1. VEKTOROVÉ PROSTORY

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

2. října 2006

Abstrakt

V této kapitole zavedeme dva pojmy, které budou hrát v následujícím výkladu klíčovou úlohu a dokážeme o nich několik jednoduchých tvrzení. Půjde o pojem *tělesa* a *vektorového prostoru*. Prvky tělesa budeme nazývat *skaláry* a prvky vektorového prostoru *vektory*.

Obsah přednášky I

- Úvod
  - Základní číselné obory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$; pojem tělesa.
  - Tělesa $\mathbb{Z}_p$
- Geometrická interpretace vektorů v rovině a v třírozměrném prostoru
  - Geometrická interpretace vektorů v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, rovnoběžníkové pravidlo

Obsah přednášky II

- Vektorové prostory
- Příklady vektorových prostorů (řádkově a sloupcově uspořádané n-tice skalárů, polynomy, rozšíření těles, funkce z množiny do tělesa a vektorového prostoru)

Číselné obory I

$\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel,
$\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel,
$\mathbb{Q}$ – množina všech racionálních čísel,
$\mathbb{R}$ – množina všech reálnych čísel,
$\mathbb{C}$ – množina všech komplexních čísel.

Číselné obory II

Nulu považujeme za přirozené číslo, t. j. $0 \in \mathbb{N}$.

Imaginární jednotku (která je prvkem $\mathbb{C} - \mathbb{R}$) budeme značit $\imath$.

Prvky výše uvedených číselných oborů $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nazýváme často *skaláry*. V tomto případě pak budeme mluvit o *číselném tělese*.

Struktura číselných oborů I

Na každé z těchto množin jsou definované dvě binární operace, *sčítaní* $+$ a *násobení* $\cdot$.

Obě tyto operace jsou asociativní a komutativní.

Násobení je (z obou stran) *distributivní* vzhledem ke sčítání, t. j. pro všechny prvky x, y, z příslušné množiny platí

$$x(y+z) = xy + xz, \qquad (x+y)z = xz + yz.$$

Struktura číselných oborů II

Číselný obor $\mathbb{N}$ je v porovnaní s obory $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ "chudší" – totiž rovnice tvaru $x + a = b$ mají v oborech $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ řešení $x = b - a$ pre libovolné a, b, ale v $\mathbb{N}$ je takováto rovnice řešitelná, pokud $a \leq b$.

Obory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ jsou však "bohatší" nejen v porovnání s $\mathbb{N}$, ale i s $\mathbb{Z}$ – rovnice tvaru $ax = b$ mají v oborech $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ řešení pro libovolné $a \neq 0$ a b, přičemž v $\mathbb{N}$ či $\mathbb{Z}$ jsou řešitelné, pouze pokud a je dělitelem b.

Axiomy tělesa I

Tělesem nazýváme množinu K s dvěmi význačnými prvky – *nulou* 0 a *jedničkou* 1 – a dvěmi binárními operacemi na K – *sčítáním* $+$ a *násobením* $\cdot$ – takovými, že platí

Axiomy tělesa II

$$(\forall a, b \in K)(a + b = b + a),(\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a + (b + c) = (a + b) + c),$$
$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c),$$

$$(\forall a \in K)(0 + a = a), \qquad (\forall a \in K)(1 \cdot a = a),$$

$$(\forall a \in K)(\exists\, b \in K)(a + b = 0),$$
$$(\forall a \in K \setminus \{0\})(\exists\, b \in K)(a \cdot b = 1),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)), \quad 0 \neq 1.$$

Axiomy tělesa III

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

0 je neutrální prvek sčítání a 1 je neutrální prvek násobení a tyto prvky jsou navzájem různé.

Prvek $b \in K$ takový, že $a + b = 0$, je k danému $a \in K$ určený jednoznačně.
Tento jednoznačně určený prvek k danému a označujeme $-a$ a nazýváme *opačný prvek* k a. Místo $a + (-b)$ píšeme jen $a - b$.

