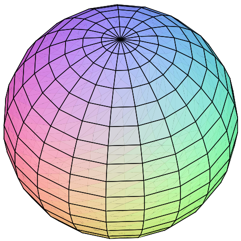
Zuzana Došlá — Ondřej Došlý

Metrické prostory

Teorie a příklady



PŘEDMLUVA

Tato skripta vznikla na základě zkušeností v odborném a učitelském studiu v letech 1982–1995 na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. Nejde pouze o zkušenosti z výuky *metrických prostorů*, které jsou probírány před diferenciálním počtem funkcí více proměnných, ale i o zkušenosti z jiných partií matematické analýzy. Odráží se v nich potřeba vést studenty k tomu, aby viděli souvislosti mezi různými partiemi matematické analýzy (např. odvození definice spojité funkce jedné a více proměnných jako speciální případ spojitého zobrazení mezi metrickými prostory), příp. jiných disciplín (např. použití Banachova principu v numerických metodách, při důkazu existence a jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic). V tomto duchu jsou psána celá skripta. Ta — jak věříme — mohou být užitečná jak pro studenty odborného studia, kteří si budou vybírat obtížnější a z hlediska metrických prostorů zajímavější příklady, tak pro studenty učitelského studia, pro něž jsou zařazeny příklady se středoškolskou tematikou.

Látka obsažená v těchto skriptech je rozdělena do sedmi kapitol. Kapitoly jsou členěny do odstavců, na konci každého odstavce jsou cvičení (obtížné příklady ve cvičení jsou označeny hvězdičkou); výsledky k nim lze najít v závěru textu. Skripta jsou určena pro posluchače odborného studia matematiky, fyziky a informatiky a pro posluchače učitelského studia matematiky. Snahou autorů bylo vytvořit text, který čtenáře seznámí s některými základy funkcionální analýzy a topologie a ukáže jim zajímavost a krásu těchto abstraktních disciplín.

Toto vydání se liší od předcházejících po formální a jazykové stránce; text byl vysázen pomocí sázecího systému TEX ve formátu LATEX 2$_\varepsilon$, obrázky byly připraveny programem METAPOST. Videozáznamy přednášek jsou k dispozici na webových stránkách autorů (http://www.math.muni.cz/~dosla/). Jazyková korektura byla provedena v nakladatelství Konvoj.

Brno, listopad 2006 Autoři

OBSAH

Kapitola I

METRICKÝ PROSTOR

Pojem vzdálenosti známe z každodenního života. Uveďme si několik příkladů.

Ve městě, kde ulice tvoří pravoúhlou síť — představme si např. newyorskou čtvrť Manhattan — máme za úkol dopravovat zboží z obchodu k jednotlivým zákazníkům. K dispozici máme buď vrtulník (je možno přistávat na střechách domů), nebo nákladní auto. Je zřejmé, že chceme-li minimalizovat dopravní náklady, v prvním případě nás zajímá vzdušná vzdálenost (tj. délka úsečky mezi dvěma body), ve druhém případě délka lomené čáry vedoucí ulicemi města.

Jako druhý příklad uvažujme dvě vzdálená města na zeměkouli, např. Prahu a Tokio. V tomto případě vzdušnou vzdáleností těchto dvou měst rozumíme délku hlavní kružnice zemského povrchu určené těmito městy (pro jednoduchost předpokládáme, že naše planeta má tvar koule, pak hlavní kružnicí na zemském povrchu určenou dvěma body rozumíme průsečík kulové plochy s rovinou určenou těmito body a středem koule).

V obou předchozích příkladech měl pojem vzdálenosti geometrický význam — znamenal délku nějaké křivky. S pojmem vzdálenost se však můžeme setkat i tam, kde vůbec nemá geometrický význam. Mluvíme například o blízkých a vzdálených příbuzných, je tedy vlastně dáno pravidlo určující „vzdálenost“ na množině navzájem spřízněných lidí.

Kromě výše uvedených každodenních příkladů se můžeme s pojmem vzdálenosti nějakých objektů setkat všude tam, kde je třeba kvantitativně (tj. pomocí nějaké číselné veličiny) charakterizovat, jak jsou si tyto objekty podobné. V tomto smyslu můžeme např. v chemii mluvit o blízkých chemických sloučeninách, v matematice můžeme pomocí blízkosti reálných funkcí měřit přesnost aproximace funkce pomocí Taylorova mnohočlenu apod.

Odhlédneme-li v našich příkladech od podstaty prvků, jejichž vzdálenost vyšetřujeme, můžeme najít následující tři obecné rysy, které jsou pro všechny vzdálenosti společné. Tím se dostáváme k definici metriky a metrického prostoru.

I.1. Pojem metriky

Nechť $\mathbb{R}$ označuje množinu reálných čísel, $\mathbb{R}_+$ množinu nezáporných reálných čísel a $\mathbb{R}^n$ množinu uspořádaných n-tic reálných čísel.

Definice 1.1. *Metrickým prostorem* nazýváme dvojici (P, ρ), kde P je libovolná *neprázdná* množina a zobrazení $\rho\colon P \times P \to \mathbb{R}_+$ splňuje pro každé $x, y, z \in P$ následující tři axiomy:

(M1) $\rho(x, y) = 0$ právě když $x = y$ (axiom totožnosti);
(M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (axiom symetrie);
(M3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (trojúhelníková nerovnost).

Zobrazení ρ nazýváme *metrikou* na P, prvky množiny P obvykle nazýváme *body* prostoru (P, ρ), číslo $\rho(x, y)$ nazýváme *vzdáleností* bodů x, y v prostoru (P, ρ).

V následujících příkladech a cvičeních zavedeme nejužívanější metrické prostory, se kterými budeme pracovat v dalších kapitolách.

Příklady 1.2.

i) Euklidovský prostor $\mathbb{E}^n$. Ve středoškolské matematice se nejčastěji setkáváme s pojmem vzdálenost ve smyslu délky úsečky mezi dvěma body ve dvoj a trojrozměrném prostoru. Například pro body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ v $\mathbb{R}^3$ je tato vzdálenost rovna

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Tento vztah můžeme rozšířit i pro n-rozměrný prostor $P = \mathbb{R}^n$, přičemž pro $A = [a_1, \dots, a_n]$, $B = [b_1, \dots, b_n] \in \mathbb{R}^n$ definujeme

$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2}.$$

Takto definovaná funkce na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ splňuje všechny tři axiomy z Definice 1.1, nazývá se *euklidovská* metrika a v dalším textu ji budeme značit ρ_2. Metrický prostor $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ označujeme $\mathbb{E}^n$.

Platnost prvních dvou axiomů je triviální. Trojúhelníková nerovnost je důsledkem obecnější nerovnosti — tzv. Minkowského nerovnosti (viz odstavec VII.1), jejímž důsledkem je nerovnost

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2},$$

která platí pro každé $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$. Jsou-li nyní $A = [a_1, \dots, a_n]$, $B = [b_1, \dots, b_n]$, $C = [c_1, \dots, c_n] \in \mathbb{R}^n$ a dosadíme-li do předchozí nerovnosti $x_k = (a_k - b_k)$, $y_k = (b_k - c_k)$, dostáváme nerovnost

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - c_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k - c_k)^2},$$

což je trojúhelníková nerovnost $\rho_2(A, C) \le \rho_2(A, B) + \rho_2(B, C)$.

Poznamenejme, že pro $n = 1$ plyne trojúhelníková nerovnost ihned z nerovnosti $|x + y| \le |x| + |y|$. Pro $n = 2$ lze také dokázat trojúhelníkovou nerovnost pomocí kosinové věty, podle níž platí

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníka ABC, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ a β je úhel při vrcholu B. Užitím této věty dostáváme

$$(a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = b^2 + 2ac(\cos\beta + 1) \geq b^2,$$

odkud okamžitě plyne $a + c \geq b$, tj. $\rho_2(B, C) + \rho_2(A, B) \geq \rho_2(A, C)$.

ii) Diskrétní (triviální) metrický prostor. Nechť $P \neq \emptyset$. Funkce ρ definovaná na $P^2 = P \times P$ vztahem

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \neq y, \\ 0, & \text{pro } x = y, \end{cases}$$

je metrika na P (tzv. *triviální* nebo také *diskrétní* metrika), metrický prostor s touto metrikou se nazývá *diskrétní* metrický prostor.

