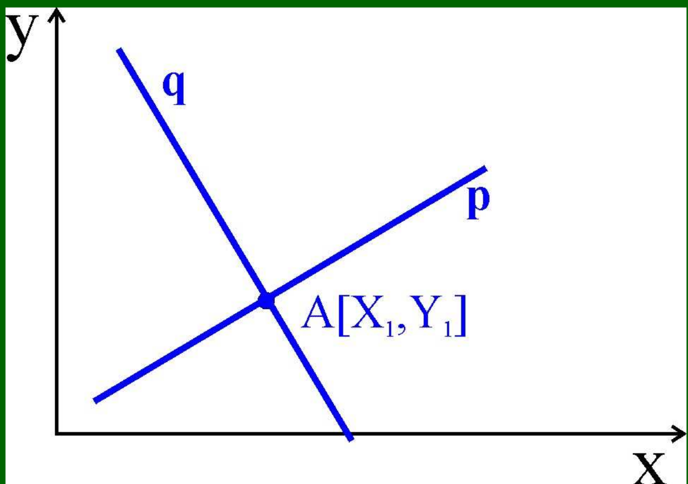
$$\gamma = \tan \psi$$

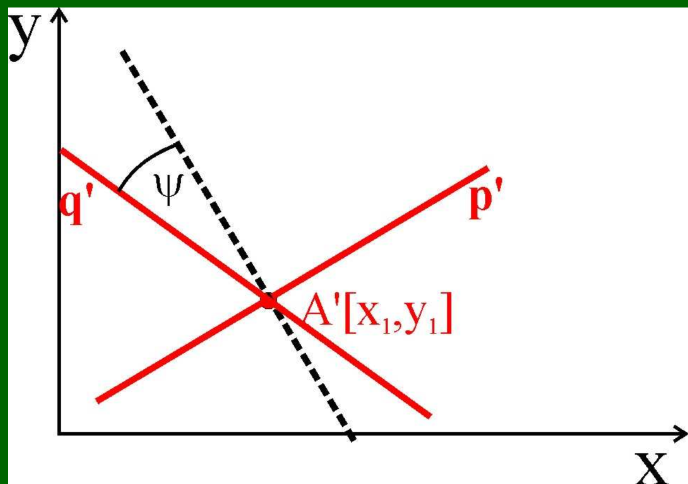


Deformace v dvourozměrném prostředí

Je-li původní kolmice (přímka **q**) „rotována“ vůči kolmici k přímce **p‘** proti směru hodinových ručiček, nabývá úhel ψ kladných hodnot.

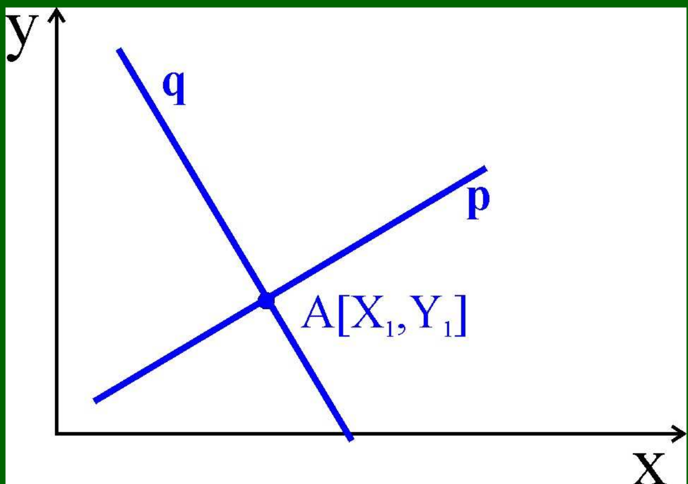
Je-li původní kolmice „rotována“ vůči kolmici k přímce **p‘** po směru hodinových ručiček, nabývá úhel y záporných hodnot.