Axiomy tělesa IV

Analogicky se lze přesvědčit, že i prvek $b \in K$ takový, že $a \cdot b = 1$ je k danému $0 \neq a \in K$ určený jednoznačně – označujeme ho a^{-1} nebo $\frac{1}{a}$, případně $1/a$ a nazýváme *inverzní prvek* k a alebo *převrácená hodnota* prvku a.

Místo $a \cdot b^{-1}$ píšeme též $\frac{a}{b}$ nebo a/b.

Vlastnosti tělesa I

Tvrzení

Buď K těleso. Potom pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $a, b, c, b_1, \ldots, b_n \in K$ platí

(a) $a + b = a + c \;\Rightarrow\; b = c$,

(b) $(ab = ac \;\&\; a \neq 0) \;\Rightarrow\; b = c$,

(c) $a \cdot 0 = 0$,

(d) $a \cdot b = 0 \;\Rightarrow\; (a = 0 \vee b = 0)$,

(e) $-a = (-1) \cdot a$,

(f) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$,

(g) $a \cdot (b_1 + \ldots + b_n) = a \cdot b_1 + \ldots + a \cdot b_n$.

Vlastnosti tělesa II

Doplňme, že podmínky (a) a (b) sa nazývají *zákony o krácení* pro sčítaní resp. násobení v tělese.

Podmínka (e) nám umožňuje zavést libovolné celočíselné násobky prvků z tělesa. Pro $a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ klademe

$(-n)a = -(na) = n(-a)$.

Podobně lze pro nenulové prvky tělesa zavést i libovolné celočíselné mocniny. Pro $0 \neq a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ klademe $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.

Vlastnosti tělesa III

$$0a = 0, \quad 1a = a, \qquad a^0 = 1, \quad a^1 = a,$$

$$n(a+b) = na + nb,$$
$$(m+n)a = ma + na,$$

$$(mn)a = m(na),$$
$$(mn)(ab) = (ma)(nb),$$

$$\begin{aligned} (ab)^n &= a^n b^n, & \qquad & n < 0 \;\Rightarrow\; a \neq 0 \neq b, \\ a^{m+n} &= a^m a^n, & & (m < 0 \vee n < 0) \;\Rightarrow\; a \neq 0, \\ a^{mn} &= (a^m)^n, & & (m < 0 \vee n < 0) \;\Rightarrow\; a \neq 0 \\ & & & \forall a, b \in K,\; m, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vlastnosti tělesa IV

Nechť K je těleso a $L \subseteq K$. Říkáme, že L je *podtěleso* tělesa K, pokud $0, 1 \in L$ a pro všechna $a, b \in L$ platí $a + b \in L$, $ab \in L$, $-a \in L$ a, pokud $a \neq 0$, tak i $a^{-1} \in L$.

Podtěleso tělesa K je tedy jeho podmnožina L, která obsahuje nulu a jedničku a je uzavřená vzhledem ke sčítání, násobení, opačnému a inverznímu prvku. Zřejmě každé podtěleso tělesa K je s těmito operacemi zúženými z K na L i samo tělesem. Říkáme pak, že těleso K je *rozšířením* tělesa L.

Vlastnosti tělesa V

Zřejmě těleso $\mathbb{Q}$ je podtělesem tělesa $\mathbb{R}$ i tělesa $\mathbb{C}$; těleso $\mathbb{C}$ je rozšířením těles $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Charakteristikou tělesa K, píšeme $\mathrm{char} K$, nazýváme nejmenší kladné celé číslo n takové, že $n1 = 0$; pokud takové n neexistuje, t. j. $n1 \neq 0$ pro každé celé $n > 0$, říkáme že K má charakteristiku ∞ (někteří autoři definují $\mathrm{char} K = 0$).

Vlastnosti tělesa VI

Je-li těleso K rozšířením tělesa L, tak obě tělesa K a L mají tutéž jedničku i nulu, a proto $\mathrm{char} K = \mathrm{char} L$.