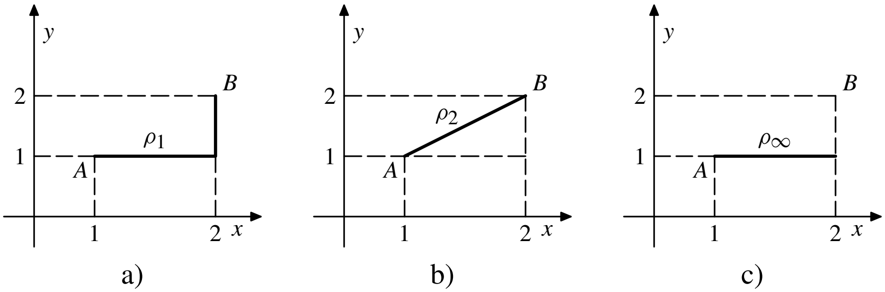
iii) Další metriky na $\mathbb{R}^n$. Pro $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definujme

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \qquad (\textit{součtová metrika}),$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k| \qquad (\textit{maximální metrika}).$$

Takto definované funkce jsou metrikami na $\mathbb{R}^n$. Platnost axiomů (M1), (M2) je zřejmá. Dále platí $\rho_1(x, y) + \rho_1(y, z) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k| = \sum_{k=1}^{n} (|x_k - y_k| + |y_k - z_k|) \geq \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k + y_k - z_k| = \rho_1(x, z)$. V případě metriky ρ_∞ dostáváme $\rho_\infty(x, y) + \rho_\infty(y, z) = \max_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k| + \max_{1\leq k\leq n} |y_k - z_k| \geq \max_{1\leq k\leq n} (|x_k - y_k| + |y_k - z_k|) \geq \max_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k + y_k - z_k| = \rho_\infty(x, z)$, v obou případech tedy platí i trojúhelníková nerovnost.

Všimněme si, že pro $n = 1$ jsou metriky ρ_1 i ρ_∞ totožné s euklidovskou metrikou ρ_2. Je-li $n = 2$, je metrika ρ_1 právě rozhodující při dopravě nákladním autem v úvodním příkladu (z tohoto důvodu se jí také někdy říká *taxíkářská metrika*.



Obrázek 1: Vzdálenost bodů A, B v metrikách ρ_1, ρ_2, ρ_∞

iv) Metriky na množině spojitých funkcí. Nechť $C[a, b]$ značí množinu reálných funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$. Pro $f, g \in C[a, b]$ definujme

$$\rho_c(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|,$$

$$\rho_I(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

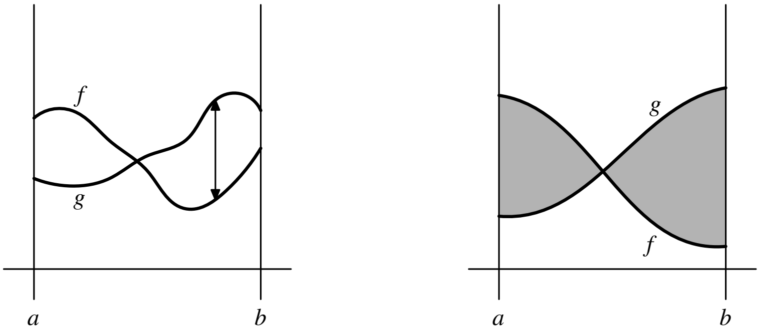
Takto definované funkce na $C[a, b]$ jsou metrikami.

V případě metriky ρ_c je ověření axiomů (M1) a (M2) triviální, a jsou-li $f, g, h \in C[a, b]$, pak

$$\rho_c(f, g) + \rho_c(g, h) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [a,b]} |g(x) - h(x)| \geq$$
$$\geq \max_{x \in [a,b]} \{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\} \geq \max_{x \in [a,b]} \{|f(x) - g(x) +$$
$$+ g(x) - h(x)|\} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| = \rho_c(f, h),$$

čímž je dokázána trojúhelníková nerovnost. Tuto metriku budeme v dalším nazývat *metrikou stejnoměrné konvergence*; zdůvodnění této terminologie ukážeme v následující kapitole o konvergenci, viz Příklad 2.3 iii).

Pro metriku ρ_I (tuto metriku budeme nazývat *integrální metrikou*) je podmínka (M2) splněna triviálně. Abychom dokázali platnost (M1), musíme ukázat, že z rovnosti $\int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x = 0$ plyne $f(x) \equiv g(x)$. Předpokládejme, že existuje $c \in [a, b]$ tak, že $f(c) \neq g(c)$. Protože $|f - g| \in C[a, b]$, existuje $d > 0$ a okolí bodu c ležící v $[a, b]$ tak, že $|f(x) - g(x)| > d$ v tomto



a) v metrice ρ_c b) v metrice ρ_I

Obrázek 2: Vzdálenost funkcí f, g v metrikách ρ_c a ρ_I

okolí. Označíme-li $[a_1, b_1]$ průnik tohoto okolí s intervalem $[a, b]$, pak

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \geq \int_{a_1}^{b_1} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x > d(b_1 - a_1) > 0,$$

což je spor, a tedy $f(x) \equiv g(x)$ na intervalu $[a, b]$. Jsou-li $f, g, h \in C[a, b]$, pak

$$\rho_I(f, g) + \rho_I(g, h) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x) - h(x)|\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b \big(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\big)\,\mathrm{d}x \geq$$

$$\geq \int_a^b |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b |f(x) - h(x)| \,\mathrm{d}x = \rho_I(f, h).$$

v) *Metrika na kružnici.* Nechť P je jednotková kružnice v rovině a pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2] \in P$ (tj. $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1$) definujme

$$\rho(A, B) = \text{ délka kratšího z oblouků kružnice mezi body } A, B$$

(analyticky $\rho(A, B) = \arccos\langle A, B\rangle = \arccos(a_1 b_1 + a_2 b_2)$, kde $\langle A, B\rangle$ značí skalární součin vektorů určených body A, B). Platnost prvních dvou axiomů je opět triviální, a platnost třetího lze nejsnáze ověřit nakreslením obrázku a rozborem všech možných poloh trojice bodů vystupujících v trojúhelníkové nerovnosti.

Máme-li např. určit množinu všech bodů $[x, y] \in P$, které mají v této metrice vzdálenost od bodu $[1, 0]$ menší než $\frac{\pi}{3}$, dosadíme do analytického vzorce pro vzdálenost $[a_1, a_2] = [1, 0]$, $[b_1, b_2] = [x, y]$ a dostaneme $\arccos x < \frac{\pi}{3}$, tj. $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ a $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

vi) *Metrika na prostoru ohraničených posloupností.* Označme l_∞ množinu ohraničených posloupností reálných čísel a pro $x = \{x_n\}_1^\infty$, $y = \{y_n\}_1^\infty \in l_\infty$ definujme

$$\rho(x, y) = \sup_{k \in N} |x_k - y_k|.$$

Takto definovaná funkce je metrikou na l_∞, neboť platnost axiomů (M1), (M2) je opět triviální a pro každé $x, y, z \in l_\infty$ platí

$$\rho(x,y)+\rho(y,z) = \sup_{k\in N}|x_k-y_k| + \sup_{k\in\mathbb{N}}|y_k-z_k| \geq$$
$$\geq \sup_{k\in\mathbb{N}}(|x_k-y_k|+|y_k-z_k|) \geq \sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k-z_k| = \rho(x,z).$$

vii) Baireův[1] *metrický prostor.* Nechť P je množina posloupností $a = \{a_n\}_1^\infty$, $b = \{b_n\}_1^\infty$, kde $a_n, b_n \in \mathbb{N}$. Definujme

$$\rho(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{kde } \lambda \text{ je nejmenší index takový, že } a_\lambda \neq b_\lambda, \text{ pro } a \neq b, \\ 0, & \text{pro } a = b. \end{cases}$$

Pak $\rho(a,b)$ je metrika na P. Platnost axiomů (M1), (M2) je zřejmá. Nechť $a = \{a_n\}_1^\infty$, $b = \{b_n\}_1^\infty$, $c = \{c_n\}_1^\infty \in P$. Je-li $\rho(a,b) = 0$ i $\rho(b,c) = 0$, pak $a = b$, $b = c$ a $\rho(a,c) = 0$, tedy trojúhelníková nerovnost platí. Je-li $\rho(a,b) = 0$, $\rho(b,c) = 1/l$, $l \in \mathbb{N}$, pak $a = b$ a $\rho(a,c) = 1/l$, podobně platí trojúhelníková nerovnost v případě $\rho(a,b) \neq 0$ a $\rho(b,c) = 0$. Konečně nechť $\rho(a,b) = 1/k$, $\rho(b,c) = 1/m$, $k, m \in \mathbb{N}$. Pak $a_i = b_i$, $i = 1,\dots,k-1$, $a_k \neq b_k$, $b_i = c_i$, $i = 1,\dots,m-1$, $b_m \neq c_m$. Je-li $n_0 = \min\{k,m\}$, pak $a_i = c_i$, $i = 1,\dots,n_0-1$, a tedy $\rho(a,c) \leq 1/n_0$. Celkem $\rho(a,b)+\rho(b,c) = 1/k + 1/m \geq \frac{1}{\min\{k,m\}} = 1/n_0 \geq \rho(a,c)$.

[1] R. Baire byl významným představitelem francouzské matematické školy z přelomu 19. a 20. století.

viii) Metrika na množině slov. Nechť M je množina všech slov skládajících se z n písmen, kde n je nějaké přirozené číslo (k tomu, zda dané slovo má, nebo nemá význam v českém jazyce, nepřihlížíme). Vzdáleností dvou slov A, B je počet pozic, na kterých mají tato slova různá písmena. Např. pro $n = 5$ je $\rho(\text{mladý, mladá}) = 1$, $\rho(\text{mladý, slabý}) = 2$ atd. Není obtížné ověřit, že tato funkce je opravdu metrikou (platnost (M1), (M2) je opět triviální a platnost trojúhelníkové nerovnosti lze ukázat poměrně jednoduchou úvahou). Metriky tohoto typu na množině n-tic nějakých prvků mají široké použití v chemii a biologii.

ix) Nechť f je rostoucí reálná funkce definovaná na intervalu $[0, \infty)$ taková, že $f(0) = 0$ a platí jedna z podmínek:

a) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ pro $x, y \geq 0$ (tj. f je *subaditivní funkce*),
b) $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$ pro $x, y \geq 0$, $\lambda \in [0, 1]$ (tj. f je *konkávní funkce*).

