Písemka z lineární algebry I, C

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se výsledek započítává s váhou 2.

1. Nechť $\varphi\colon V \to U$ je lineární zobrazení, $x_1, \ldots, x_n \in V$. **a)** Jsou-li vektory $x_1, \ldots, x_n$ lineárně závislé ve V, pak vektory $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$ jsou lineárně závislé v U. Dokažte. **b)** Rozhodněte, zda platí tvrzení: Jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ lineárně nezávislé ve V, pak $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$ jsou lineárně nezavislé v U. Pokud ano, dokažte. Pokud ne, najděte protipříklad. *(2 + 2 body)*

2. Uvažujme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dané předpisem

$$\varphi(ax^2 + bx + c) = (a - b + c)x(x^2 - 1).$$

a) Dokažte, že φ je lineární zobrazení. **b)** Najděte nějaké báze podprostorů $\operatorname{Ker}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$. **c)** Najděte nějaké báze vektorových prostorů $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathbb{R}_3[x]$, vzhledem k nimž má matice zobrazení φ blokový tvar $\begin{pmatrix} I_h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, kde I_h je jednotková matice $h \times h$. Určete nejprve hodnotu h. *(1 + 2 + 2 body)*

3. Nechť $A = \begin{pmatrix} d_1 & a & b \\ 0 & d_2 & c \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ je horní trojúhelníková matice nad polem K. **a)** A má inverzní matici, právě když všechny její prvky na diagonále jsou různé od 0. Dokažte. **b)** V tomto případě A^{-1} vypočítejte. *(1 + 2 body)*

4. Najděte parametrické vyjádření průniku afinních podprostorů $P_1 : (1, -1, 0, 2) + \alpha(0, 0, 1, 1) + \beta(1, -1, 0, 0)$ a $P_2 : (2, 0, 1, 1) + \tau(1, 0, 1, 0) + \sigma(0, -1, 0, 1)$ v $\mathbb{R}^4$ a určete jeho dimenzi. *(3 body)*

Písemka z lineární algebry I, D

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se výsledek započítává s váhou 2.

1. Nechť $\varphi\colon V \to U$ je lineární zobrazení, $x_1, \ldots, x_n \in V$. **a)** Jsou-li vektory $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$ lineárně nezávislé v U, pak vektory $x_1, \ldots, x_n$ jsou lineárně nezávislé ve V. Dokažte. **b)** Rozhodněte, zda platí tvrzení: Jsou-li $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$ lineárně závislé v V, pak $x_1, \ldots, x_n$ jsou lineárně závislé ve V. Pokud ano, dokažte. Pokud ne, najděte protipříklad. *(2 + 2 body)*

2. Uvažujme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dané předpisem

$$\varphi(ax^2 + bx + c) = (a + 2b - c)(x^3 - 1).$$

a) Dokažte, že φ je lineární zobrazení. **b)** Najděte nějaké báze podprostorů $\operatorname{Ker}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$. **c)** Najděte nějaké báze vektorových prostorů $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathbb{R}_3[x]$, vzhledem k nimž má matice zobrazení φ blokový tvar $\begin{pmatrix} I_h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, kde I_h je jednotková matice $h \times h$. Určete nejprve hodnotu h. *(1 + 2 + 2 body)*

3. Nechť $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b & a_2 & 0 \\ c & d & a_3 \end{pmatrix}$ je dolní trojúhelníková matice nad polem K. **a)** A má inverzní matici, právě když všechny její prvky na diagonále jsou různé od 0. Dokažte. **b)** V tomto případě A^{-1} vypočítejte. *(1 + 2 body)*

4. Najděte parametrické vyjádření průniku afinních podprostorů $Q_1 : (3, 0, -3, 3) + \alpha(1, 0, -1, 0) + \beta(0, 2, 0, 1)$ a $Q_2 : (4, -2, -4, 2) + \tau(0, 0, 1, -1) + \sigma(1, 2, 0, 0)$ v $\mathbb{R}^4$ a určete jeho dimenzi. *(3 body)*