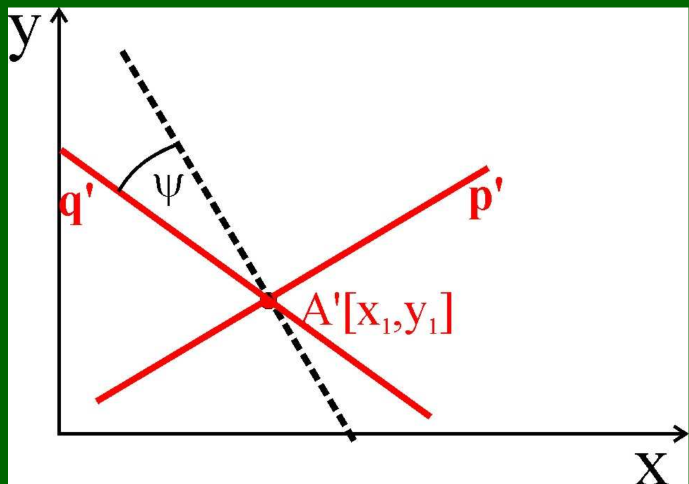




Deformace v dvourozměrném prostředí

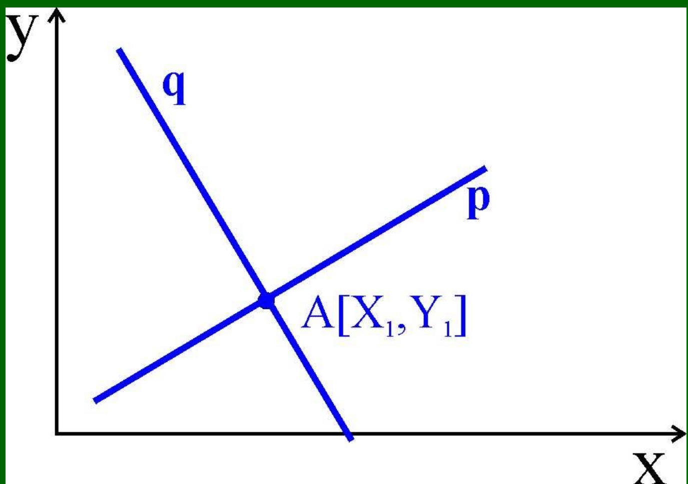
Lze ukázat, že také střižná deformace je funkcí **matice deformace** a **směru** (orientace přímky **p**) a nezávisí na přesné poloze přímky p ani průsečíku přímek **p** a **q** (bod **A**).