Pak $\rho(x, y) = f(|x - y|)$ je metrika na $\mathbb{R}$.

Platnost axiomů (M1), (M2) je zřejmá a trojúhelníková nerovnost se dokáže následovně:

a) Pro $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\rho(x, y) + \rho(y, z) &= f(|x - y|) + f(|y - z|) \geq f(|x - y| + |y - z|) \geq \\ &\geq f(|x - y + y - z|) = f(|x - z|) = \rho(x, z).\end{aligned}$$

b) Vzhledem k předchozímu příkladu stačí dokázat, že z konkávnosti f plyne subaditivita. Nechť $x, y > 0$ (případy, kdy $x = 0$ nebo $y = 0$

jsou triviální). Pak z konkávnosti funkce f dostáváme

$$f(y) = f\left(0 \cdot \frac{x}{x+y} + \left(1 - \frac{x}{x+y}\right)(x+y)\right) \geq$$
$$\geq \frac{x}{x+y} f(0) + \frac{y}{x+y} f(x+y) = \frac{y}{x+y} f(x+y).$$

Podobně

$$f(x) \geq \frac{x}{x+y} f(x+y).$$

Sečtením obou nerovností dostáváme subaditivitu funkce f.

Poznámka 1.3. Metrika na dané množině P je tedy definována axiomaticky — je to *libovolná* nezáporná funkce na kartézském součinu $P \times P$ splňující axiomy (M1)–(M3), přičemž, jak jsme viděli v předchozích příkladech, množina P může být *libovolná* neprázdná množina. Jako u každé axiomatické definice je třeba ukázat, že tato definice je korektní, tj. systém axiomů je nezávislý a bezesporný. Bezespornost axiomů (tj. skutečnost, že platnost některých dvou z axiomů (M1)–(M3) nevylučuje platnost třetího) jsme již ukázali předchozími příklady. Nezávislost axiomů (tj. skutečnost, že z platnosti některých dvou neplyne třetí) lze rovněž dokázat konstrukcí vhodných příkladů, viz následující Cvičení 1.4 x).

Poznamenejme, že metriku lze ekvivalentně definovat „úspornějším“ systémem axiomů — jako libovolnou reálnou funkci splňující pro každé $x, y, z \in P$ dvojici podmínek:

(M1)* $\rho(x, y) = 0$ právě když $x = y$;
(M2)* $\rho(y, x) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Ukažme, že tato definice je opravdu ekvivalentní Definici 1.1. Z platnosti podmínek (M1)–(M3) triviálně plyne platnost podmínek (M1)*, (M2)*. Nechť platí (M1)* a (M2)*. Položíme-li v (M2)* $x = z$, využitím (M1)* dostáváme $0 = \rho(x, x) \leq 2\rho(y, x)$, tedy ρ je nezáporná funkce. Položíme-li v (M2)* $y = z$, dostáváme $\rho(x, y) \leq \rho(y, x)$ pro každé $x, y \in P$. Protože x, y jsou libovolná, můžeme je zaměnit, tedy zároveň $\rho(y, x) \leq \rho(x, y)$, odtud plyne platnost (M2). Konečně, protože platí (M2), plyne z (M2)* platnost trojúhelníkové nerovnosti.

Přestože definice pomocí axiomů (M1)*, (M2)* je úspornější než pomocí axiomů z Definice 1.1, v tomto textu (podobně jako v jiných učebnicích zabývajících se metrickými prostory) budeme používat výhradně axiomatiku z Definice 1.1, především proto, že je názornější a více vyniká analogie metriky na obecném metrickém prostoru se vzdáleností v euklidovském prostoru.

Cvičení 1.4.

i) Určete vzdálenost bodů $A = [0, 1]$ a $B = [1, 2]$ v součtové, euklidovské a maximální metrice.

ii) Načrtněte v rovině „jednotkové kružnice“

$$\mathscr{K}_i = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \rho_i([x, y], [0, 0]) = 1\},$$

kde $i = 1, 2, \infty$.

iii) Určete vzdálenost následujících funkcí v metrice ρ_c a ρ_I:

a) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$;
b) $f(x) = x$, $g(x) = \ln x$, $x \in [1, \mathrm{e}]$.

iv) Nechť $P = \mathbb{R}$. Ověřte, že následující funkce $P \times P \to \mathbb{R}$ jsou metriky:

a) $\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$;

b) $\rho(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$;

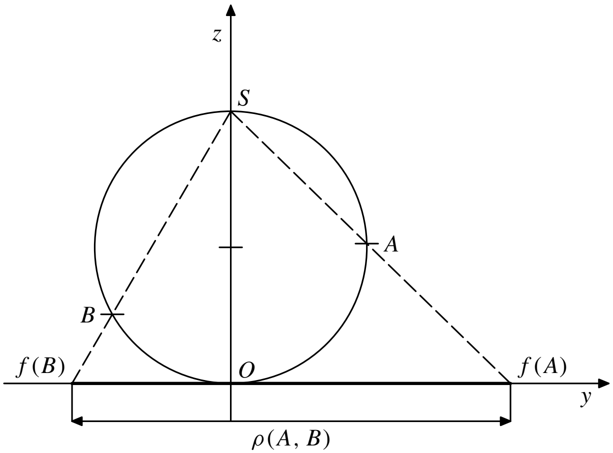
c) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.

v) *Metrika na kouli.* Nechť $P = S^2$ je jednotková kulová plocha v $\mathbb{R}^3$. Hlavní kružnicí kulové plochy S^2 rozumíme libovolnou kružnici, která vznikne jako průsečík kulové plochy a roviny jdoucí středem koule. Je-li $A, B \in S^2$, definujme $\rho(A, B) =$ „délka kratšího z oblouků hlavní kružnice určené body A, B“. Dokažte, že takto definovaná funkce je metrika, a odvoďte explicitní vzorec pro $\rho(A, B)$, je-li $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$.

vi) *Stereografická projekce.* Nechť $P = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \right.$ $\left. = \frac{1}{4}, \; z \neq 1\right\}$ (kulová plocha bez severního pólu). Definujme $f : P \to \mathbb{R}^2$ takto: Je-li $A \in P$, je $f(A) \in \mathbb{R}^2$ průsečík přímky spojující bod A a bod $[0, 0, 1]$ s podstavnou rovinou $z = 0$ (toto zobrazení se nazývá *stereografická projekce*). Nyní definujme pro $A, B \in P$

$$\rho(A, B) = \rho_2(f(A), f(B)),$$

kde ρ_2 je euklidovská metrika v rovině $z = 0$, viz obr. 3. Dokažte, že takto definovaná funkce je metrika, a odvoďte explicitní vzorec pro $\rho(A, B)$.



Obrázek 3: Stereografická projekce v rovině $x = 0$

vii) *Pampeliškový prostor.* Nechť $P = \mathbb{R}^2$ a pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2] \in P$ definujme

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} & \text{leží-li } A, B \text{ na stejné polopřímce} \\ & \text{jdoucí počátkem,} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} & \text{v opačném případě.} \end{cases}$$

a) Dokažte, že ρ je metrika. (Tato metrika nás bude zajímat ve městě, kde ulice vycházejí paprskovitě z jednoho místa a nejsou navzájem pospojovány.)

b) Určete v tomto prostoru „kružnice“

$$\mathscr{K}([a, b]; r) = \{[x, y] \in R^2 : \rho([x, y], [a, b]) = r\}.$$

Proveďte diskusi vzhledem k a, b, r.

viii) *Prostor l_p.* Nechť $p \in [1, \infty)$ a l_p je množina reálných posloupností $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro něž nekonečná řada $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ konverguje.[1] Pro $x, y \in l_p$ definujme

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}.$$

a) Dokažte, že takto definovaná funkce je metrika na l_p.

---

[1] Tj. existuje konečná limita posloupnosti částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p$.

b) Určete vzdálenost posloupnosti $\{x_n\} = \{2^{-n}\}$ od nulové posloupnosti v prostorech l_∞ a l_p.

ix) *p-adická metrika na množině celých čísel.* Nechť n, m jsou celá čísla a nechť p je předem zvolené prvočíslo. Definujme

$$\rho(n, m) = p^{-r},$$

kde p^r je nejvyšší mocnina čísla p, kterou je dělitelné číslo $|n - m|$, přičemž je-li $n = m$, definujeme $\rho(n, m) = 0$. Takto definovaná metrika se nazývá *p-adická* a má mnoho aplikací v teorii čísel.[1]

a) Určete vzdálenost čísel 11 a 5, 16 a 6, 60 a 10 v 5-adické metrice.

b) Určete všechna $n \in \mathbb{Z}$, která jsou v 7-adické metrice vzdálena od čísla $n_0 = 10$ o méně než $1/50$.

x) Na kartézském čtverci tříprvkové množiny $P = \{a, b, c\}$ definujte nezáporné reálné funkce d_1, d_2, d_3 tak, aby byly vždy splněny pouze dvě z podmínek (M1)–(M3) a třetí nikoliv.