Zřejmě $\mathrm{char}\mathbb{Q} = \mathrm{char}\mathbb{R} = \mathrm{char}\mathbb{C} = \infty$.

Věta

Nechť K je těleso. Potom $\mathrm{char} K$ je rovna ∞ nebo prvočíslu.

Konečná tělesa I

V tomto odstavci si ukážeme příklady těles, jejichž charakteristika není ∞.
Z tohoto důvodu se tato tělesa podstatně liší od nám známých číselných těles.

Totiž, pro každé prvočíslo p sestrojíme jisté konečné těleso $\mathbb{Z}_p$, které má p prvků a charakteristiku p.
Naopak, dříve uvedená číselná tělesa jsou nekonečná.

Konečná tělesa II

Pro potřeby matematické analýzy, tedy i z hlediska fyzikálních aplikací, jsou nejdůležitějšími tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Konečná tělesa však v současnosti sehrávají důležitou úlohu např. v teorii kódování a kryptografii.

Pro každé kladné celé číslo n označme

$$\mathbb{Z}_n = \{k \in \mathbb{N};\ k < n\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Konečná tělesa III

Množinu $\mathbb{Z}_n$ nazýváme ***množinou zbytkových tříd modulo*** n. Na této množině zavedeme dvě binární operace – sčítání $\oplus$ a násobení $\odot$ (je nutné odlišit sčítání a násobení v $\mathbb{Z}_n$ od příslušných operací v $\mathbb{Z}$).

Pro $a, b \in \mathbb{Z}_n$ klademe

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \text{zbytek po dělení } (a+b)/n, \\ a \odot b &= \text{zbytek po dělení } (ab)/n. \end{aligned}$$

Konečná tělesa IV

$\oplus$ a $\odot$ jsou asociativní a komutativní operace na $\mathbb{Z}_n$, 0 je neutrální prvek sčítání a, pro $n > 1$, 1 je neutrální prvek násobení.

Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání a $\ominus a = n - a$ je opačný prvek k $a \in \mathbb{Z}_n$.

Věta

Množina $\mathbb{Z}_n$ s operacemi $\oplus$ a $\odot$ je těleso právě tehdy, když n je prvočíslo.

Konečná tělesa V

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

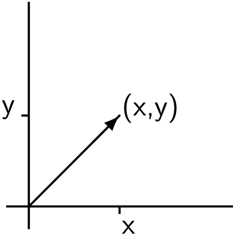
$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Multiplikativní tabulky sčítání a násobení v tělese $\mathbb{Z}_5$.

Interpretace I

Vektory v rovině či v prostoru si představujeme jako orientované úsečky, t. j. úsečky, jejichž jeden krajní bod považujeme za počáteční a druhý za koncový – ten je označený obvykle šipkou.

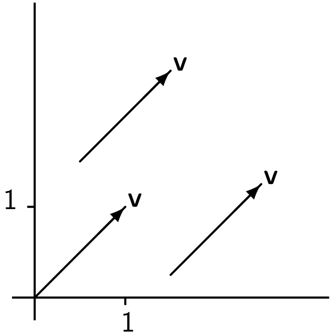
Interpretace II



Vektor v rovině

Přitom dvě stejně dlouhé, rovnoběžné a souhlasně orientované úsečky představují ten stejný vektor – říkáme, že jsou ***umístění*** téhož vektoru.

Interpretace III



Umístění téhož vektoru

Interpretace IV

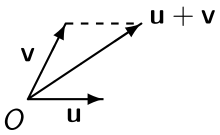
Zvolíme-li si nějaký pevný bod O, pak všechny vektory v rovině či v prostoru můžeme jednoznačně reprezentovat jako orientované úsečky $\overrightarrow{OA}$ s počátkem v O.

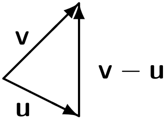
Jejich koncem může být libovolný bod A roviny či prostoru, bod O nevyjímaje – orientovaná úsečka $\overrightarrow{OO}$ totiž představuje tzv. nulový vektor.

