

Jméno:

login:

Předmět:

**A. Písemka z lineární algebry I, leden 2002 – početní část**

*Max. počet bodů 12*

1. Pro které hodnoty parametru  $a \in \mathbb{R}$  má matice  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  inverzní matici? Vypočtěte ji. (2 body)

2. V  $\mathbb{R}^5$  popište soustavou rovnic afinní podprostor  $(0, 0, 1, 0, 1) + \alpha(0, 1, 0, -1, 1) + \beta(1, 0, 0, -2, 3)$ . (2 body)

3. V  $\mathbb{R}^4$  uvažujme rovinu  $\rho : (0, 1, 0, 0) + \alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(1, 0, 1, 0)$  a přímku  $p : (0, 0, 0, 1) + \gamma(0, 0, -1, 1)$ . Najděte přímku  $q$ , která prochází počátkem  $(0, 0, 0, 0)$ , protíná rovinu  $\rho$  a přímku  $p$ . Slovy popište stručně postup a vypočtěte. (2 body)

4. V  $\mathbb{R}^4$  zjistěte vzájemnou polohu roviny  $\rho : 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, x_1 - x_3 + x_4 = 3$  a přímky  $p : (2, -1, 0, 3) + \alpha(1, 4, 2, 1)$ . (2 body)

5. Matice lineárního zobrazení  $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  v bázi  $\alpha = (1, 1 + x, x^2)$  je

$$(f)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici  $(f)_{\beta, \beta}$  v bázi  $\beta = (1, x, 1 + x^2)$ .

(2 body)

6. Uvažujme lineární zobrazení  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4, 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4, x_2 + x_3 - x_4).$$

Najděte bázi  $\text{Ker } f$  a bázi  $\text{Im } f$ .

(2 body)

**Theoretická část – pouze pro předmět M003**

*Max. počet bodů 8*

1. Napište definici lineárního obalu vektorů  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . (1 bod)

2. Napište Laplaceův rozvoj determinantu podle 2. řádku. (1 bod)

3. Napište matici přechodu od báze  $\alpha = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  k bázi  $\beta = (v_2, v_4, v_3, v_1)$ . (1 bod)

4. Které z axiomů vektorového prostoru nejsou splněny pro množinu  $V = \mathbb{R}$  a operace  $a \odot x = a^2x$  a  $x \oplus y = x + y$ ? (1 bod)

5. V  $\mathbb{R}^5$  uveďte jednoduchý příklad dvou afinních podprostorů dimenze 2 a 3, které jsou mimoběžné. Mimoběžnost dokažte. (1 bod)

6. Existují soustavy rovnic  $Ax = b$  a  $Ax = c$  o třech neznámých, z nichž prvá má právě jedno řešení a druhá jich má nekonečně mnoho? Své tvrzení dokažte. (1 bod)

7. Popište všechny afinní podprostory v  $\mathbb{R}^3$ . (1 bod)

8. Necht'  $f : U \rightarrow V$  je lineární zobrazení a  $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ . Jsou-li  $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_k)$  lineárně nezávislé, pak  $u_1, u_2, \dots, u_k$  jsou rovněž lineárně nezávislé. Dokažte. (1 bod)

Jméno:

login:

Předmět:

**B. Písemka z lineární algebry I, leden 2002 – početní část**

*Max. počet bodů 12*

1. Pro které hodnoty parametru  $b \in \mathbb{R}$  má matice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & b \\ 1 & b & b & b \end{pmatrix}$  inverzní matici? Vypočtěte ji. (2 body)

2. V  $\mathbb{R}^5$  popište soustavou rovnic afinní podprostor  $(0, 1, -1, 0, 0) + \alpha(1, 3, 0, -2, 0) + \beta(0, -1, 0, 1, -1)$ . (2 body)

3. V  $\mathbb{R}^4$  uvažujme rovinu  $\rho : (0, 0, 1, 0) + \alpha(0, 0, 1, 1) + \beta(0, 1, 0, 1)$  a přímku  $p : (1, 0, 0, 0) + \gamma(-1, 1, 0, 0)$ . Najděte přímku  $q$ , která prochází počátkem  $(0, 0, 0, 0)$ , protíná rovinu  $\rho$  a přímku  $p$ . Slovy popište stručně postup a vypočtěte. (2 body)

4. V  $\mathbb{R}^4$  zjistiťte vzájemnou polohu roviny  $\rho : 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, x_1 - x_3 + x_4 = 3$  a přímky  $p : (2, -1, 2, 4) + \alpha(1, 4, 2, 3)$ . (2 body)

5. Matice lineárního zobrazení  $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  v bázi  $\alpha = (1, x, x + x^2)$  je

$$(f)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici  $(f)_{\beta, \beta}$  v bázi  $\beta = (1, 1 + x, x^2)$ .

(2 body)

6. Uvažujme lineární zobrazení  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4, 4x_1 + 4x_2 - 4x_4, -x_1 + x_3 + 2x_4, 2x_2 + 2x_3 + 2x_4).$$

Najděte bázi  $\text{Ker } f$  a bázi  $\text{Im } f$ .

(2 body)

**Teoretická část – pouze pro předmět M003**

*Max. počet bodů 8*

1. Napište definici součtu dvou podprostorů ve vektorovém prostoru  $U$ . (1 bod)

2. Napište Laplaceův rozvoj determinantu podle 3. sloupce. (1 bod)

3. Napište matici přechodu od báze  $\alpha = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  k bázi  $\beta = (v_3, v_1, v_4, v_2)$ . (1 bod)

4. Které z axiomů vektorového prostoru nejsou splněny pro množinu  $V = \mathbb{R}$  a operace  $a \odot x = -ax$  a  $x \oplus y = x + y$ ? (1 bod)

5. V  $\mathbb{R}^5$  uveďte jednoduchý příklad dvou afinních podprostorů dimenze 3, které jsou mimoběžné. Mimoběžnost dokažte. (1 bod)

6. Nechť  $f : U \rightarrow V$  je lineární zobrazení a  $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ . Jsou-li  $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_k)$  lineárně nezávislé, pak  $u_1, u_2, \dots, u_k$  jsou rovněž lineárně nezávislé. Dokažte. (1 bod)

7. Napište dvě vlastní podmnožiny  $\mathbb{R}^3$ , které jsou afinními podprostory a dvě, které jimi nejsou. (1 bod)

8. Existují soustavy rovnic  $Ax = b$  a  $Ax = c$  o třech neznámých, z nichž prvá nemá žádné řešení a druhá má právě jedno? Své tvrzení dokažte. (1 bod)