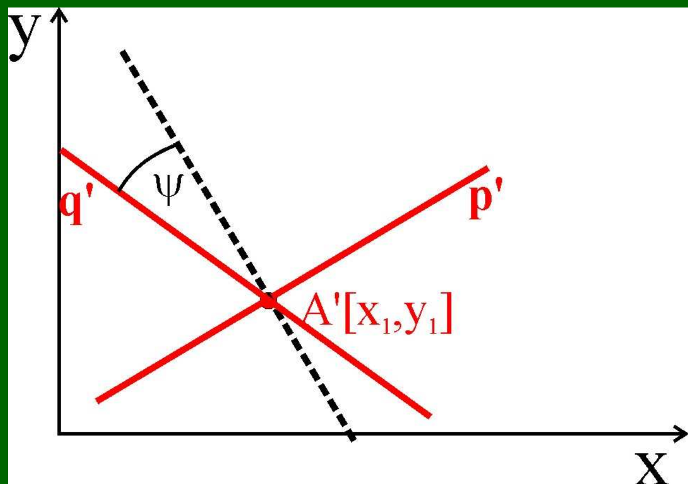




Deformace v dvourozměrném prostředí

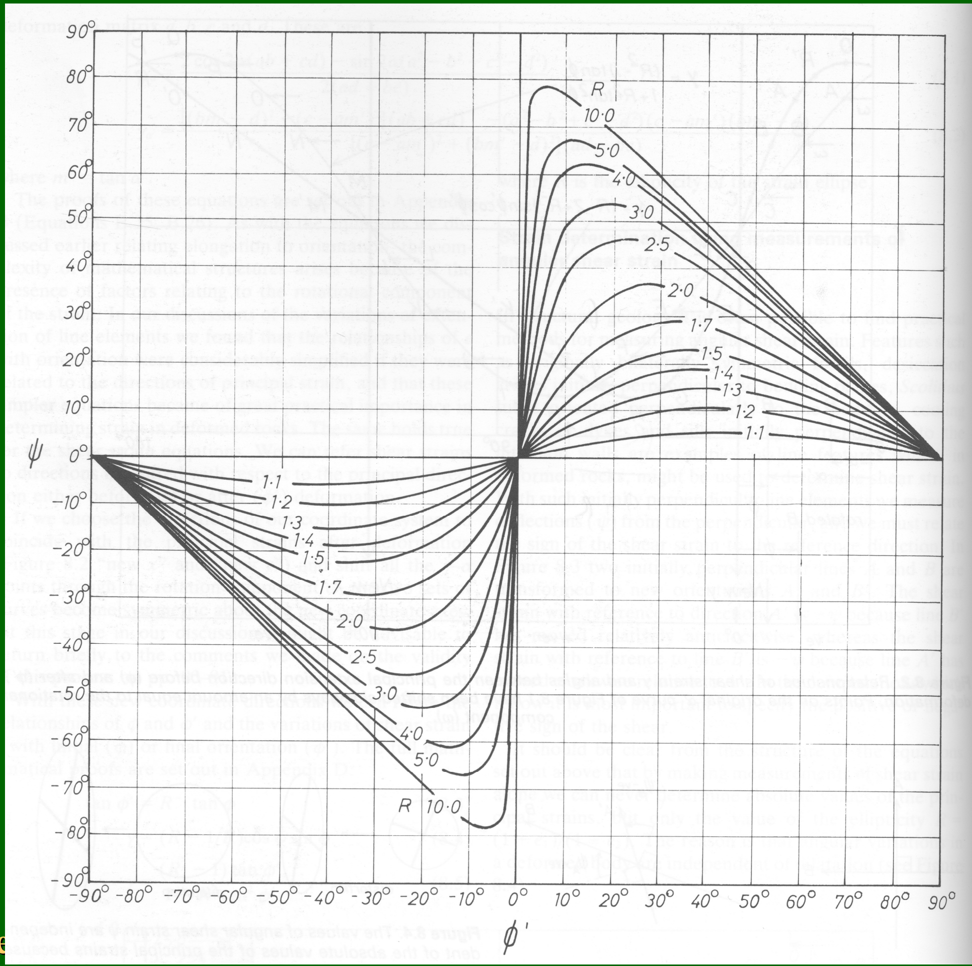
Uvažujeme-li pouze **distorzi**, kterou lze popsat elipticitou deformace a směrem maximálního protažení - pak je úhlová střižná deformace ψ funkcí pouze **elipticity deformace** **R** a **orientace** (odchylky od směru maximálního protažení ϕ‘).





Deformace v dvourozměrném prostředí

V roce 1956 popsal německý geolog Hans Breddin (1900-1973) techniku umožňující grafické znázornění zmíněného vztahu - tzv. **Breddinův graf**.



Mohrova kružnice pro deformaci

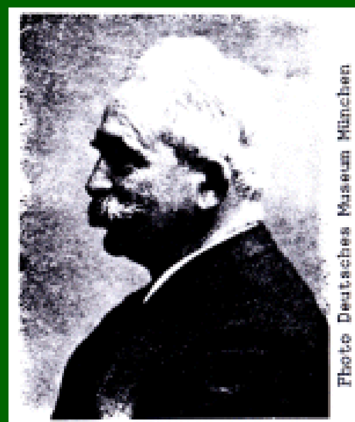
Vraťme se nyní k tenzoru deformace **D** v 2D prostředí.

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{D}.\vec{\mathbf{X}} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Jakýkoli tenzor druhého řádu lze zobrazit pomocí tzv. Mohrovy konstrukce odvozené Otto Mohrem. Tedy i tenzor deformace lze v dvourozměrném prostředí vyjádřit pomocí této Mohrovy konstrukce.

