Úloha 1.1.

Zvolte souřadnou soustavu tak, aby osa **x** byla paralelní s kartami v deformačním boxu, osa **y** kolmá ke kartám deformačního boxu a aby počátek souřadné soustavy byl v rohu soustavy karet.

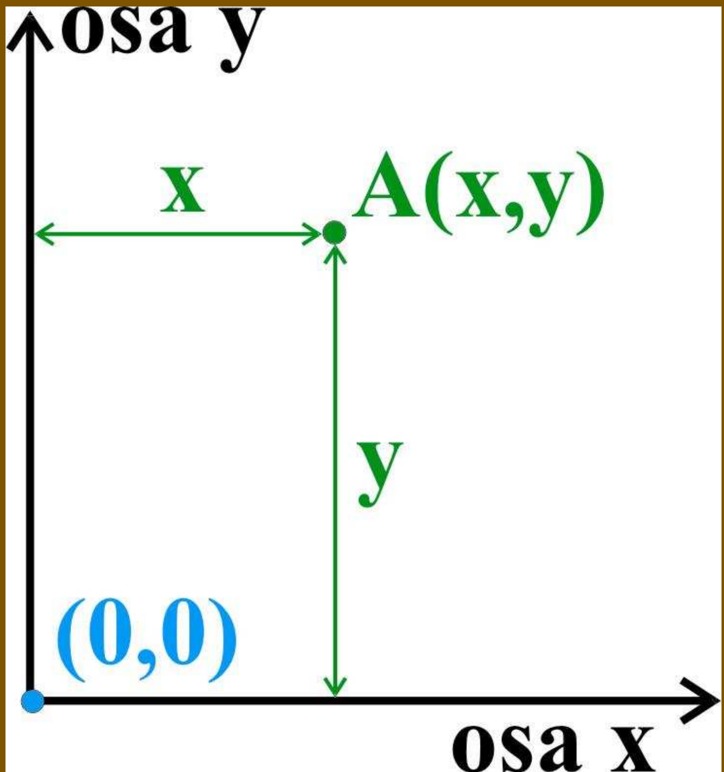
Pomocí modelové deformace v deformačním boxu ověřte přemístění libovolného původního bodu A(x,y) v průběhu střižné deformace γ do konečného bodu A´(x´,y´).

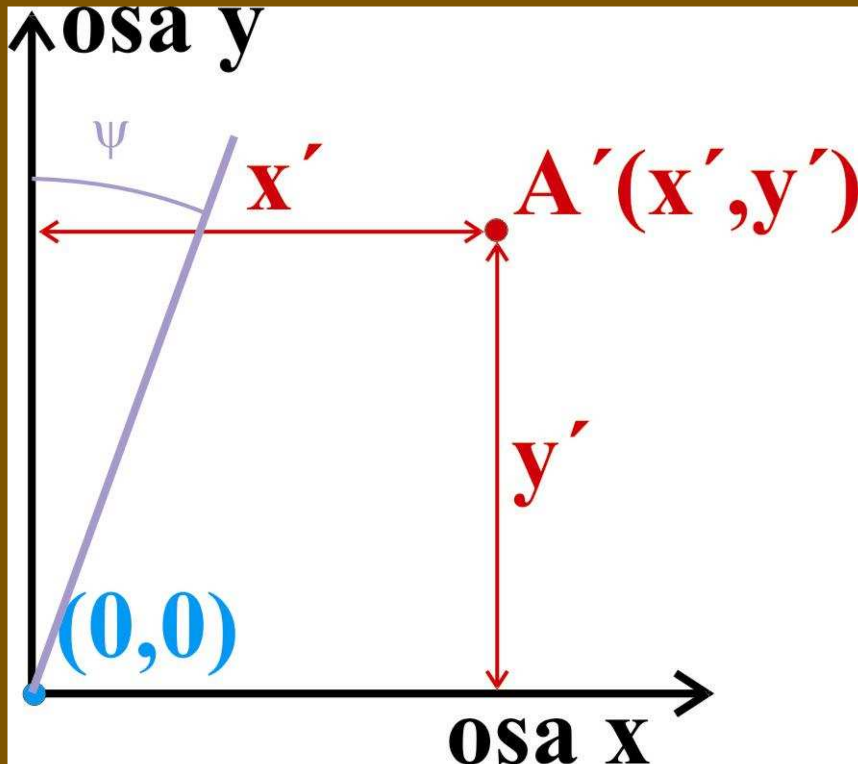
Odvoďte vztahy (transformační rovnice), které budou popisovat přemístění bodu A do bodu A´.

Úloha 1.1.

<u>Řešení:</u>

Nejprve ověříme, jaké bude přemístění bodu A(x,y) v průběhu střižné deformace v deformačním boxu.

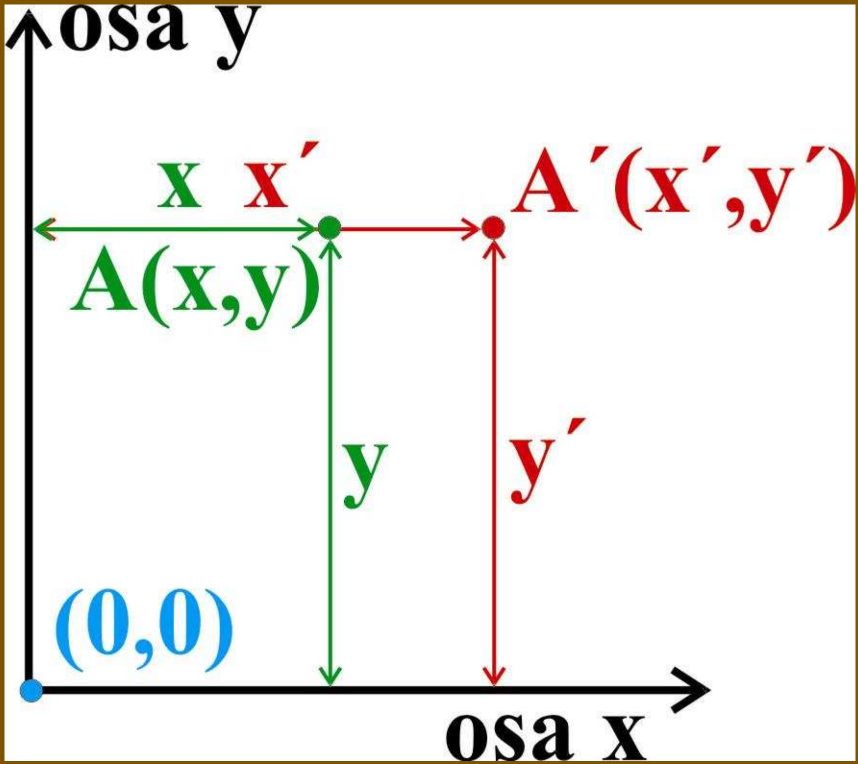




Úloha 1.1.

