## X. Písemka z lineární algebry I, leden 1999

*Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2*

**1.** Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých $x$, $y$, $z$ nad polem $\mathbb{Z}_5$:

$$2x + 3y = 1 \quad , \quad 3x + 4y + az = 2 \quad , \quad 3x + 4az = b.$$

Najděte všechny hodnoty parametrů $a$, $b$, pro které má soustava a) jediné řešení, b) více než jedno řešení, c) žádné řešení. V případech a), b) vyjádřete řešení v závislosti na $a$, $b$ pomocí operací sčítání a násobení nad $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. *(3 body)*

**2.** V $\mathbb{R}^4$ určete bázi $U_1 \cap U_2$. Přitom $U_1 = [(1,0,1,3), (2,-1,2,0), (-1,1,-1,1)]$, $U_2 = [(1,2,0,1), (3,2,2,1)]$. *(2 body)*

**3.** Vypočtěte determinant matice $A$ tvaru $n \times n$. *(2 body)*

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a & \dots & a & a \\ a & b & a & a & \dots & a & a \\ b & a & a & a & \dots & a & a \\ a & a & b & a & \dots & a & a \\ a & a & a & b & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & a & \dots & b & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**4.** Nechť $B$ je matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ve standardních bazích $\varepsilon^3$ and $\varepsilon^2$. **a)** Najděte matici tohoto zobrazení v bazích $\alpha = ((1,0,-1)^T, (1,-1,1)^T, (1,2,0)^T)$ a $\varepsilon^2$. **b)** Najděte matici přechodu od báze $\varepsilon^2$ k bázi $\beta = ((1,3)^T, (2,7)^T)$. **c)** Najděte matici zobrazení $f$ v bazích $\alpha$ a $\beta$. *(1 + 1 +1 bod)*

**5.** **(a)** Napište definici lineárního zobrazení. **(b)** Napište definici lineárního obalu vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$. **(c)** Uvažujme vektorové prostory nad polem $\mathbb{Z}_5$. Kolik je lineárních zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5$? Výsledek zdůvodněte. **(d)** Napište dvě různé báze prostoru $\mathbb{C}_1[x]$ (polynomů stupně nejvýše 1 s koeficienty v $\mathbb{C}$) nad polem $\mathbb{C}$. **(e)** Najděte nějaké lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že vektory $f(28,1)$ a $f(1999,2000)$ jsou lineárně závislé a přitom různé od 0. *(1+1+1+1+1 bod)*

---

## Y. Písemka z lineární algebry I, leden 1999

*Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2*

**1.** Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých $x$, $y$, $z$ nad polem $\mathbb{Z}_5$:

$$3x + cz = 1 \quad , \quad 2x + 4y + cz = 3 \quad , \quad 2x + y + 2cz = d.$$

Najděte všechny hodnoty parametrů $c$, $d$, pro které má soustava a) jediné řešení, b) více než jedno řešení, c) žádné řešení. V případech a), b) vyjádřete řešení v závislosti na $c$, $d$ pomocí operací sčítání a násobení nad $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. *(3 body)*

**2.** V $\mathbb{R}^4$ určete bázi $U_1 \cap U_2$. Přitom $U_1 = [(1,0,-1,3), (2,-1,-2,0), (1,1,-1,1)]$, $U_2 = [(1,2,0,1), (-1,2,2,1)]$. *(2 body)*

**3.** Vypočtěte determinant matice $A$ tvaru $n \times n$. *(2 body)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & y & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & y & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & y & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**4.** Nechť $B$ je matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ve standardních bazích $\varepsilon^3$ and $\varepsilon^2$. **a)** Najděte matici tohoto zobrazení v bazích $\alpha = ((1,0,-1)^T, (1,-1,1)^T, (1,2,0)^T)$ a $\varepsilon^2$. **b)** Najděte matici přechodu od báze $\varepsilon^2$ k bázi $\beta = ((3,2)^T, (4,3)^T)$. **c)** Najděte matici zobrazení $f$ v bazích $\alpha$ a $\beta$. *(1 + 1 +1 bod)*

**5.** **(a)** Napište definici vektorového podprostoru ve vektorovém prostoru. **(b)** Napište definici lineární nezávislosti vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$ ve vektorovém prostoru. **(c)** Uvažujme vektorové prostory nad polem $\mathbb{Z}_3$. Kolik je lineárních zobrazení $f : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^2$? Výsledek zdůvodněte. **(d)** Napište dvě různé báze prostoru $\mathrm{Mat}_{1,2}(\mathbb{C})$ nad polem $\mathbb{C}$. **(e)** Najděte nějaké lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že vektory $f(66,77)$ a $f(88,99)$ jsou lineárně závislé a přitom různé od 0. *(1+1+1+1+1 bod)*