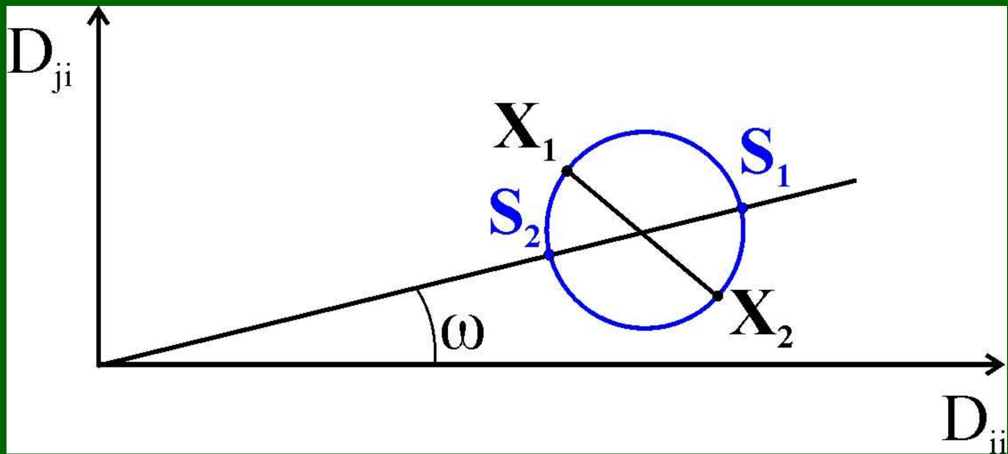
Otto Mohr

(1835-1918)



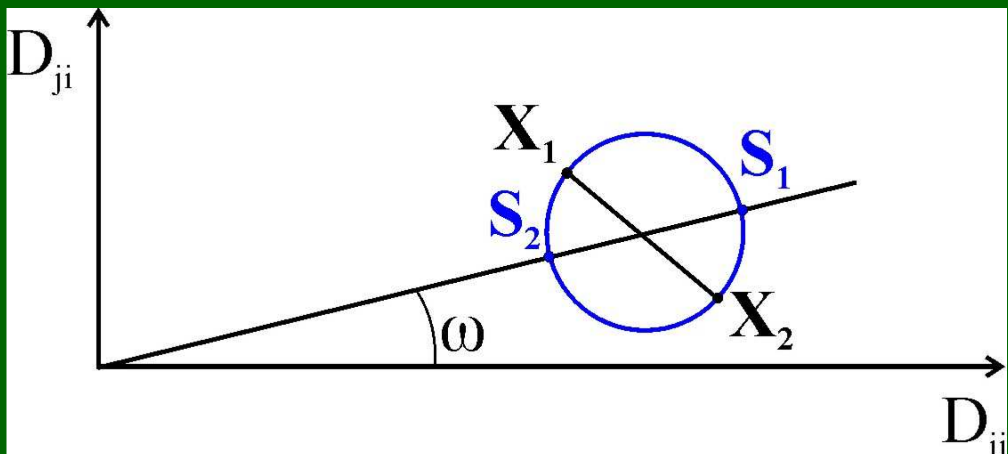
Mohrova kružnice pro deformaci

Zvolíme-li souřadnou soustavu, kde na vodorovnou osu vynášíme velikosti složek deformační matice ležící na hlavní diagonále (D_{11}, D_{22}) a na svislou osu vynášíme velikosti složek ležících mimo hlavní diagonálu ($-D_{21}$, D_{12}), lze ukázat, že body X_1 [D_{11}, $-D_{21}$] a X_2 [D_{22}, D_{12}] získané pro různě orientované souřadné osy (tj. pro různé hodnoty úhlu ϕ) leží na kružnici. Navíc body X_1 a X_2 leží na úsečce, která prochází středem zmíněné kružnice.



Mohrova kružnice pro deformaci

Zmíněná kružnice odpovídá tzv. Mohrově kružnici pro deformaci. Spojnice jejího středu a počátku soustavy svírá s osou D_{ii} úhel odpovídající úhlu rotace (v případě přítomnosti rotační složky). Vzdálenosti bodů S_1 a S_2 (průsečíky Mohrovy kružnice a přímky spojující střed kružnice s počátkem soustavy) odpovídají velikosti distorze (plus případně dilatace).