Deformujte karty v deformačním boxu postupně střižnou deformací γ a odečtěte nové souřadnice bodu A´(x´,y´). Spočtěte, jaké jsou posunutí **u** ve směru osy **x** (u=x´-x) a posunutí **v** ve směru osy **y** (v=y´-y).

γ	x´	y´	x-x´	y-y´
0				
0.2				
0.4				
…				

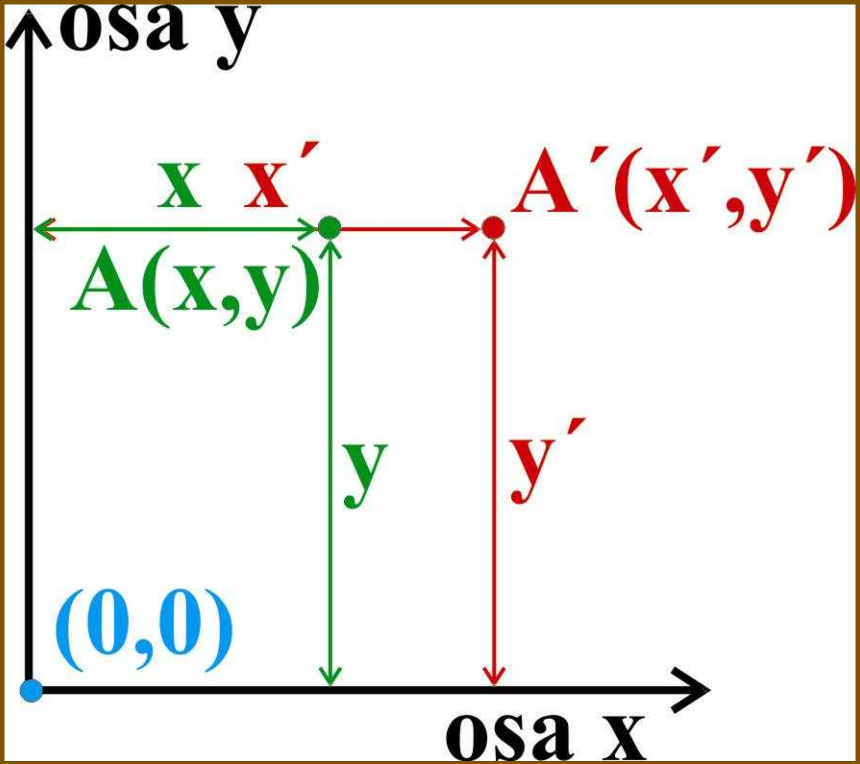


Úloha 1.1.

Nyní odvodíme transformační rovnice.

Vidíme, že souřadnice y se v průběhu střižné deformace nemění ($y' = y \Rightarrow v = y' - y = 0$).

γ	x'	y'	$x-x'$	$y-y'$
0				
0.2				
0.4				
…				

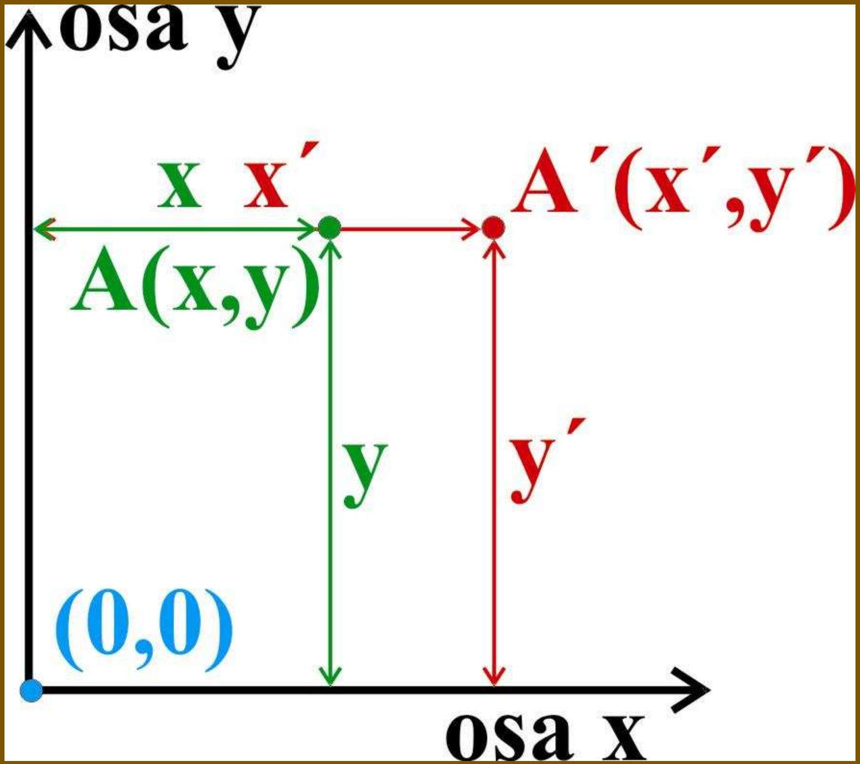


Úloha 1.1.