[1] Další informace o p-adické metrice a p-adických číslech lze nalézt např. v knize Z. I. Borevič, I. R. Šafarevič: Teorija čisel, Nauka, Moskva 1985.

Definice 1.5. Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq P$. Definujme na množině A metriku σ takto:

$$\sigma(x, y) = \rho(x, y) \quad \text{pro každé } x, y \in A.$$

Řekneme, že metrický prostor (A, σ) je *vnořen* do prostoru (P, ρ) a metrika σ je *indukována* metrikou ρ.

Příklady 1.6.

i) Uvažujeme-li $\mathbb{R}$ jako podmnožinu $\mathbb{R}^2$ (tj. reálná čísla ztotožníme s dvojicemi reálných čísel tvaru $[a, 0]$), pak každá z metrik ρ_i, $i = 1, 2, \infty$, na $\mathbb{R}^2$ indukuje euklidovskou metriku na $\mathbb{R}$.

ii) Nechť $B(I)$ značí množinu reálných funkcí, které jsou ohraničené na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pro funkce $f, g \in B(I)$ definujeme

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|.$$

Takto definovaná funkce je metrikou (ověřte!), která na $C[a, b]$, kde $[a, b] \subseteq I$, indukuje metriku stejnoměrné konvergence ρ_c z Příkladu 1.2 iv). K důkazu této skutečnosti je třeba si uvědomit, že podle první Weierstrassovy věty je $C[a, b] \subseteq B[a, b]$ a podle druhé Weierstrassovy věty platí pro spojité funkce f, g

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

iii) Metrika z prostoru $\mathbb{E}^3$ indukuje na jednotkové kulové ploše S^2 metriku, která je různá od metriky ze Cvičení 1.4 v). Indukovaná metrika z $\mathbb{E}^3$ odpovídá „prokopání nejkratšího tunelu“ mezi body na kulové ploše.

I.2. Vzdálenost množin

Definice 1.7. Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Pro $\emptyset \neq A, B \subseteq P$ definujeme

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y), x \in A, y \in B\}$$
$$d(A) = \sup\{\rho(x, y), x, y \in A\}.$$

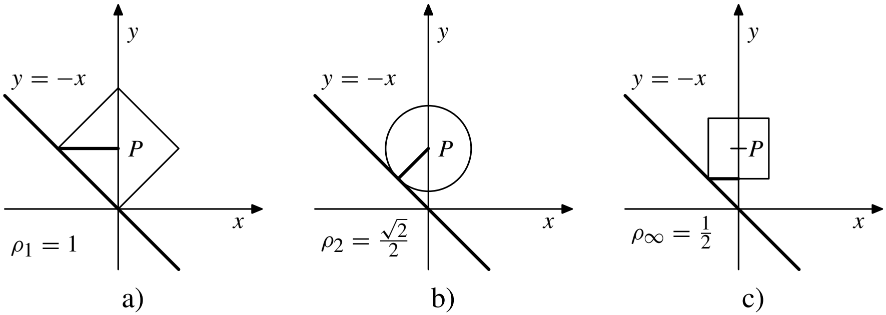
Jestliže množina $\{\rho(x, y), x, y \in A\}$ není shora ohraničená, klademe $d(A) = \infty$. Číslo $\rho(A, B)$ se nazývá *vzdálenost množin* A, B, $d(A)$ se nazývá *průměr* množiny A. Je-li $b \in P$, vzdálenost bodu b od množiny A definujeme vztahem

$$\rho(b, A) = \rho(\{b\}, A).$$

Všimněme si, že v metrickém prostoru $\mathbb{E}^2$ (což je prostor $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$) je tato definice vzdálenosti bodu od množiny shodná s definicí vzdálenosti bodu od přímky, kružnice apod. Je-li A kruh v rovině, je $d(A)$ jeho průměr.

Poznamenejme, že je třeba nezaměňovat vzdálenost funkcí f, g v prostoru $(C[a, b], \rho_c)$ a vzdálenost množin $A = \{[x, f(x)] : x \in [a, b]\}$ a $B = \{[x, g(x)] : x \in [a, b]\}$ v $\mathbb{E}^2$. Například pro funkce f, g z obr. 2 a) je tato vzdálenost množin A, B rovna nule.

Definice 1.8. Množina $A \subseteq P$ se nazývá *omezená* nebo také *ohraničená*, jestliže $d(A) < \infty$.



Obrázek 4: Vzdálenost bodu od přímky v metrikách ρ_1, ρ_2, ρ_∞

Příklady 1.9.

i) Určete vzdálenost bodu $P = [0, 1]$ od přímky $y = -x$ v součtové, euklidovské a maximální metrice.

Řešení. Uvědomíme-li si, jak vypadají množiny bodů mající od bodu P stejnou vzdálenost, můžeme úlohu řešit v grafickém znázornění. ▲

ii) Určete vzdálenost přímky $y = c$, $c \leq 0$, od paraboly $y = x^2 - 2x + 1$ v metrikách ρ_1, ρ_2, ρ_∞.

Řešení. Z polohy paraboly vidíme, že vzdálenost přímky $y = c$ od této paraboly je ve všech třech metrikách rovna $|c|$. (Porovnejte tento výsledek s výsledkem Cvičení 1.4 ii) a všimněte si, že každý z bodů $[x, c]$, $x \in [1+c, 1-c]$ má v metrice ρ_∞ od paraboly vzdálenost rovnu c.) ▲

iii) Nechť $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : y \geq \sqrt{|x|^3}\}$. Určete euklidovskou vzdálenost bodu $A = \left[\frac{1}{2}, 0\right]$ od množiny M.

Řešení. Je-li $X = [x, y]$, pak $\rho_2(A, X) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}$. Hledáme-li bod $N \in M$, pro který $\rho(A, M) = \rho(A, N)$, je zřejmé, že stačí omezit se na body ležící na křivce $y = \sqrt{|x|^3}$. Budeme tedy hledat minimum funkce $f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + |x|^3}$. Platí:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)+3x^2}{2\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+|x|^3}} & \text{pro } x \geq 0, \\[2ex] \dfrac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)-3x^2}{2\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)+|x|^3}} & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Rovnice $f'(x) = 0$ má jediný kořen $x_0 = 1/3$ (ověřte!). Protože $f'(x)$ existuje na celém $\mathbb{R}$, je $x_0 = 1/3$ jediným lokálním extrémem, a vzhledem k tomu, že $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$, je zde (absolutní) minimum (nemusíme tedy počítat f''). Dosazením dostáváme $f(1/3) = \rho_2(A, M) = \sqrt{7/108}$. ▲

iv) Nechť $M = \{(x, y), y + bx \leq 0\}$, kde $b \geq 0$ je reálný parametr. Určete vzdálenost bodu $A = [3, 2]$ od množiny M v součtové metrice ρ_1.

Řešení. Na rozdíl od analytického řešení předchozího příkladu tento příklad vyřešíme geometrickou úvahou. Množina křivek $\rho_1(M, A) = r$, $r \geq 0$ tvoří systém „soustředných" čtverců, které jsou dány rovnicemi $|x - 3| + |y - 2| = r$. Tyto čtverce mají středy v bodě A, délku úhlopříčky $2r$ a jejich strany svírají se souřadnými osami úhly $\pm\pi/4$. Označme tyto čtverce K_r. Pokud r je takové, že $K_r \cap M = \emptyset$, je $\rho(A, M) > r$. Naopak je-li $K_r \cap M \neq = \emptyset$, je $\rho(A, M) \leq r$. Tedy $\rho(A, M) = \min\{r \geq 0, K_r \cap M \neq \emptyset\}$. Je-li $b \in [0, 1)$, dotkne se některý z čtverců K_r přímky $y = -bx$ poprvé svým dolním vrcholem, je-li $b \in (1, \infty)$, první dotyk nastane levým vrcholem. Je-li $b = 1$, dotkne se čtverec přímky $y = -x$ celou svou stranou (nakreslete si obrázek). V prvním případě je tedy dotyk v bodě $[3, -3b]$, tj. $\rho(A, M) = 2 + + 3b$, v druhém případě je dotyk v bodě $[-2/b, 2]$, tj. $\rho(A, M) = 3 + 2/b$. Je-li $b = 1$, je $\rho(A, M) = 3 + 2 = 5$. ▲

v) Nechť $A = \{f(x) = x^n, x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}\} \subseteq C[0, 1]$. Určete $d(A)$ v metrice ρ_c.