Mohrova kružnice pro deformaci

Složky matice deformace lze vyjádřit také pomocí střižné a délkové deformace určené pro určitý konkrétní směr a to pomocí dvou veličin:

Reciproká kvadratická elongace λ‘ vyjadřuje délkové změny:

$$\lambda' = \left(\frac{l_0}{l}\right)^2$$

Úhlové změny pak v sobě zahrnuje veličina γ‘:

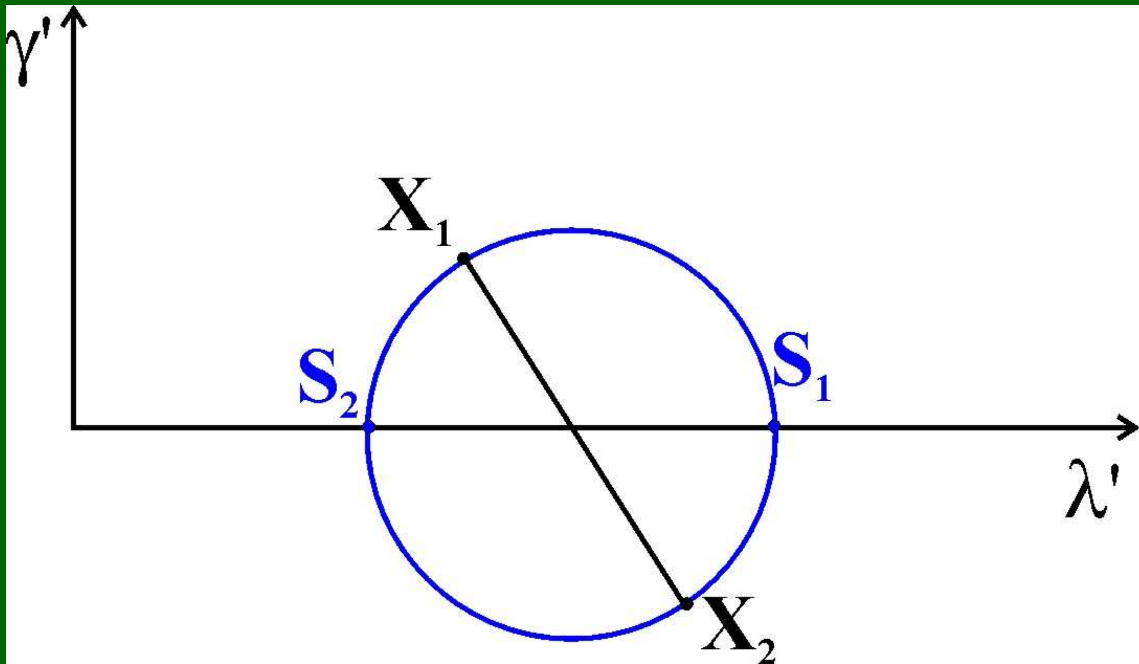
$$\gamma' = \frac{\gamma}{\lambda}$$

Mohrova kružnice pro deformaci

V Mohrově grafu pro deformaci tedy vynášíme na vodorovnou osu hodnoty reciproké kvadratické elongace λ‘, na svislou osu pak hodnoty střižné deformace γ‘.

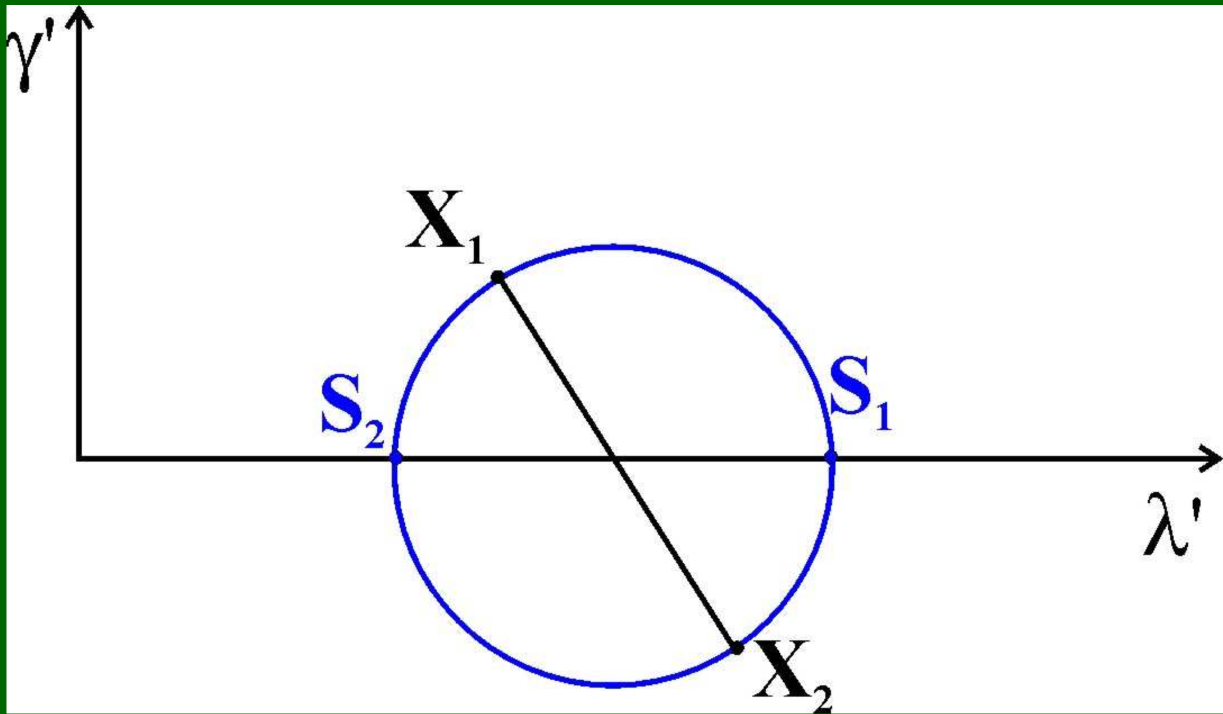
$$\lambda' = \left(\frac{l_0}{l}\right)^2$$