Transformační rovnice popisující změnu souřadnice y má tedy tvar:

$$y' = y$$

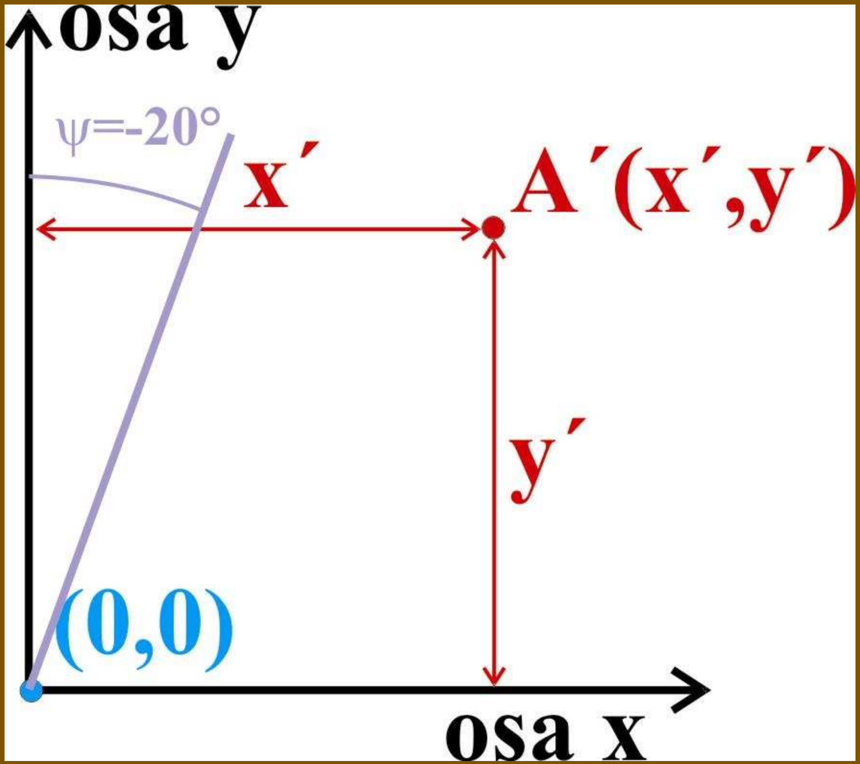
γ	x'	y'	$x-x'$	$y-y'$
0				
0.2				
0.4				
…				



Úloha 1.1.

Vidíme, že souřadnice x se v průběhu střižné deformace mění úměrně veliskosti střižné deformace γ a úměrně velikosti souřadnice y (x´ = fce(x,y,γ), u = fce(y,γ)).

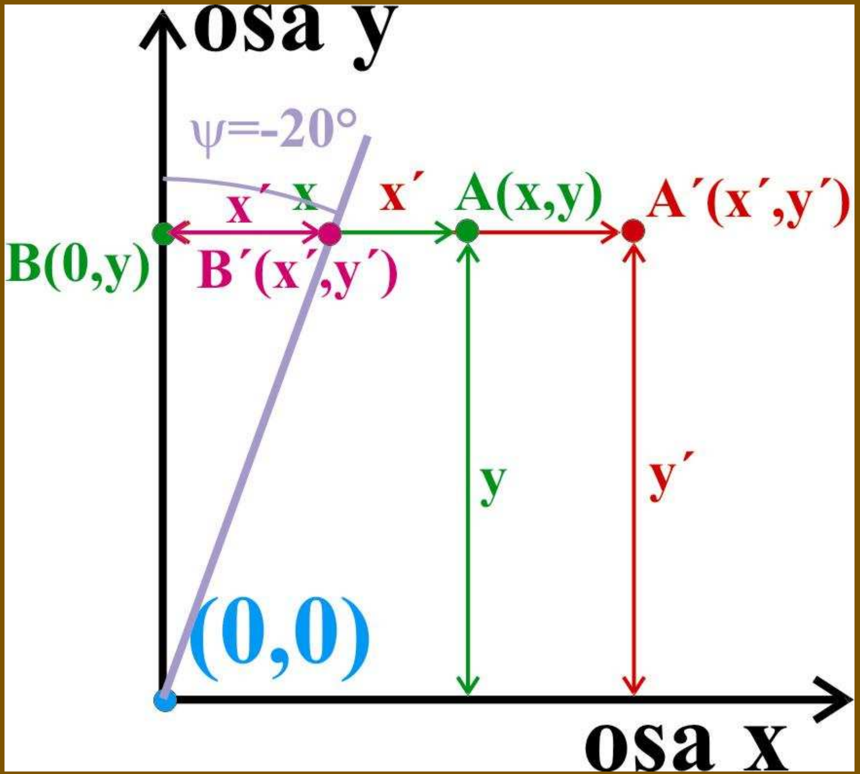
γ	x´	y´	x-x´	y-y´
0				
0.2				
0.4				
…				



Úloha 1.1.

Zvolíme-li bod B, který před deformací leží na ose y (tj. x=0), vidíme, že body B, B´ a počátek souřadné soustavy O(0,0) tvoří pravoúhlý trojúhelník. Strana BO má velikost y, strana BB´ má velikost x´, strany BO a B´O svírají úhel ψ.

γ	x´	y´	x-x´	y-y´
0				
0.2				
0.4				
…				



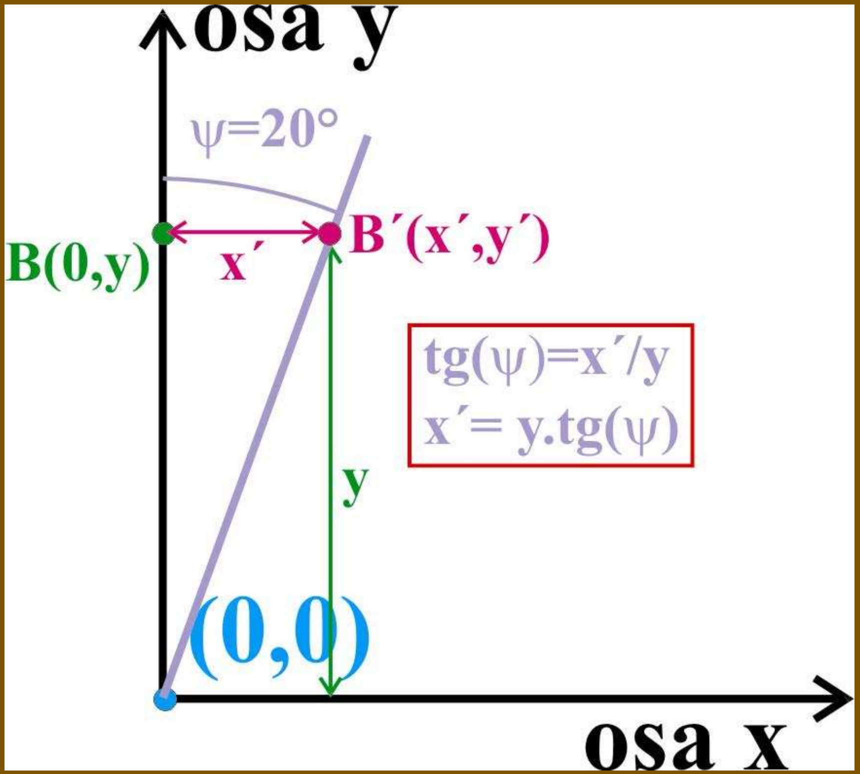
Úloha 1.1.

