A. Písemka z lineární algebry I, leden 1999

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. V $\mathbb{R}^4$ určete bázi $U_1 \cap U_2$ a dimenzi $U_1 + U_2$. Přitom $U_1 = [(1,1,0,2),(0,0,1,2),(-1,-1,0,0)]$, $U_2 = [(0,2,1,-2),(3,1,0,-1),(0,-4,0,4)]$. *(2 body)*

2. Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $f(ax^2+bx+c) = (a+b)x^2 + (c-b)x + (a+c)$.
a) Dokažte, že f je lineární zobrazení. *(1 bod)*
b) Najděte všechny polynomy, které leží v jeho jádře. *(1 bod)*
c) Napište matici zobrazení f ve standardní bázi $\epsilon = (1, x, x^2)$. *(1 bod)*

3. Pomocí Laplaceova rozvoje a řádkových úprav vypočtěte

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & x & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & x & 8 \end{vmatrix}.$$ *(2 body)*

4. V $\mathbb{R}^3$ najděte matici přechodu od standardní báze ϵ k bázi $\alpha = ((4,3,-1)^T, (0,1,0)^T, (-2,-4,3)^T)$. Pomocí této matice spočítejte souřadnice vektoru $v = (1,2,1)^T$ v bázi α. *(3 body)*

5. **(a)** Napište definici determinantu. **(b)** Napište Cramerovo pravidlo pro řešení rovnice $Ax = b$ (nezapomeňte na předpoklady). **(c)** Dokažte, že jádro lineárního zobrazení je vektorový podprostor. **(d)** Najděte lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ a podprostory U, V v $\mathbb{R}^2$ tak, že $f(U) \cap f(V) \neq f(U \cap V)$. **(e)** Najděte nějaký lineární izomorfismus prostorů $\mathbb{R}_1[x]$ a $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{R}$. *(1+1+1+1+1 bod)*

B. Písemka z lineární algebry I, leden 1999

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. V $\mathbb{R}^4$ určete bázi $U_1 \cap U_2$ a dimenzi $U_1 + U_2$. Přitom $U_1 = [(3,0,-1,1),(0,2,-3,3),(0,0,1,-1)]$, $U_2 = [(3,2,2,0),(0,1,1,4),(0,2,2,0)]$. *(2 body)*

2. Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $f(ax^2+bx+c) = (a-b)x^2 + (a-c)x + (b-c)$.
a) Dokažte, že f je lineární zobrazení. *(1 bod)*
b) Najděte všechny polynomy, které leží v jeho jádře. *(1 bod)*
c) Napište matici zobrazení f ve standardní bázi $\epsilon = (1, x, x^2)$. *(1 bod)*

3. Pomocí Laplaceova rozvoje a sloupcových úprav vypočtěte $\det A = \begin{vmatrix} x & 4 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & x & 0 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & x & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & x \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$. *(2 body)*

4. V $\mathbb{R}^3$ najděte matici přechodu od standardní báze ϵ k bázi $\alpha = ((-2,2,-2)^T, (-1,0,1)^T, (1,0,1)^T)$. Pomocí této matice spočítejte souřadnice vektoru $v = (1,2,-1)^T$ v bázi α. *(3 body)*

5. **(a)** Napište definici hodnosti matice. **(b)** Napište Laplaceův rozvoj determinantu matice $n \times n$ podle 1. sloupce. **(c)** Dokažte, že pro $f : U \to V$ lineární a každé dva podprostory U_1, $U_2 \subseteq U$ platí $f(U_1 + U_2) = f(U_1) + f(U_2)$. **(d)** Najděte lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s jádrem dimenze 1. **(e)** Najděte nějaký lineární izomorfismus prostorů $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{C}^2$ nad polem $\mathbb{R}$. *(1+1+1+1+1 bod)*