Řešení. Protože $0 \leq f(x) \leq 1$ pro každé $f \in A$, platí $d(A) \leq 1$ (načrtněte si grafy funkcí x^n). Pro $n \geq 2$ spočtěme $\rho_c(x, x^n) = \max\limits_{x\in[0,1]} |x - x^n|$. Protože $x - x^n \geq 0$ a v krajních bodech $x = 0$, $x = 1$ je tato funkce rovna 0, spočtěme její funkční hodnoty ve stacionárních bodech: $(x - x^n)' = 1 - nx^{n-1} = 0$, odtud $x = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. Tedy $\rho(x, x^n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 0$, dostáváme $d(A) \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \rho_c(x, x^n) = 1$, tedy $d(A) = 1$. ▲

Cvičení 1.10.

i) Určete vzdálenost bodu $A = [6, 6]$ a bodu $B = [3, 6]$ od kružnice $x^2 + y^2 = = 25$ v součtové metrice ρ_1.

ii) Pro množinu A z Příkladu 1.9 v) určete $d(A)$ v metrice ρ_I.

iii) Nechť $P = S^2$ je jednotková kulová plocha v $\mathbb{R}^3$ s obvyklou metrikou na zeměkouli (tj. s metrikou ze Cvičení 1.4 v)), A je severní polokoule včetně rovníku. Určete vzdálenost bodu $X \in P$ ležícího na jižní polokouli od množiny A.

I.3. Izometrické zobrazení

Jednoduchým příkladem zobrazení, se kterým se setkáváme ve středoškolské matematice, je zobrazení mezi euklidovskými prostory zachovávající vzdálenost bodů. Uveďme jeho definici pro libovolné metrické prostory.

Definice 1.11. Nechť (P_1, ρ_1), (P_2, ρ_2) jsou metrické prostory. Zobrazení $f : P_1 \to P_2$ se nazývá *izometrické*, jestliže pro každé $x, y \in P_1$

$$\rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y).$$

Poznamenejme, že izometrické zobrazení je injektivní. Je-li surjektivní, existuje k němu inverzní zobrazení definované na P_2, které je rovněž izometrické. Proto pomocí izometrických zobrazení lze objekty zkonstruované v jedné metrice přenášet do druhé metriky.

Příklady 1.12.

i) Shodná zobrazení $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ (posunutí, osová souměrnost, středová souměrnost, otočení), která známe ze středoškolské geometrie, jsou izometrická zobrazení z $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$.

ii) Nechť P je množina všech 2×2 matic majících nuly na hlavní diagonále. Pro

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

definujeme

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Pak (P, ρ) je metrický prostor (dokažte si!). Je-li $\varphi \in \mathbb{R}$ a definujeme-li zobrazení $T_\varphi \colon P \to \mathbb{E}^2$ takto:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \to [a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi, -a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi],$$

pak T_φ je izometrické zobrazení. Tato skutečnost plyne z výpočtu

$$\begin{aligned} \rho_2(T_\varphi(A), T_\varphi(B)) &= [(a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi - b_1 \cos\varphi - b_2 \sin\varphi)^2 + \\ &\quad + (a_2 \cos\varphi - a_1 \sin\varphi + b_1 \sin\varphi - b_2 \cos\varphi)^2]^{\frac{1}{2}} = \\ &= [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]^{\frac{1}{2}} = \rho(A, B). \end{aligned}$$

Cvičení 1.13.

i) Nechť $P = C[-1, 1]$ a nechť $F \colon P \to P$ je pro $f \in C[-1, 1]$ definováno předpisem $F(f(x)) = f(-x)$. Dokažte, že F je izometrické zobrazení P do sebe jak v metrice ρ_c, tak i v metrice ρ_I.

ii) Nechť zobrazení $F \colon l_2 \to l_2$ je definováno pro $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ předpisem $F(x) = \{0, x_1, x_2, \dots\}$. Rozhodněte, zda F je izometrické zobrazení l_2 do sebe.

iii) Určete konstantu k tak, aby zobrazení F definované předpisem $F(f(x)) = = kf(x^3)$ bylo izometrické zobrazení prostoru $(C[-1, 1], \rho_I)$ na prostor $C[-1, 1]$ s metrikou $\sigma(f, g) = \int_{-1}^{1} x^2 |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x$ (dokažte, že je to opravdu metrika).

Kapitola II

KONVERGENCE, OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY

Z diferenciálního počtu známe pojem konvergentní posloupnost. Obdobně můžeme tento pojem definovat v libovolném metrickém prostoru. Zavedení tohoto pojmu umožňuje popsat řadu vlastností metrických prostorů. V této kapitole se zaměříme na studium otevřených a uzavřených množin, které jsou zobecněním otevřených a uzavřených intervalů v $\mathbb{E}^1$ (odst. II.2 a II.3).

II.1. Konvergentní posloupnost

Definice 2.1. Nechť $\{x_n\}_1^\infty$ je posloupnost bodů v metrickém prostoru (P, ρ).[1] Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_1^\infty$ *konverguje* k bodu $x_0 \in P$ (je konvergentní, má limitu x_0), a píšeme $x_n \to x_0$, jestliže

$$\rho(x_n, x_0) \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty,$$

tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Je-li třeba zdůraznit, v jaké metrice posloupnost konverguje, píšeme $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$.
Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_1^\infty$ je *cauchyovská*, jestliže

$$\rho(x_m, x_n) \to 0 \quad \text{pro } \min\{m, n\} \to \infty,$$

tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n > n_0$ je $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

V případě metrického prostoru $\mathbb{E}^1$ jsou tyto definice totožné s definicí konvergentní a cauchyovské posloupnosti z diferenciálního počtu.

Úplně stejně jako v diferenciálním počtu lze dokázat následující tvrzení (důkaz proveďte jako cvičení).

[1] Tj. zobrazení z $\mathbb{N}$ do P.

Věta 2.2. *Platí následující tvrzení:*

a) *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

b) *Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.*

c) *Jestliže $x_n \to x_0$, pak každá vybraná podposloupnost*[1] *z posloupnosti $\{x_n\}$ konverguje rovněž k x_0.*

Příklady 2.3.

i) Nechť $(P, \rho) = \mathbb{E}^2$. Dokažte, že $[a_n, b_n] \to [a, b]$, právě když $a_n \to a$, $b_n \to b$.

Řešení. $[a_n, b_n] \to [a, b]$, právě když $\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \to 0$, tj. právě když $(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 \to 0$, což nastane, právě když $a_n \to a$, $b_n \to b$ v $\mathbb{E}^1$. ▲

ii) Charakterizujte všechny konvergentní posloupnosti v diskrétním metrickém prostoru.

Řešení. Podle definice je posloupnost bodů $\{x_n\}_1^\infty$ konvergentní a konverguje k x_0, právě když $\rho_d(x_n, x_0) \to 0$. Protože $\{\rho_d(x_n, x_0)\}_1^\infty$ je číselná posloupnost, ve které se mohou vyskytovat pouze čísla 0 nebo 1, tato posloupnost má limitu 0, právě když se v ní od jistého indexu opakují pouze nuly, tj. od jistého indexu n je $x_n = x_0$. Posloupnosti mající tuto vlastnost se nazývají *skorostacionární.* ▲

[1] Je definovaná stejně jako podposloupnost posloupnosti reálných čísel.

iii) V teorii funkcionálních posloupností je zaveden pojem *stejnoměrné konvergence* funkcionálních posloupností. Podle této definice posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje na intervalu $[a, b]$ stejnoměrně k funkci f, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in [a, b]$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Všimněme si, že posloupnost spojitých funkcí, tj. posloupnost bodů prostoru $C[a, b]$, konverguje k funkci f v metrice ρ_c (viz Příklad 1.2 iv)), právě když tato posloupnost konverguje k f stejnoměrně. Z tohoto důvodu jsme metriku ρ_c nazvali *metrikou stejnoměrné konvergence*.

Cvičení 2.4.

i) Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v tomto prostoru a $y \in P$ je libovolné. Pak posloupnosti reálných čísel $\{\rho(x_n, x_{n+1})\}$ a $\{\rho(x_n, y)\}$ jsou konvergentní. Dokažte.

ii) Charakterizujte všechny konvergentní posloupnosti v Baireově prostoru (viz Příklad 1.2 vii)).

Definice 2.5. Nechť ρ_1, ρ_2 jsou metriky na P. Řekneme, že ρ_1, ρ_2 jsou *ekvivalentní*, jestliže pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}_1^\infty$ platí

$$x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0, \quad \text{právě když} \quad x_n \xrightarrow{\rho_2} x_0.$$

Příklady 2.6.

i) Dokažte, že metriky $\rho(x, y) = |x - y|$, $\tilde{\rho}(x, y) = \log(1 + |x - y|)$ jsou ekvivalentní na $\mathbb{R}$.

Řešení. Posloupnost reálných čísel konverguje k x_0 v metrice ρ, právě když $|x_n - x_0| \to 0$, což nastane, právě když $\log(1 + |x_n - x_0|) \to 0$, tj. $x_n \to x_0$ v metrice $\tilde{\rho}$. ▲

ii) Rozhodněte, zda metriky ρ_c a ρ_I na prostoru spojitých funkcí jsou ekvivalentní (viz Příklad 1.2 iv)).