Z pravidel platících pro pravoúhlý trojúhelník lze v případě bodu B a B´ odvodit:

x´= |y.tg(ψ)|

Pro posunutí **u** pak platí: u = x´ - x = |y.tg(ψ)| - 0 = |y.tg(ψ)|

γ	x´	y´	x-x´	y-y´
0				
0.2				
0.4				
…				



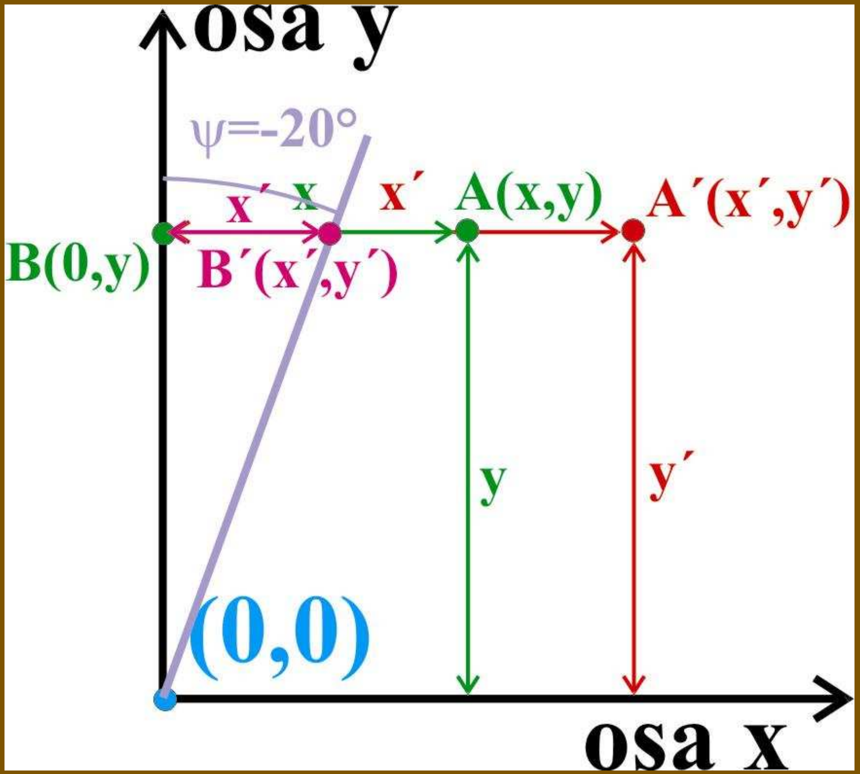
Úloha 1.1.

Pro body A a A´ ($x>0$) pak platí:

$u = x' - x$, $u = |y.tg(\psi)|$ => $|y.tg(\psi)| = x' - x$

=> $x' = x + |y.tg(\psi)|$

γ	x´	y´	x-x´	y-y´
0				
0.2				
0.4				
…				

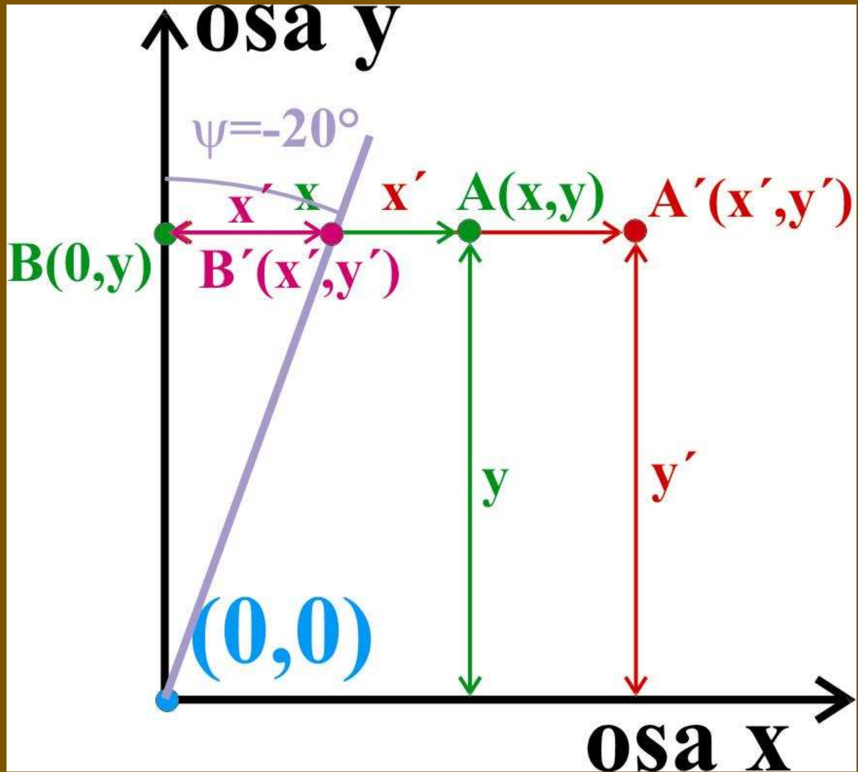


Úloha 1.1.

Střižná deformace g je definovaná vztahem $\gamma = \mathrm{tg}(\psi)$. V našem případě je ale úhel ψ záporný (kvůli smyslu střihu) a jeho tangens má tedy zápornou hodnotu! V našem případě tedy $\gamma = \mathrm{tg}(\psi) < 0$.

