

C. Písemka z lineární algebry I, leden 2002 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Nechť A je matice tvaru $n \times n$ taková, že $A_{ij} = 1$ pro $i < j$ a $A_{ij} = 0$ pro $i \geq j$. Vypočtěte součin $A \cdot A$. (2 body)

2. Pro které hodnoty parametrů $p, q \in \mathbb{R}$ soustava rovnic

$$\begin{aligned}x - y - z &= 0 \\px + y - 2z &= 1 \\(1 + p)y - z &= q\end{aligned}$$

(i) nemá žádné řešení, (ii) má nekonečně mnoho řešení? V druhém případě všechna řešení najděte. (2 body)

3. V \mathbb{R}^4 uvažujme nadrovinu $\rho : x_1 + x_2 + x_3 = 0$, přímku $p : (3, -5, 1, 3) + \gamma(1, 1, 1, 1)$ a bod $M = (2, 0, 0, 2)$. Najděte přímku q , která prochází bodem M , protíná přímku p a je rovnoběžná s nadrovinou ρ . Slovy popište stručně postup a vypočtěte. (2 body)

4. V \mathbb{R}^4 zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : -x_1 + x_3 + 4x_4 = 5$, $-2x_2 + x_3 + x_4 = 3$ a přímky $p : (1, 9, 9, 9) + \alpha(5, 1, 1, 1)$. (2 body)

5. Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ v bázi $\alpha = (1, 1 + x^2, x, x + x^3)$ je

$$(f)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici $(f)_{\beta, \beta}$ v bázi $\beta = (1, 1 + x, x^2, x^3)$.

(2 body)

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4, 2x_1 - x_2 + x_3, x_1 - x_2 - x_4, 2x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

Najděte bázi $\text{Ker } f$ a bázi $\text{Im } f$.

(2 body)

Teoretická část

Max. počet bodů 8

1. Napište pečlivě definici determinantu matice. (1 bod)

2. \mathbb{C}^2 je vektorový prostor nad \mathbb{C} . Napište nějakou jeho bázi obsahující vektor $(1 + i, i)$. (1 bod)

3. \mathbb{C}^2 je rovněž vektorový prostor nad \mathbb{R} . Napište nějakou jeho bázi obsahující vektor $(1 + i, i)$. (1 bod)

4. Napište matici přechodu od báze $\alpha = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ k bázi $\beta = (v_2 + v_3, v_3, v_4, -v_1)$. (1 bod)

5. Které z axiomů vektorového prostoru nad \mathbb{R} nejsou splněny pro množinu $V = \mathbb{R}$ a operace $a \odot x = a^2x$ a $x \oplus y = 2x + 2y$? (1 bod)

6. Napište předpis pro nějaký lineární izomorfismus $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, který není násobkem identity. (1 bod)

7. Na pěti řádcích napište základní myšlenku důkazu formule pro výpočet dimenze součtu podprostorů. (1 bod)

8. Nechť $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Nechť u_1, u_2, \dots, u_k je báze $\text{Ker } f$ a nechť $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ je báze U . Dokažte, že vektory $f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \dots, f(u_n)$ jsou lineárně nezávislé. (1 bod)