$$\gamma' = \frac{\gamma}{\lambda}$$



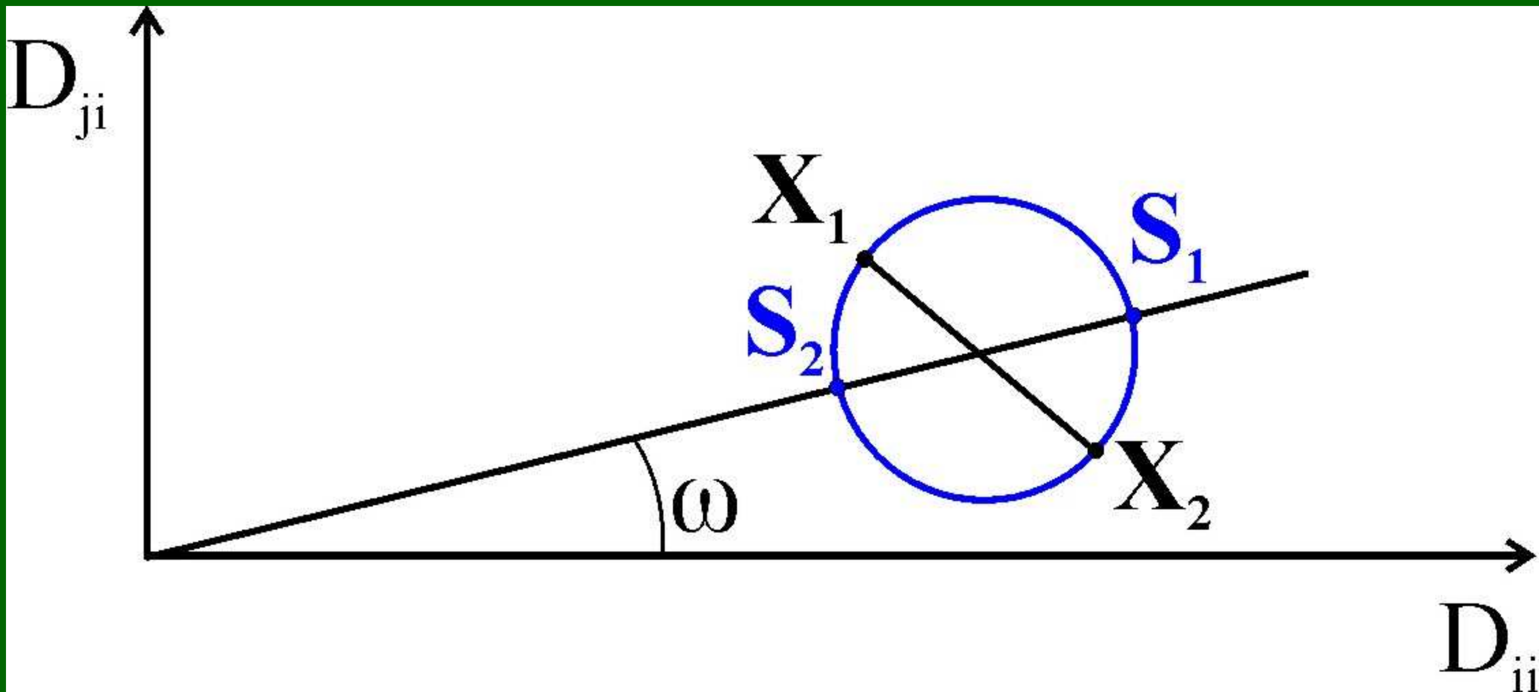
Mohrova kružnice pro deformaci

Neuvažujeme-li rotaci - uvažujeme pouze distorzi, která je representovaná symetrickou maticí - pak střed Mohrovy kružnice leží vždy přímo na vodorovné souřadné ose.



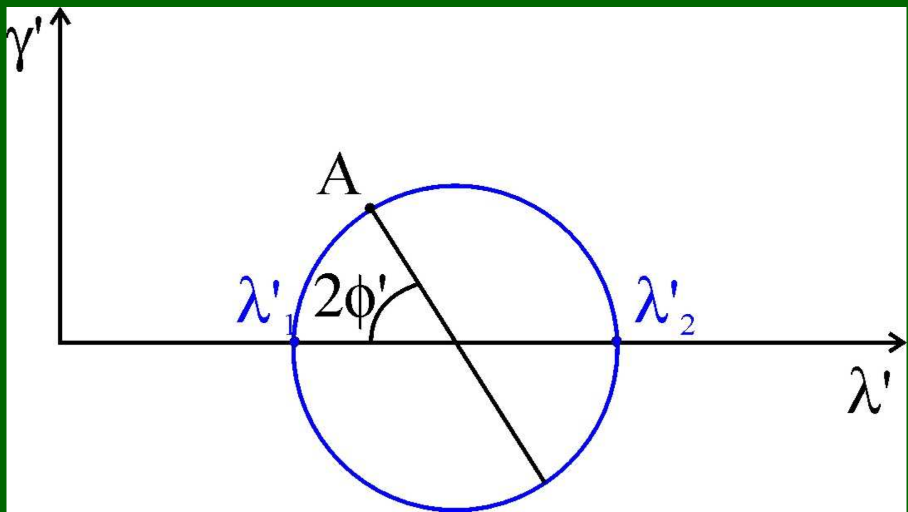
Mohrova kružnice pro deformaci

Obsahuje-li však deformace také rotaci - matice deformace je asymetrická a střed