$x' = x + |y.\mathrm{tg}(\psi)| \Rightarrow x' = x - y.\gamma$

γ	x´	y´	x-x´	y-y´
0				
0.2				
0.4				
…				

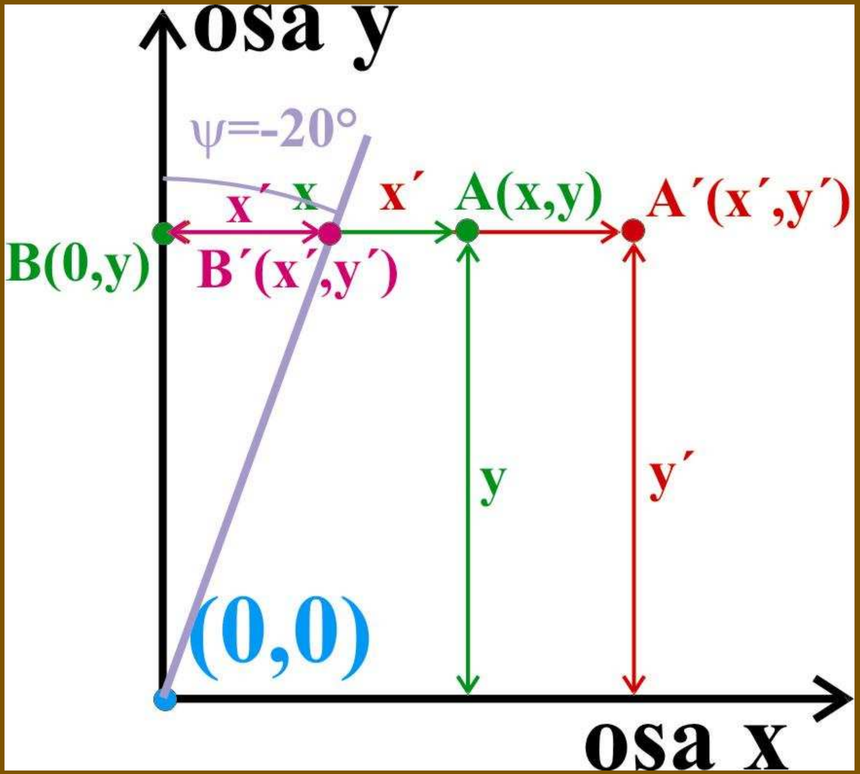


Úloha 1.1.

Transformační rovnice popisující změnu souřadnice x má tedy tvar:

$$x' = x - y.\gamma$$

γ	x'	y'	$x-x'$	$y-y'$
0				
0.2				
0.4				
…				



Úloha 1.1.

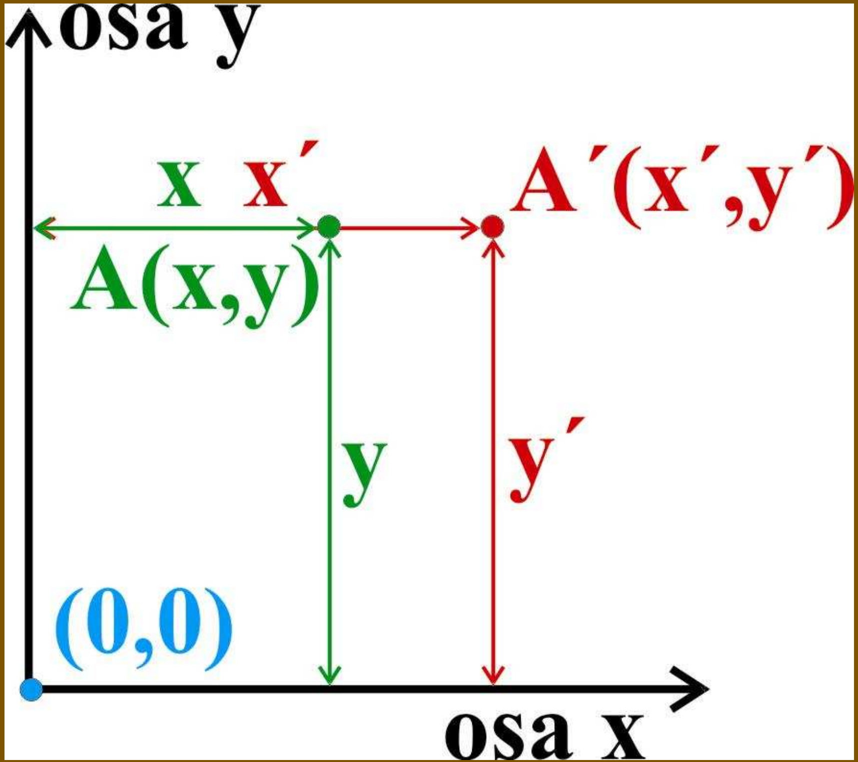
Transformační rovnice popisující přemístění bodu A do bodu A´ tedy mají tvar:

$x' = x - y.\gamma$
$y' = y$

tj.:

$x' = 1.x - \gamma.y$
$y' = 0.x + 1.y$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Úloha 1.2.

Zvolte souřadnou soustavu tak, aby osa **x** byla paralelní s kartami v deformačním boxu, osa **y** kolmá ke kartám deformačního boxu a aby počátek souřadné soustavy byl v rohu soustavy karet.

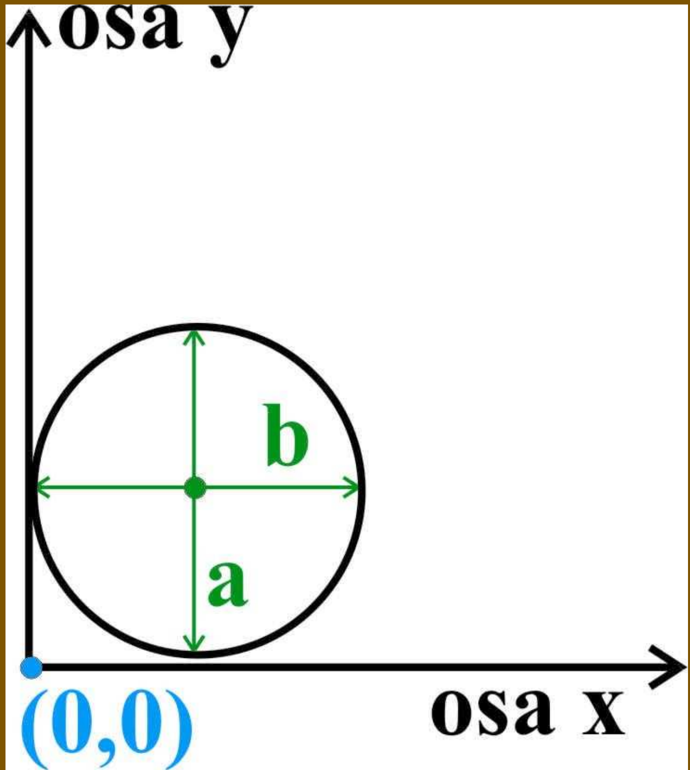
Pomocí modelové deformace v deformačním boxu ověřte, jak se bude v průběhu střižné deformace γ měnit tvar původní kružnice (měřte elipticitu a orientaci vzniklé elipsy při různé míře deformace).