Řešení. Metriky nejsou ekvivalentní. Nechť c je střed intervalu $[a, b]$ a definujme posloupnost spojitých funkcí takto:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in \left[a, c - \frac{1}{n}\right] \cup \left[c + \frac{1}{n}, b\right], \\ n\left(x - c + \frac{1}{n}\right), & \text{pro } x \in \left[c - \frac{1}{n}, c\right], \\ n\left(c + \frac{1}{n} - x\right), & \text{pro } x \in \left[c, c + \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

V integrální metrice tato funkce konverguje k funkci $f(x) \equiv 0$.[1] Avšak v metrice stejnoměrné konvergence ρ_c tato posloupnost nemá v $C[a, b]$ limitu, neboť pro číselnou posloupnost $\{f_n(x)\}$ platí

$$\lim f_n(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = c, \\ 0 & \text{pro } x \neq c, \end{cases}$$

a $g(x)$ není spojitá funkce. Pro funkci $f(x) \equiv 0$, což je pak jediný „kandidát“ na limitu této posloupnosti v prostoru $C[a, b]$, platí (sami si ověřte) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 1$. ▲

[1]Neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = 2 \lim\limits_{n\to\infty} \int_{c-\frac{1}{n}}^{c} n\left(x - c + \frac{1}{n}\right) \mathrm{d}x = 0.$

II.2. Uzavřené množiny

Definice 2.7. Nechť $A \subseteq P$. Množina $\overline{A} = \{x \in P : \rho(x, A) = 0\}$ se nazývá *uzávěr* množiny A. Množina A se nazývá *uzavřená*, pokud $A = \overline{A}$.

Příklady 2.8.

i) Nechť $(P, \rho) = \mathbb{E}^1$, $A_1 = [a, b)$, $A_2 = (a, b]$, $A_3 = (a, b)$, $A_4 = [a, b]$. Pak ve všech případech $\overline{A}_i = [a, b]$, $i = 1, \dots, 4$.

ii) Nechť $(P, \rho) = \mathbb{E}^2$, $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Pak $\overline{A} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

iii) $P = \mathbb{E}^1$, $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ (racionální čísla z intervalu $[0, 1]$). Pak $\overline{A} = [0, 1]$. Vskutku, nechť $x \in [0, 1]$ je libovolné iracionální číslo. Kdyby $x \notin \overline{A}$, tj. $\rho(x, A) =: \varepsilon > 0$, pak interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ neobsahuje žádné racionální číslo, což odporuje vlastnostem množiny racionálních čísel.

Věta 2.9. *Nechť $A, B \subseteq P$. Platí:*

(U1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(U2) $\overline{P} = P$,

(U3) $A \subseteq \overline{A}$,

(U4) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$,

(U5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(U6) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Důkaz.

(U1): Pokud by pro nějaké $x \in P$ platilo $x \in \overline{\emptyset}$, tj. $\rho(x, \emptyset) = \inf_{y \in \emptyset} \rho(x, y) = 0$, dostáváme spor, neboť (definitoricky) infimum prázdné množiny je ∞ (podobně $\sup \emptyset = -\infty$); tato konvence je přirozená vzhledem k faktu, že pro $M \subseteq N \subseteq \mathbb{R}$ je $\sup M \leq \sup N$ a $\inf M \geq \inf N$.

(U2): Plyne z inkluze $P \subseteq \overline{P}$.

(U3): Nechť $a \in A$. Podle Definice 1.7 platí $\rho(a, A) = \inf_{x \in A} \rho(x, a) = 0$, a tedy $a \in \overline{A}$.

(U4): Nechť $x \in \overline{A}$, tj. $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a) = 0$. Jsou-li X, Y číselné množiny a $X \subseteq Y$, pak $\inf X \geq \inf Y$. Protože $\{\rho(x, a), a \in A\} \subseteq \{\rho(x, b), b \in B\}$ (neboť $A \subseteq B$), je $0 = \inf \rho(x, a) \geq \inf \rho(x, b) \geq 0$, (neboť $\rho(x, b) \geq 0$ pro každé $b \in B$). Odtud $\inf_{b \in B} \rho(x, b) = 0$, a tedy $x \in \overline{B}$.

(U5): Dokážeme dvojici inkluzí $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B}$.

$\subseteq$: Platí $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$, odtud podle (U4) $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$, $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Z toho plyne $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

$\supseteq$: Nechť $x \in \overline{A \cup B}$ a současně $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. Pak $x \notin \overline{A}$ a $x \notin \overline{B}$, a tedy $\rho(x, A) > 0$, $\rho(x, B) > 0$, což znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\rho(x, a) \geq \varepsilon$, $\rho(x, b) \geq \varepsilon$ pro všechna $a \in A$, $b \in B$. Z druhé strany, $x \in \overline{A \cup B}$ implikuje $\rho(x, A \cup B) = 0$, odtud $\inf_{y \in A \cup B} \rho(x, y) = 0$, tedy existuje $y_0 \in A \cup B$ takové, že $\rho(x, y_0) < \varepsilon$, což je spor.

(U6): Důkaz necháváme čtenáři jako cvičení. $\square$

Následující věta charakterizuje uzavřené množiny pomocí konvergence a často se používá při důkazu uzavřenosti množin v konkrétních metrických prostorech.

Věta 2.10. *Nechť $A \subseteq P$. Množina A je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost prvků $x_n \in A$, $x_n \to x_0$ platí $x_0 \in A$.*

Důkaz. $\Rightarrow$: Nechť A je uzavřená, tj. podle definice $\overline{A} = A$, a nechť $x_n \in A$, $x_n \to x_0$ je libovolná, tj. $\rho(x_n, x_0) \to 0$. Kdyby $x_0 \notin \overline{A}$, pak $\rho(x_0, A) =: \varepsilon > 0$, tj. $\rho(x_0, a) \geq \varepsilon$ pro každé $a \in A$, a tedy i $\rho(x_n, x_0) \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což je ve sporu se skutečností, že $\rho(x_n, x_0) \to 0$.

$\Leftarrow$: Nechť pro každou posloupnost $x_n \in A$, $x_n \to x_0$ platí $x_0 \in A$. Protože $A \subseteq \overline{A}$, stačí ukázat, že $\overline{A} \subseteq A$. Nechť $x \in \overline{A}$ je libovolné, tj. $\rho(x, A) = 0$. Ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in A$ takové, že $\rho(x_n, x) < 1/n$. To znamená, že $\rho(x_n, x) \to 0$, tj.$x_n \to x$, a tedy podle předpokladu $x \in A$. $\square$

Příklad 2.11. Množina všech spojitých funkcí je uzavřená v prostoru $B[a, b]$ všech ohraničených funkcí v metrice stejnoměrné konvergence (viz Příklad 1.6 ii)). Dokažte.

Řešení. Nechť $f_n \in C[a, b]$ a $f_n \to f$ je libovolná. Podle Věty 2.10 musíme ukázat, že limitní funkce f je rovněž prvkem množiny $C[a, b]$. Nechť $x_0 \in [a, b]$ a $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost bodů intervalu $[a, b]$ konvergující k x_0. Ukážeme-li, že $|f(x_n) - f(x_0)| \to 0$, je funkce f spojitá v x_0, a protože $x_0 \in [a, b]$ je libovolné, je $f \in C[a, b]$. Platí

$$
\begin{aligned}
|f(x_n) - f(x_0)| &= |f(x_n) - f_n(x_n) + f_n(x_n) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\
&\leq |f(x_n) - f_n(x_n)| + |f_n(x_n) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.
\end{aligned}
$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Protože $f_n \to f$ v $C[a,b]$, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $|f(x_n) - f_n(x_n)| < \varepsilon/3$ i $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$. Každá z funkcí f_n je spojitá, proto k číslu $\varepsilon/3$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|f_n(x_n) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$. Celkem pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, tj. $f \in C[a,b]$, a tedy $C[a,b]$ je uzavřená v $B[a,b]$. ▲

Definice 2.12. Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Množina $A \subseteq P$ se nazývá *hustá* v prostoru P, jestliže $\overline{A} = P$.

Věta 2.13. *Množina $A \subseteq P$ je hustá v metrickém prostoru (P, ρ), právě když ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $x \in P$ existuje $a \in A$ takové, že $\rho(x, a) < \varepsilon$.*

Důkaz. $\Rightarrow$: Jelikož $\overline{A} = P$, je $\rho(x, A) = 0$ pro všechna $x \in P$. Tedy ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $a \in A$ tak, že $\rho(x, a) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$: Nechť ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $x \in P$ existuje $a \in A$ takové, že $\rho(x, a) < \varepsilon$. Je-li $\overline{A} \subset P$, existuje $x_0 \in P$, pro něž $\rho(x_0, A) > 0$. Pak ale pro $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(x_0, A)$ platí $\rho(x_0, a) > \varepsilon$ pro každé $a \in A$, což je spor. □

Předchozí věta ukazuje na důležitost hustých podmnožin v metrických prostorech. Například z hustoty množiny racionálních čísel v prostoru reálných čísel plyne, že každé reálné číslo lze s libovolnou přesností aproximovat racionálními čísly. Z hustoty množiny polynomů v prostoru spojitých funkcí (viz Příklad 3.9 ii)) plyne, že každou spojitou funkci můžeme na daném uzavřeném intervalu s libovolnou přesností aproximovat vhodným polynomem. Podobných příkladů můžeme v matematické disciplíně nazývané *teorie aproximace* nalézt celou řadu.

Příklad 2.14. Dokažte, že množina $A = \{\frac{m}{2^n} : n, m \in \mathbb{N}\}$ (tzv. množina *dyadických čísel*) je hustá v $\mathbb{E}^1$.

