

1. Vypočtete následující limity.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(n+a)(n+b)} - n$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

2. Vypočtete limitu posloupnosti

$$a) a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$b) a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n^2 - 1}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2) + n}{n+1}$$

Nápověda: jestliže $a_n = b_n \cdot c_n$, kde b_n je ohraničená a $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

3. Zjistěte, zda jsou následující posloupnosti konvergentní, své tvrzení dokažte. *Nápověda: monotonní a ohraničená \Rightarrow konvergentní.*

$$a) a_n = \frac{n-1}{n}$$

$$b) a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

4. Najděte hromadné body posloupností

$$a) \{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots \right\}$$

$$b) a_n = \frac{n}{n+1} \sin \frac{n\pi}{6}$$

$$c) a_n = \sqrt[n]{1 + (-1)^n}$$

5. Najděte \limsup a \liminf posloupností

$$a) a_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{1}{n} \right)$$

$$b) a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$c) a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$$

$$\text{Nápověda: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$