Interpretace V

Vektory v rovině či v prostoru můžeme sčítat pomocí tzv. ***vektorového rovnoběžníku***.

Součet vektorů $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ je potom znázorněný orientovanou uhlopříčkou $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{OC}$ rovnoběžníka, jehož dvě přilehlé strany tvoří úsečky OA, OB.





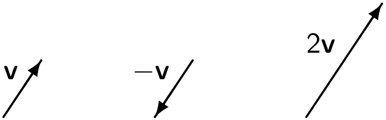
Interpretace VI

Vektory můžeme rovněž násobit libovolnými skaláry, t. j. v našem případě reálnými čísly:

pokud $c \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{v}$ je vektor, tak $c\mathbf{v}$ je vektor, t. j. orientovaná úsečka s počátkem v O, jejíž délka je $|c|$-násobkem délky úsečky $\mathbf{v}$, leží na té stejné přímce jako $\mathbf{v}$ a je orientovaná souhlasně s $\mathbf{v}$, pokud $c > 0$, resp. nesouhlasně s $\mathbf{v}$, pokud $c < 0$

(je-li $c = 0$ nebo $\mathbf{v}$ je nulový vektor, tak, samozřejmě, i $c\mathbf{v}$ je nulový vektor, takže nezáleží na jeho směru ani orientaci).

Interpretace VII



Násobení vektoru skalárem

Interpretace VII

Pokud si mimo počátek O zvolíme v rovině či prostoru ještě dvě resp. tři souřadné osy, t. j. navzájem kolmé přímky procházející počátkem, a na každé z nich jeden bod ve stejné jednotkové vzdálenosti od počátku, dostaneme pravouhlý souřadnicový systém v rovině či v prostoru.

Každý bod roviny či prostoru je potom jednoznačně určený uspořádanou dvojicí, resp. trojicí svých souřadnic a naopak, každá dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký bod roviny či prostoru.

Interpretace VIII

Rovněž každý vektor v rovině či v prostoru je potom jednoznačně určený souřadnicemi svého koncového bodu a naopak libovolná uspořádaná dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký vektor v rovině či prostoru.

Při pevném souřadnicovém systému tak můžeme množinu všech vektorů v rovině ztotožnit s množinou $\mathbb{R}^2$ a množinu všech vektorů v prostoru s množinou $\mathbb{R}^3$.

Interpretace IX

Jsou-li (při takovémto ztotožnění) $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ dva vektory v rovině, tak snadno ověříme, že pro jejich součet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, daný vektorovým rovnoběžníkem, platí

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Interpretace X

Je-li $c \in \mathbb{R}$, pak pro skalární násobek $c\mathbf{u}$ dostáváme

$$c\mathbf{u} = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2).$$

Podobně to můžeme ověřit pro vektory v prostoru, t. j. uspořádané trojice reálných čísel.

Interpretace XI

Navíc si všimněme, že předpoklady kolmosti souřadných os a rovnosti jednotkových délek v jednotlivých směrech nehrály v našich úvahách žádnou roli.

Stačí, aby systém souřadných os tvořily dvě různoběžné přímky (v rovině) resp. tři přímky neležící v rovině (v prostoru) protínající se v počátku O.

Za jednotkové délky ve směrech jednotlivých souřadných os můžeme zvolit délky libovolných (ne nutně stejně dlouhých) úseček.