Řešení. Využijeme tvrzení Věty 2.13. Nechť $\varepsilon > 0$, $x > 0$ (je-li $x < 0$, stejnou konstrukci provedeme pro číslo $|x|$) jsou libovolná a nechť n je nejmenší přirozené číslo takové, že $m_0 = 2^n > x$. Číslo $m_1 = 2^{n-1}$ je dyadické, $x > m_1$ a platí $|m_1 - x| < 2^{n-1}$. Položme $m_2 = 2^{n-1} + 2^{n-2}$, tj. m_2 je středem intervalu $[m_1, 2^n]$. Pak číslo x leží v jednom z intervalů $[m_1, m_2]$, $[m_2, 2^n]$. Označme m_3 střed intervalu, v němž se x nachází. V této konstrukci pokračujeme tak, že vždy rozpůlíme ten interval, jehož krajními body jsou některá z čísel $m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}$ a v němž leží číslo x, střed tohoto intervalu označíme m_k. Ze způsobu provedení konstrukce je zřejmé, že platí $|m_k - x| < 2^{n-k}$. Protože $\lim\limits_{k\to\infty} 2^{n-k} = 0$, pro dostatečně velká k je $2^{n-k} < \varepsilon$ a m_k je hledaným dyadickým číslem, které se od x liší o méně než ε. ▲

II.3. Otevřené množiny, okolí bodu

Definice 2.15. Množina $A \subseteq P$ se nazývá *otevřená,* jestliže její komplement $P \setminus A$ je uzavřená množina.

Příklady 2.16.

i) Otevřený interval (a, b) je otevřená množina v prostoru $\mathbb{E}^1$, neboť její komplement, kterým je sjednocení intervalů $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$, je uzavřená množina.

ii) Množina $A = \{[x, y] \in \mathbb{E}^1 : x^2 + y^2 < 1\}$ je otevřená v $\mathbb{E}^2$, neboť její komplement v $\mathbb{E}^2$ je opět uzavřená množina.

iii) V diskrétním metrickém prostoru je každá množina zároveň otevřená i uzavřená. Protože v diskrétním metrickém prostoru konvergují pouze posloupnosti, které jsou skorostacionární, je podle Věty 2.10 každá množina v diskrétním metrickém prostoru uzavřená, tedy i její komplement je uzavřená množina, a podle předchozí definice je sama množina otevřená.

iv) V každém metrickém prostoru (P, ρ) jsou P a $\emptyset$ zároveň otevřené i uzavřené množiny, neboť každá z nich je uzavřená a jedna je komplementem druhé.

v) Nechť $A_1, \dots A_n$ jsou otevřené množiny v $\mathbb{E}^1$. Pak $A_1 \times \cdots \times A_n$ je otevřená množina v $\mathbb{E}^n$.

vi) Množina $A = \{f \in C[a, b] : |f(x)| < 1 \text{ pro } x \in [a, b]\}$ je otevřená množina v $(C[a, b], \rho_c)$.

Definice 2.17. Nechť $a \in P$ a $\varepsilon > 0$. Množinu $\mathscr{O}_\varepsilon(a) = \{x \in P : \rho(x, a) < \varepsilon\}$ nazýváme *(epsilonovým) okolím bodu* a. Není-li hodnota ε podstatná, pak index ε vynecháváme.

Na tomto místě poznamenejme, že někdy je v literatuře zabývající se metrickými prostory okolí bodu $a \in P$ definováno (v souladu s definicí v topologických prostorech, viz např. [2]) jako libovolná otevřená množina obsahující bod a. Obě definice jsou ekvivalentní, neboť okolí každého bodu je otevřená množina (viz Cvičení 2.22 xiv)), a naopak je-li A libovolná otevřená množina obsahující bod a, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathscr{O}_\varepsilon(a) \subset A$ (viz Věta 2.19 a)). Naše definice je však vhodnější z hlediska definice okolí bodu v $\mathbb{E}^n$ v diferenciálním počtu.

Definice 2.18. Nechť $A \subseteq P$, $a \in P$. Bod a se nazývá:

a) *Vnitřním bodem* množiny A, jestliže existuje okolí $\mathscr{O}(a)$ takové, že $\mathscr{O}(a) \subset A$. Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá *vnitřek* množiny A a značí se A^o.

b) *Hraničním bodem* množiny A, jestliže pro každé okolí $\mathscr{O}(a)$ platí současně $\mathscr{O}(a) \cap A \neq \emptyset$, $\mathscr{O}(a) \cap (P \setminus A) \neq \emptyset$. Množina všech hraničních bodů množiny A se nazývá *hranice* množiny A a značí se $h(A)$.

c) *Hromadným bodem* množiny A, jestliže každé okolí $\mathscr{O}(a)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A. Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá *derivace* množiny A a značí se A'.

d) *Izolovaným bodem* množiny A, jestliže existuje okolí $\mathscr{O}(a)$ takové, že $\mathscr{O}(a) \cap A = \{a\}$. Množina všech izolovaných bodů množiny A se nazývá *adherence* množiny A.

Uzávěr, vnitřek a hranice množiny hrají důležitou roli např. při zavedení Jordanovy míry v $\mathbb{E}^n$. Následující věta uvádí některé jejich vlastnosti.

Věta 2.19. *Nechť $A \subseteq P$. Platí:*

a) *A je otevřená, právě když $A = A^o$.*
b) $h(A) = \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$.
c) $h(A) = \overline{A} \setminus A^o$.
d) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$.

Důkaz.

a) $\Rightarrow$: Nechť $A \subseteq P$ je otevřená. Protože přímo z definice plyne $A^o \subseteq A$, stačí dokázat opačnou inkluzi. Nechť $a \in A$. Komplement $P \setminus A$ je uzavřená množina, tj. $P \setminus A = \overline{P \setminus A}$, a tedy $a \notin \overline{P \setminus A}$. To znamená, že $\varepsilon = \rho(a, P \setminus A) > 0$. Z toho plyne, že $\mathscr{O}_{\varepsilon/2}(a) \subset A$, tedy $a \in A^o$.

$\Leftarrow$: Nechť $A = A^o$. Musíme ukázat, že $P \setminus A = \overline{P \setminus A}$. Nechť $\{x_n\}_1^\infty$ je libovolná konvergentní posloupnost prvků z $P \setminus A$. Kdyby její limita x_0 neležela v $P \setminus A$, tj. ležela v A, a tedy v A^o, pak by existovalo $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathscr{O}_\varepsilon(x_0) \subset A$, tj. $\rho(x_n, x_0) \geq \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a to odporuje skutečnosti, že $\rho(x_n, x_0) \to 0$.

b) Opět dokážeme dvojici inkluzí $h(A) \subseteq \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$, $h(A) \supseteq \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$.

$\subseteq$: Nechť $x \in h(A)$, tj. každé okolí bodu x obsahuje jak body množiny A, tak i množiny $P \setminus A$. Tedy současně $\rho(x, A) = 0$ i $\rho(x, P \setminus A) = 0$ (kdyby $\rho(x, A) = \varepsilon > 0$, pak $\mathscr{O}_{\varepsilon/2}(x)$ neobsahuje žádný bod množiny A, což je spor; podobně vede ke sporu předpoklad $\rho(x, P \setminus A) > 0$). To znamená, že $x \in \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$.

$\supseteq$: Nechť $x \in \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$, tj. současně platí $x \in \overline{A}$ i $x \in \overline{P \setminus A}$. Odtud plyne, že každé okolí bodu x obsahuje jak body z množiny A, tak i body z množiny $P \setminus A$, a tedy $x \in h(A)$.

c) a d) Důkaz necháváme čtenáři jako cvičení. □

Věta 2.20. *Pro průniky a sjednocení otevřených a uzavřených množin platí následující tvrzení:*

a) *Průnik libovolného počtu uzavřených množin a sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.*

b) *Sjednocení libovolného počtu otevřených množin a průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.*

Důkaz.

a) Uzavřenost sjednocení konečného počtu uzavřených množin plyne indukcí z (U5). Nechť $A_i, i \in I$ je libovolný systém uzavřených množin a $i_0 \in I$ je libovolné. Pak $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}$, a tedy podle (U4) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \overline{A_{i_0}} = A_{i_0}$. Protože $i_0 \in I$ bylo libovolné, z poslední inkluze plyne $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$. Opačná inkluze plyne z (U3), tedy $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} A_i$, tj. $\bigcap_{i \in I} A_i$ je uzavřená množina.

b) Plyne z a) a de Morganových pravidel (viz [9]). □

Poznámka 2.21. Příklady množin $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $B_n = \left[\frac{-n}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right]$ ukazují, že průnik nekonečného počtu otevřených množin nemusí být otevřená množina a sjednocení nekonečného počtu uzavřených množin nemusí být uzavřená množina.