Mohrovy kružnice leží vždy mimo na vodorovnou souřadnou osu. Velikost rotace ukazuje úhel ω.



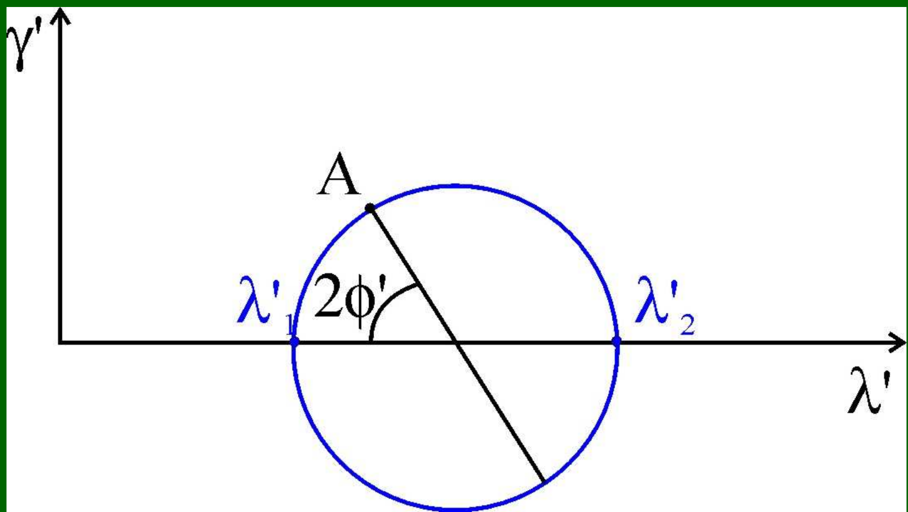
Mohrova kružnice pro deformaci

Hodnoty veličin λ‘ a γ‘ závisí pouze na parametrech matice deformace a na orientaci (na daném směru). Každý bod na Mohrově kružnici representuje hodnoty λ‘ a γ‘ v určitém směru popsaným úhlem ϕ‘ - tj. úhlem, který svírá daný směr se směrem maximálního protažení.



