## Písemka z lineární algebry I, A

*Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se výsledek započítává s váhou 2.*

**1.** Nechť $x = (1,2,3,4)$, $y = (0,1,-2,3)$, $z = (-1,0,-7,2)$, $u = (-5,2,0,-2)$, $v = (-3,0,14,-4)$. Určete dimenzi lineárního podprostoru $[x,y,z] \cap [u,v] \subseteq \mathbb{R}^4$. Závorky [ ] označují lineární obal. *(2 body)*

**2.** Nechť $\varphi\colon V \to U$ je lineární zobrazení. Pre libovolné vektory $x_1,\dots,x_n \in V$ platí $\varphi[x_1,\dots,x_n] = [\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n)]$. Dokažte. *(2 body)*

**3.** Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých $x$, $y$, $z$:

$$ax + y - 2z = 1 \quad , \quad x - y + z = 0 \quad , \quad (1+a)y - z = b.$$

Najděte všechny hodnoty parametrů $a$, $b$, pro které má soustava a) jediné řešení, b) nekonečně mnoho řešení, c) žádné řešení. V případech a), b) najděte tato řešení v závislosti na $a$, $b$. *(2 + 2 + 1 bod)*

**4.** Vypočítejte determinant matice $A$. *(3 body)*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 4 & -6 \\ 6 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 2 & 1 & -10 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -9 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

**5.** Najděte matici lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ daného pomocí matice $B$ předpisem $\varphi((x,y,z)^T) = B\cdot(x,y,z)^T$ vzhledem k bázi $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(3,7,5)^T$ v $\mathbb{R}^3$ a $(1,1,3,0)^T$, $(-1,-6,2,-5)^T$, $(0,0,1,0)^T$, $(0,0,0,1)^T$ v $\mathbb{R}^4$. *(3 body)*

---

## Písemka z lineární algebry I, B

*Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se výsledek započítává s váhou 2.*

**1.** Nechť $x = (-1,2,0,1)$, $y = (-2,5,-2,0)$, $z = (-1,1,2,3)$, $u = (0,1,2,3)$, $v = (2,3,-1,0)$. Určete dimenzi lineárního podprostoru $[x,y,z] \cap [u,v] \subseteq \mathbb{R}^4$. Závorky [ ] označují lineární obal. *(2 body)*

**2.** Nechť $\varphi\colon V \to U$ je lineární zobrazení a nechť $V_1$ a $V_2$ jsou vektorové podprostory ve $V$. Dokažte, že platí $\varphi(V_1 + V_2) = \varphi(V_1) + \varphi(V_2)$. *(2 body)*

**3.** Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých $x$, $y$, $z$:

$$-2x + y + cz = 1 \quad , \quad x - y + z = 0 \quad , \quad cy + z = d.$$

Najděte všechny hodnoty parametrů $c$, $d$, pro které má soustava a) jediné řešení, b) nekonečně mnoho řešení, c) žádné řešení. V případech a), b) najděte tato řešení v závislosti na $c$, $d$. *(2 + 2 + 1 bod)*

**4.** Vypočítejte determinant matice $C$. *(3 body)*

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 4 & -6 \\ 2 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 3 & -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 7 & -2 & -6 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

**5.** Najděte matici lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ daného pomocí matice $D$ předpisem $\varphi((x,y,z)^T) = D\cdot(x,y,z)^T$ vzhledem k bázi $(0,0,1)^T$, $(0,1,0)^T$, $(4,5,3)^T$ v $\mathbb{R}^3$ a $(2,0,2,5)^T$, $(1,0,0,0)^T$, $(2,-4,-6,7)^T$, $(0,1,0,0)^T$ v $\mathbb{R}^4$. *(3 body)*