C. Písemka z lineární algebry I, leden 1999

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých x, y, z:

$$x - ay - 2z = b \quad , \quad x + (1-a)y = b - 3 \quad , \quad x + (1-a)y + az = 2b - 1.$$

Najděte všechny hodnoty parametrů a, b, pro které má soustava a) jediné řešení, b) nekonečně mnoho řešení, c) žádné řešení. V případech a), b) najděte tato řešení v závislosti na a, b. *(1 + 1 + 1 bod)*

2. Uvažujme zobrazení $f : \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{1,2}(\mathbb{C})$, $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \cdot X$.

a) Dokažte, že f je lineární zobrazení. *(1 bod)*

b) Najděte všechny matice, které leží v jeho jádře. *(1 bod)*

c) Napište matici $(f)_{\alpha,\beta}$ zobrazení f v bázích $\alpha : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\beta : \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. *(1 bod)*

3. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & b & a & \dots & a \\ 1 & a & b & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a & a & \dots & b \end{vmatrix}$ matice $n \times n$. *(2 body)*

4. V $\mathbb{R}^3$ najděte matici přechodu od standardní báze ε k bázi $\alpha = ((-6,4,12)^T, (4,2,8)^T, (5,-1,3)^T)$. *(2 body)*

5. (a) Napište definici báze vektorového prostoru. **(b)** Napište inverzní matici k matici $A = (a_{ij})$ pomocí algebraických doplňků, je-li $\det A \neq 0$. **(c)** Pomocí hodnosti matice vyjádřete dimenzi prostoru řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ o n neznámých. **(d)** Najděte dvě lineární zobrazení $f : U \to V$ a $g : V \to U$ tak, že $f \circ g$ je izomorfismus, ale $g \circ f$ není izomorfismus. **(e)** Najděte nějaké lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takové, že $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$. *(1+1+1+1+1 bod)*

D. Písemka z lineární algebry I, leden 1999

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých x, y, z:

$$x + cy - cz = -3 \quad , \quad x + (c-1)y - (c+3)z = -5 \quad , \quad x + (c+1)y + 2z = d - 1.$$

Najděte všechny hodnoty parametrů c, d, pro které má soustava a) jediné řešení, b) nekonečně mnoho řešení, c) žádné řešení. V případech a), b) najděte tato řešení v závislosti na c, d. *(1 + 1 + 1 bod)*

2. Uvažujme zobrazení $f : \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{2,1}(\mathbb{C})$, $f(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

a) Dokažte, že f je lineární zobrazení. *(1 bod)*

b) Najděte všechny matice, které leží v jeho jádře. *(1 bod)*

c) Napište matici $(f)_{\alpha,\beta}$ zobrazení f v bázích $\alpha : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\beta : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(1 bod)*

3. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x & 1 \end{vmatrix}$ matice $n \times n$. *(2 body)*

4. V $\mathbb{R}^3$ najděte matici přechodu od standardní báze ε k bázi $\alpha = ((2,0,3)^T, (-1,-1,-1)^T, (2,3,1)^T)$. *(2 body)*

5. (a) Napište definici souřadnic vektoru u v bázi α vektorového prostoru. **(b)** Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{\mathrm{n,n}}(\mathbb{C})$. Dokažte, že z existence inverzní matice A^{-1} plyne $\det A \neq 0$. **(c)** Pomocí hodnosti matice udejte nutnou a postačující podmínku na řešitelnost soustavy lineárních rovnic $Ax = b$. **(d)** Najděte dvě lineární zobrazení $f : U \to V$ a $g : V \to W$ tak, že $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \{0\}$, ale $\mathrm{Ker}(g) \neq \{0\}$ **(e)** Najděte nějaké lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takové, že $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$. *(1+1+1+1+1 bod)*