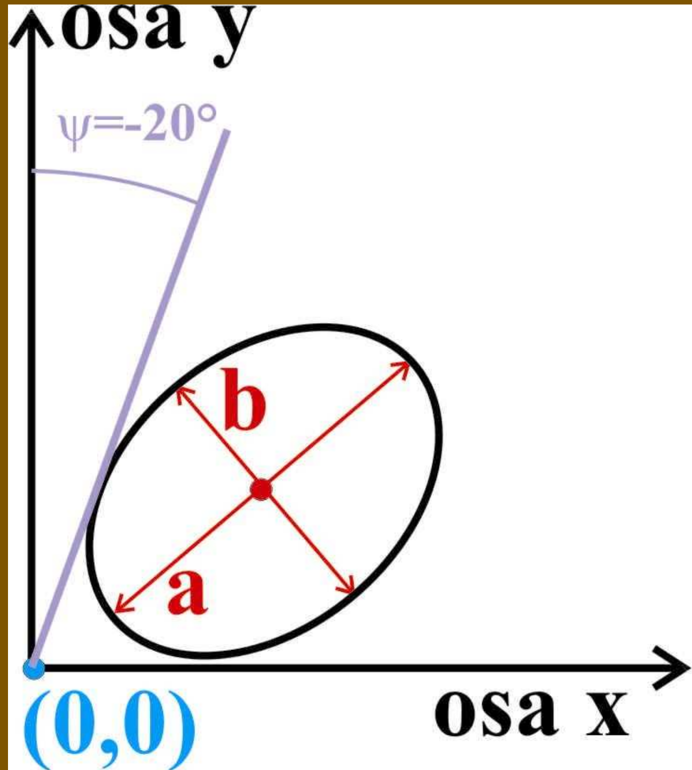
Odvoďte z transformačních rovnice rovnici elipsy deformace a srovnejte teoretické charakteristiky elipsy deformace s charakteristikou pozorovanou při modelové deformaci v deformačním boxu.

Úloha 1.2.

Řešení:

Nejprve ověříme, jak se bude v průběhu střižné deformace v deformačním boxu měnit tvar původní kružnice.

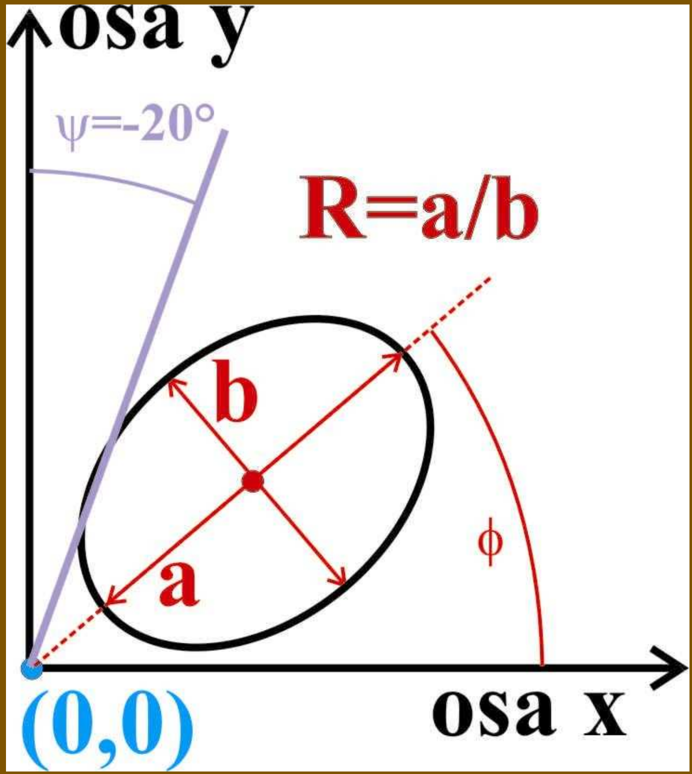




Úloha 1.2.

Deformujte karty v deformačním boxu postupně střižnou deformací γ a elipticitu R a orientaci dlouhé osy ϕ vzniklé elipsy.

γ	a	b	R	ϕ
0				
0.2				
0.4				
…				



Úloha 1.2.

Nyní odvodíme rovnici elipsy deformace. Pro zjednodušení umístíme střed elipsy do středu souřadné soustavy.

Vyjdeme z transformačních rovnic:

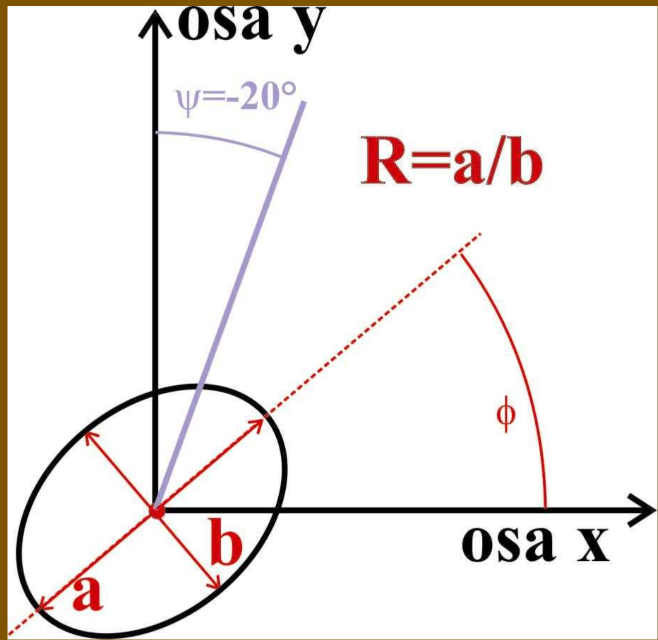
$$x' = x - \gamma . y \qquad y' = y$$

Lagrangeův popis

$$x = x' + \gamma . y' \qquad y = y'$$

Eulerův popis

γ	a	b	R	ϕ
0				
0.2				
0.4				
…				

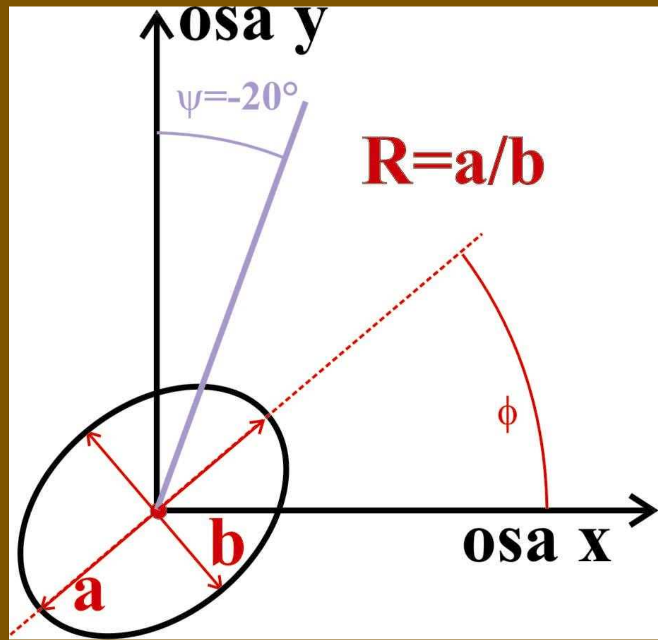


Úloha 1.2.

Vyjdeme z transformačních rovnic:

$$x' = x - \gamma.y \qquad x = x' + \gamma.y'$$
$$y' = y \qquad y = y'$$

Lagrangeův popis Eulerův popis



Rovnice jednotkové kružnice je:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Vyjádříme-li **x** a **y** podle transformačních rovnic, dostaneme:

$$(x' + \gamma.y')^2 + y'^2 = 1$$

$$x'^2 + 2\gamma.x'y' + \gamma^2.y'^2 + y'^2 = x'^2 + 2\gamma.x'y' + (1 + \gamma^2).y'^2 = 1$$

Úloha 1.2.

Rovnice jednotkové kružnice je:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Vyjádříme-li **x** a **y** podle transformačních rovnic, dostaneme:

$$(x' + \gamma.y')^2 + y'^2 = 1$$

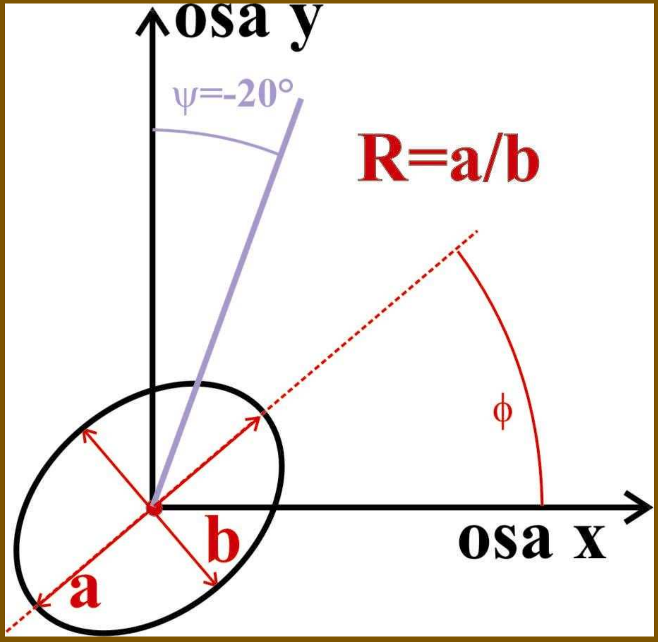
$$x'^2 + 2\gamma.x'y' + \gamma^2.y'^2 + y'^2 = x'^2 + 2\gamma.x'y' + (1+\gamma^2).y'^2 = 1$$

Přitom rovnice elipsy má obecně tvar:

$$A.x^2 + B.xy + C.y^2 = 1$$

tj. výsledná rovnice je rovnicí elipsy:

$$x'^2 + 2\gamma.x'y' + (1+\gamma^2).y'^2 = 1$$



Úloha 1.2.

Maticově má rovnice elipsy obecně tvar:

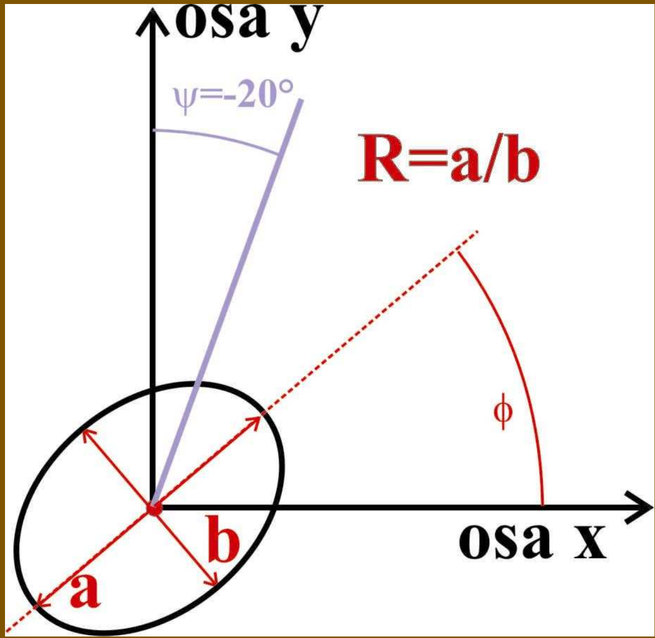
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$x^2 a_{11} + y^2 a_{22} + 2xya_{12} = 1$$

tj.:

$$x'^2 + 2\gamma.x'y' + \left(1+\gamma^2\right).y'^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1+\gamma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

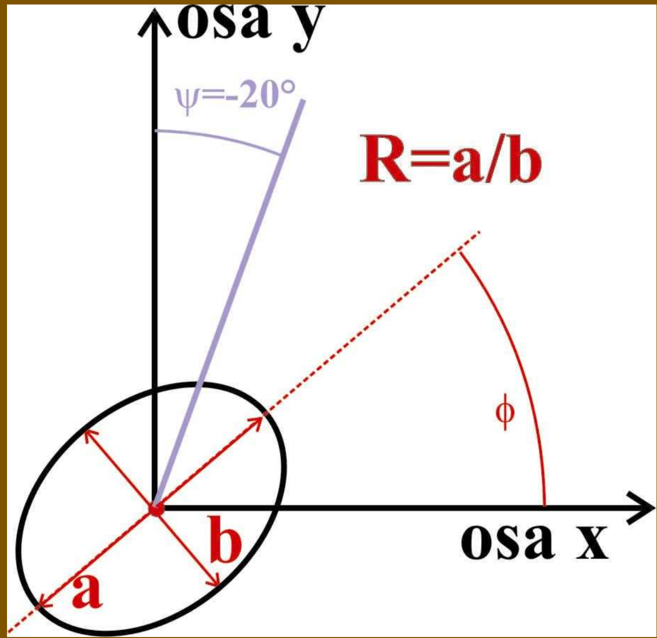


Úloha 1.2.