Vektorové prostory I

Buď K (číselné) těleso. ***Vektorovým*** nebo též ***lineárním prostorem*** nad K nazýváme množinu V s význačným prvkem $\mathbf{0}$ a dvěma binárními operacemi –

sčítáním $+ : V \times V \to V$ a

násobením $\cdot : K \times V \to V$ – takovými, že platí

Vektorové prostory II

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)(\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}),$$
$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}),$$
$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}),$$
$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}),$$

$$(\forall a, b \in K)(\forall \mathbf{x} \in V)(a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x}),$$
$$(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}),$$

$$(\forall a \in K)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (a \cdot \mathbf{x}) + (a \cdot \mathbf{y})),$$
$$(\forall a, b \in K)(\forall \mathbf{x} \in V)((a + b) \cdot \mathbf{x} = (a \cdot \mathbf{x}) + (b \cdot \mathbf{x})).$$

Vektorové prostory III

Skaláry značíme "obyčejnými" malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Poznámka. I když sčítání skalárů v (číselném(tělese K a sčítání vektorů značíme stejným znakem $+$, jde o různé operace. Podobně násobení v (číselném) tělese a násobení vektoru skalárem jsou různé operace, ačkoliv obě značíme $\cdot$.
Později budeme stejně značit příslušné operace a nuly v různých vektorových prostorech.

Vektorové prostory IV

Z formálního hlediska připomínají axiómy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa K:

sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na V s neutrálním prvkem $\mathbf{0} \in V$,

operace násobení vektoru skalárem splňuje jakousi podmínku "asociativity", $1 \in K$ je její "neutrální prvek"

a platí dva "distributivní zákony".

Vektorové prostory V

Jeden podstatný rozdíl – násobení v (číselném) tělese K je binární operací na množině K, t. j. zobrazením $\cdot : K \times K \rightarrow K$, násobení ve vektorovém prostoru V nad číselným tělesem K není binární operace na V, ale binární operace $\cdot : K \times V \rightarrow V$.

Vektorové prostory VI

To nám však nebrání zavést obdobné dohody jako pro operace v (číselném) tělese: násobení má přednost před sčítáním a znak násobení budeme většinou vynechávat, t. j. budeme např. psát $a\mathbf{x} + \mathbf{y}$ namísto $(a \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{y}$.

Vektorové prostory VII

Rovněž budeme vynechávat závorky, jejichž umístění neovlivní výslednou hodnotu výrazů jako např. v $ab\mathbf{x}$ nebo $a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n$. Poslední výraz budeme taktéž značit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i$$

a nazývat ***lineární kombinací*** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ s koeficienty $a_1, \ldots, a_n$.

Vektorové prostory VIII

Speciálně pro $n = 1$ to znamená $\sum_{i=1}^{1} a_i \mathbf{x}_i = a_1 \mathbf{x}_1$; kvůli úplnosti pro $n = 0$ ještě klademe prázdnou lineární kombinaci $\sum_{i=1}^{0} a_i \mathbf{x}_i$ rovnou $\mathbf{0}$.

Tvrzení

Nechť V je vektorový prostor nad (číselným) tělesem K. Pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $a, b, a_1, \dots, a_n \in K$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$ platí

Vektorové prostory IX

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{z} \;\Rightarrow\; \mathbf{y}=\mathbf{z}, \\
\text{(b)} & (a\mathbf{x}=a\mathbf{y}\&\; a\neq 0) \;\Rightarrow\; \mathbf{x}=\mathbf{y}, \\
 & (a\mathbf{x}=b\mathbf{x}\&\; \mathbf{x}\neq \mathbf{0}) \;\Rightarrow\; a=b, \\
\text{(c)} & a\mathbf{0}=\mathbf{0}=0\mathbf{x}, \\
\text{(d)} & a\mathbf{x}=\mathbf{0} \;\Rightarrow\; (a=0 \vee \mathbf{x}=\mathbf{0}),
\end{array}$$

Vektorové prostory X

$$
\begin{array}{ll}
\text{(e)} & -\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}, \\
\text{(f)} & a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = a\mathbf{x} - a\mathbf{y}, \\
 & (a - b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} - b\mathbf{x}, \\
\text{(g)} & a(\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_n) = a\mathbf{x}_1 + \ldots + a\mathbf{x}_n, \\
 & (a_1 + \ldots + a_n)\mathbf{x} = a_1\mathbf{x} + \ldots + a_n\mathbf{x}.
\end{array}
$$

Příklady I

Zřejmě každé těleso K můžeme považovat za vektorový prostor nad sebou samým. Obecněji, pokud těleso L je rozšířením tělesa K, tak L můžeme považovat za vektorový prostor nad tělesem K (formálne stačí "zapomenout" na násobení některých dvojic prvků $a, b \in L$ a součin ab připustit jen pro $a \in K$, $b \in L$).