Mohrova kružnice pro deformaci

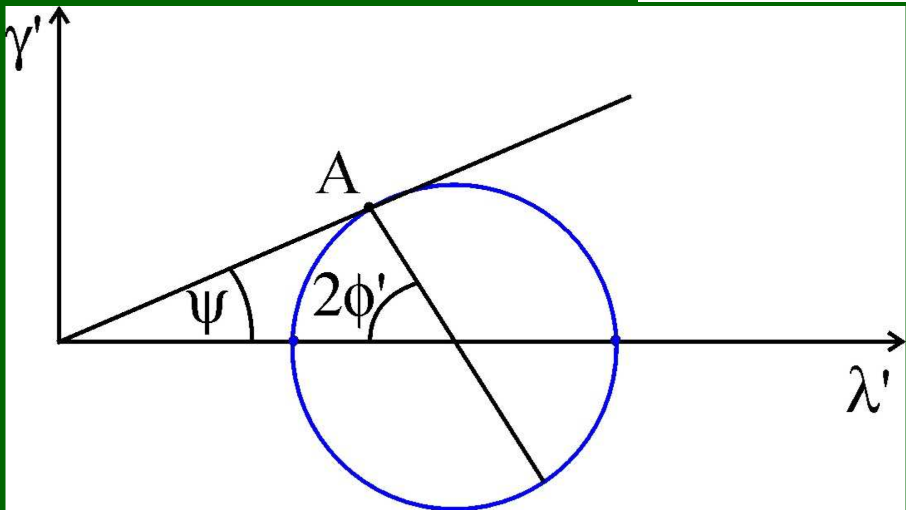
Z Mohrova grafu je patrné, že parametr γ' nabývá ve směrech 2ϕ' = 0° a 2ϕ' = 180° - tj. v tomto směru nedochází ke změně úhlů, ale jen délek. Dané směry odpovídají směrům hlavních os elipsy deformace. Ve všech dalších směrech má parametr γ' nenulové hodnoty - ve všech dalších směrech tedy dochází ke změně úhlů.



Mohrova kružnice pro deformaci

Hodnotu úhlové střižné deformace ψ lze z Mohrova grafu pro každý bod **A** (tj. pro každý směr daný pozicí bodu na Mohrově kružnici) odečíst jako úhel svíraný vodorovnou osou a spojnicí mezi bodem **A** a počátkem soustavy.

$$\tan\psi = \frac{\gamma'}{\lambda'} = \frac{\gamma}{\lambda.\lambda'} = \gamma = \tan\psi$$



Mohrova kružnice pro deformaci

Breddinův graf nebo Mohrovu konstrukci pak s výhodou můžeme využít pro grafická řešení úloh založených právě na vztahu matice deformace (nebo některých z jejich parametrů) a velikostmi úhlové a střižné deformace v určitém směru.

Známe-li složky matice deformace, pak můžeme snadno přímo odečíst z Mohrova grafu pro libovolný směr velikosti úhlové střižné deformace ψ a reciproké kvadratické elongace λ‘.

Naopak, známe-li velikosti úhlové střižné deformace ψ a/nebo reciproké kvadratické elongace λ‘ v některých směrech, můžeme z nich graficky odvodit matici deformace, respektive některé její parametry.

Mohrova kružnice pro deformaci

Při těchto řešeních obvykle neuvažujeme rotaci, hledáme tedy tři parametry (počítáme-li také s dilatací), respektive dva (hledáme-li jen popis distorze, tj. elipticitu a směr osy maximálního prodloužení).

Tvarovou a objemovou změnu (tři neznámé) tak lze snadno odvodit pomocí Mohrovy konstrukce ze tří údajů o délkových změnách ve třech různých směrech.

Pouze tvarovou změnu (dvě neznámé) tak lze snadno odvodit pomocí Mohrovy konstrukce nebo Breddinova grafu ze dvou údajů o úhlových změnách ve dvou různých směrech.