Hlavní směry os elipsy vypočteme z maticového zápisu obecně:

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathrm{tg}2\phi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$



tj.:

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1+\gamma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathrm{tg}2\phi = \frac{2\gamma}{1-(1+\gamma^2)}$$

tj.:

$$\mathrm{tg}2\phi = \frac{2\gamma}{1-1-\gamma^2} = \frac{2\gamma}{-\gamma^2} = -\frac{2}{\gamma}$$

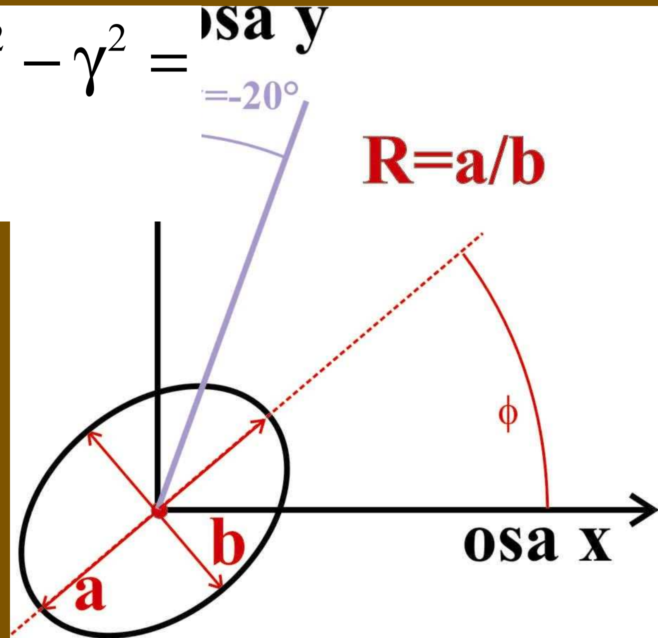
Úloha 1.2.

Délky poloos elipsy nejlépe odvodíme z maticového zápisu pomocí metody charakteristických čísel:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1+\gamma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix} 1-\lambda & \gamma \\ \gamma & 1+\gamma^2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

tj.:

$$(1-\lambda).(1+\gamma^2-\lambda) - \gamma.\gamma = 1+\gamma^2-\lambda-\lambda-\gamma^2\lambda+\lambda^2-\gamma^2 =$$
$$= 1-2\lambda-\gamma^2\lambda+\lambda^2 = \lambda^2-\lambda(2+\gamma^2)+1 = 0$$



Úloha 1.2.

Je třeba si uvědomit, jaký je význam charakteristických čísel matice elipsy. Vezměme pro jednoduchost matici elipsy s hlavními osami paralelními se souřadnou soustavou.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$$

Je-li elipsa pro jednoduchost jednotková, tj. platí-li a.b=1, a označíme-li poměr a/b=R, pak z řešení této soustavy dvou jednoduchých rovnic plyne:

$$b=\frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b}=a^2=R \Leftrightarrow a=\sqrt{R}$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{R}}$$

Úloha 1.2.

Je-li elipsa pro jednoduchost jednotková, tj. platí-li a.b=1, a označíme-li poměr a/b=R, pak z řešení této soustavy dvou jednoduchých rovnic plyne:

$$b = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = a^2 = R \Leftrightarrow a = \sqrt{R}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{R}}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Úloha 1.2.

A teď se podívejme na charakteristická čísla:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{R} - \lambda & 0 \\ 0 & R - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{1}{R} - \lambda \right) . (R - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = R = a^2 ; \lambda_2 = \frac{1}{R} = b^2$$

$$b = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = a^2 = R \Leftrightarrow a = \sqrt{R}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{R}}$$

Délky poloos odpovídají tedy odmocnině charakteristických čísel.

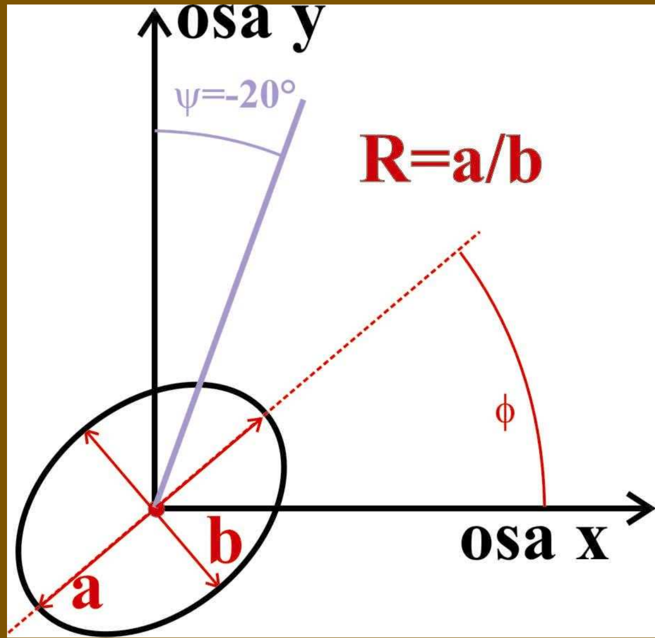
Úloha 1.2.

Délky poloos elipsy nejlépe odvodíme z maticového zápisu pomocí metody charakteristických čísel:

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1+\gamma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix} 1-\lambda & \gamma \\ \gamma & 1+\gamma^2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

tj.:

$$\lambda^2 - \lambda\left(2+\gamma^2\right) + 1 = 0$$



Charakteristická čísla tak tedy odpovídají nikoli přímo délkám poloos, ale jejich druhé mocnině. Nicméně v případě jednotkové elipsy by jedno z charakteristických čísel mělo přímo odpovídat elipticitě R.