Příklady II

Podobným způsobem můžeme vektorový prostor V nad tělesem L zúžením násobení $L \times V \to V$ na násobení $K \times V \to V$ změnit na vektorový prostor nad tělesem K.

Příklady III

Pro libovolné těleso K a $n \in \mathbb{N}$ je množina

$$K^n = \{(x_1, \dots, x_n);\ x_1, \dots, x_n \in K\}$$

všech uspořádaných n-tic prvků z K spolu s operacemi

Příklady IV

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{y} =& (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\\ =& (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n),\\ c\mathbf{x} =& c(x_1,\dots,x_n)=(cx_1,\dots,cx_n),\end{aligned}$$

kde $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in K^n$, $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)\in K^n$ a $c\in K$, vektorový prostor nad tělesem K.

Příklady V

Zřejmě uspořádaná n-tice $\mathbf{0}_n = (0, \dots, 0)$ hraje úlohu nuly v K^n. Pokud bude potřebné rozlišit nulové vektory v prostorech K^n pro různá přirozená čísla n, budeme pro nulu v K^n používat označení $\mathbf{0}_n$. Opačný prvek k $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ je zřejmě

$$-\mathbf{x} = -(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Příklady VI

Říkáme, že operace na K^n jsou definované ***po složkách***. Prvky tohoto vektorového prostoru nazýváme ***n-rozměrné řádkové vektory*** nad tělesem K. Vektorový prostor K^0 sestává z jediného prvku $\emptyset$, představujícího "uspořádanou nultici", která je nutně nulou v K^0.

Příklady VII

Někdy bude výhodnější pracovat s ***n-rozměrnými sloupcovými vektory*** nad tělesem K, t. j. s vektory tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{kde } x_1, \dots, x_n \in K. \text{ Píšeme rovněž } K^n.$$

Příklady VIII

Polynomem nebo též ***mnohočlenem*** f *stupně* n, kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, v proměnné x nad tělesem K rozumíme formální výraz tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \end{aligned}$$

Příklady IX

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in$ jsou skaláry, nazývané *koeficienty* polynomu f, a $a_n \neq 0$.

Nulu $0 \in K$ považujeme za polynom stupně -1 a nenulové skaláry $a \in K$ za polynomy stupně 0. Zřejmě každý polynom f definuje (stejně označovanou) funkci $f : K \to K$ danou předpisem $c \mapsto f(c)$, t. j. dosazením konkrétních hodnot $c \in K$ za proměnnou x do polynomu f.

Příklady X

Množinu všech polynomů v proměnné x nad K *stupně nejvýše* n, kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, budeme značit $K^{(n)}[x]$; množinu *všech polynomů* v proměnné x nad K značíme $K[x]$.
Libovolný polynom $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in K[x]$ stupně $m < n$ můžeme psát ve tvaru

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m + 0x^{m+1} + \ldots + 0x^n,$$

t. j. v tvaru $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, kde $b_i = 0$ pro $m < i \leq n$.

Příklady XI

S použitím této konvence lze definovat součet $f+g$ polynomů $f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g=\sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ z $K[x]$ předpisem

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i+b_i)x^i.$$

Příklady XII

Pokud navíc $c \in K$, klademe

$$(cf)(x) = cf(x) = \sum_{i=0}^{n} ca_i x^i.$$

Snadno ověříme, že s takto po složkách definovanými operacemi součtu a skalárního násobku tvoří každá z množin polynomů $K^{(n)}[x]$, kde $-1 \le n \in \mathbb{Z}$, a zároveň i množina všech polynomů $K[x]$ vektorový prostor nad tělesem K.