Cvičení 2.22.

i) Nechť $A = [0, 1] \cup (2, 3) \cup \{4\}$. Určete v $\mathbb{E}^1$ množiny $\overline{A}$, A^o, $h(A)$.

ii) Nechť $A = (0, 1) \cap I$, I značí množinu všech iracionálních čísel. Určete v $\mathbb{E}^1$ množiny $\overline{A}$, A^o, $h(A)$.

iii) Udejte příklad množiny $A \subset \mathbb{R}$ takové, že v $\mathbb{E}^1$ jsou množiny $\overline{A}$, A^o, A, $(\overline{A})^o$, $\overline{A^o}$ navzájem různé.

iv) Dokažte toto tvrzení: Jsou-li metriky ρ_1, ρ_2 na prostoru P ekvivalentní, pak je množina $A \subseteq P$ otevřená v prostoru (P, ρ_1), právě když je otevřená v prostoru (P, ρ_2).

v) Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq P$. Dokažte, že platí:

a) $h(A) = h(P \setminus A)$;
b) hranice množiny A je uzavřená množina;
c) $\overline{A} = A \cup A'$.

vi) Nechť P značí množinu polynomů stupně nejvýše n definovaných na intervalu $[-1, 1]$. Pro $R(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, $Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ definujme $\rho(R, Q) = \max\limits_{x \in [-1,1]} |R(x) - Q(x)|$.
Označíme-li $a = (a_0, \ldots, a_n)$, $b = (b_0, \ldots, b_n)$, lze definovat $\sigma_i(R, Q) = \rho_i(a, b)$, $i = 1, 2, \infty$ (metriky ρ_i jsou stejné jako v Příkladech 1.2 i) a 1.2 iii)). Rozhodněte, zda metriky ρ a σ_i jsou ekvivalentní.

*vii)** Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Označme $U(P)$ systém všech neprázdných ohraničených a uzavřených podmnožin prostoru (P, ρ). Na $U(P)$ definujme metriku σ takto: $\sigma(A, B) = \max\{\sup_{a\in A} \rho(a, B), \sup_{b\in B} \rho(b, A)\}$. Dokažte, že $(U(P), \sigma)$ je metrický prostor. Metrika σ se nazývá *Hausdorffova metrika* na $U(P)$ — viz [6, str. 370], [13, str. 24].

Poznamenejme, že někteří autoři definují Hausdorffovu metriku pro systém všech neprázdných kompaktních podmnožin prostoru (P, ρ) — viz [2, str. 117], [7, str. 97].

viii) Označme $U(\mathbb{R}^2)$ systém všech neprázdných uzavřených podmnožin prostoru $\mathbb{E}^2$. Nechť $A_n = \{X \in \mathbb{R}^2 : \rho_2(X, S_n) \leq r_n\}$, kde $S_n \in \mathbb{R}^2$ a $r_n > 0$. Najděte nutnou a dostatečnou podmínku, aby posloupnost $\{A_n\}$ byla konvergentní v $U(\mathbb{R}^2)$ s Hausdorffovou metrikou.

ix) Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost uzavřených množin v metrickém prostoru (P, ρ). Položme $B_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$, $C_m = \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$. Je zřejmé, že $\{B_m\}$ je „nerostoucí“ ($B_m \supseteq B_{m+1}$) a $\{C_m\}$ je „neklesající“ ($C_m \subseteq C_{m+1}$). Množiny $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$, $\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ se nazývají *limita superior*, resp. *limita inferior* posloupnosti $\{A_n\}$. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:
Posloupnost množin $\{A_n\}$ konverguje v Hausdorffově metrice, právě když $\liminf A_n = \limsup A_n$.

x) Nechť $P = C[a, b]$, $A = \{x(t) : \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t > 0\}$, $B = \{x(t) : \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t \geq \geq 0\}$. Rozhodněte, zda platí $\overline{A} = B$ v metrice ρ_c.

xi) Nechť A je množina všech konvergentních posloupností. Rozhodněte, zda A je uzavřená v prostoru l_∞ (viz Příklad 1.2 vi)). (Dokažte si, že A je opravdu podmnožina l_∞).

xii) Rozhodněte, zda množina A je hustá v $\mathbb{E}^1$:

a) $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} : m, n \in \mathbb{N}\}$;

b) $A = \left\{\frac{k}{l} : k, l \in \mathbb{Z},\ \text{pro něž existuje } m \in \mathbb{N} \text{ tak, že } k^2 + l^2 = m^2\right\}$ (tzv. množina *Pythagorejských* racionálních čísel).

xiii) Nechť l značí množinu posloupností reálných čísel a pro $x = \{x_1, x_2, \dots\}$, $y = \{y_1, y_2, \dots\}$ definujme

$$\overline{\rho}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

$$\tilde{\rho}(x, y) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{\frac{1}{n} + \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|\right\}.$$

Ověřte, že takto definované funkce jsou metriky na l, a rozhodněte, zda jsou ekvivalentní.

xiv) Je-li (P, ρ) metrický prostor, $a \in P$, $r > 0$ reálné číslo, klademe

$$\mathscr{B}[a; r] = \{x \in P : \rho(x, a) \le r\} \quad \text{(uzavřená koule se středem } a).$$

a) Dokažte, že $\mathscr{O}_r(a)$ je otevřená množina a $\mathscr{B}[a; r]$ je uzavřená množina v P.

b) Platí $\overline{\mathscr{O}_r(a)} = \mathscr{B}[a; r]$?

c) Určete $\mathscr{B}[[0,0,0];1]$ v $\mathbb{R}^3$ s maximální metrikou.

Na strom se nesmíš bát. Je tam ovoce.

Kapitola III

ÚPLNÉ A KOMPAKTNÍ PROSTORY

Z předcházející kapitoly víme, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Vzniká přirozeně otázka, kdy je cauchyovská posloupnost konvergentní. Prostory, v nichž toto platí, se nazývají *úplné* a mají některé důležité vlastnosti (odst. III.1).

V případě, že metrický prostor není úplný, můžeme jej zúplnit — sestrojit jeho *úplný obal*, což znamená vnořit ho do „většího“ metrického prostoru takovým způsobem, že metrika indukovaná z tohoto nadprostoru je totožná s původní metrikou (odst. III.2).

Také další nový pojem této kapitoly, pojem *kompaktní prostor* (odst. III.3), je založen na konvergentních posloupnostech a jeho důležitost je ukázána v odst. IV.3 a VI.4.

III.1. Úplný metrický prostor

Definice 3.1. Metrický prostor (P, ρ) se nazývá *úplný*, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost má limitu, tj. každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Příklady 3.2.

i) Prostor $\mathbb{E}^1$ je úplný. Toto tvrzení plyne z faktu, že každá cauchyovská posloupnost reálných čísel je konvergentní.

Důkaz lze najít v [16] a lze jej provést např. pomocí tzv. *principu vložených intervalů* (někdy nazývaný též *Cantorův-Dedekindův axiom*), který říká, že množina intervalů $I_n = [a_n, b_n]$, pro něž platí $I_n \supseteq I_{n+1}$ a $\lim(b_n - a_n) = 0$, má neprázdný průnik.

ii) Diskrétní metrický prostor je úplný, neboť cauchyovská i konvergentní posloupnost jsou skorostacionární posloupnosti.

iii) Množina racionálních čísel s metrikou indukovanou z $\mathbb{E}^1$ není úplný prostor, neboť např. $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel, jejíž limita je číslo e (základ přirozených logaritmů), což je číslo iracionální.

iv) Otevřený interval (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$ s euklidovskou metrikou není úplný metrický prostor, neboť např. $\left\{a + \frac{1}{n}\right\}$ je cauchyovská posloupnost, ale její limita a neleží v intervalu (a, b). Naopak uzavřený interval $[a, b]$ je úplný metrický prostor, což plyne z následující věty.

Věta 3.3. *Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor a $A \subseteq P$ je uzavřená množina. Pak A s metrikou, která je indukována metrikou ρ, je úplný metrický prostor.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je libovolná cauchyovská posloupnost prvků z A. Protože $A \subseteq P$ a P je úplný, posloupnost x_n je konvergentní v P, označme x_0 její limitu. Protože A je uzavřená, je podle Věty 2.10 $x_0 \in A$, tedy (A, ρ) je úplný. □

Příklady 3.4.

i) Interval $[a, b]$ s euklidovskou metrikou je úplný metrický prostor podle Věty 3.3.

ii) Nechť (P, ρ) je metrický prostor, metriky $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ na kartézském součinu $P \times P$ jsou definovány následujícím způsobem (ověřte, že to jsou opravdu metriky):

$$\begin{aligned}
\rho_1([x_1, x_2], [y_1, y_2]) &= \rho(x_1, y_1) + \rho(x_2, y_2),\\
\rho_2([x_1, x_2], [y_1, y_2]) &= \sqrt{(\rho(x_1, y_1))^2 + (\rho(x_2, y_2))^2},\\
\rho_\infty([x_1, x_2], [y_1, y_2]) &= \max\{\rho(x_1, y_1), \rho(x_2, y_2)\}.
\end{aligned}$$

Pak prostory $(P \times P, \rho_k)$, $k = 1, 2, \infty$ jsou úplné, právě když metrický prostor (P, ρ) je úplný. Dokažte.

Řešení. Tvrzení plyne z faktu, že posloupnost $\{[x_n, y_n]\} \subset P \times P$ je konvergentní, resp. cauchyovská v každé ze tří uvažovaných metrik, právě když jsou konvergentní, resp. cauchyovské posloupnosti x_n i y_n. ▲

iii) $\mathbb{E}^n$ je úplný metrický prostor. Toto tvrzení plyne indukcí z předcházejícího tvrzení a úplnosti $\mathbb{E}^1$.

Věta 3.5 (Zobecnění principu vložených intervalů). *Prostor* (P, ρ) *je úplný, právě když pro libovolnou posloupnost neprázdných uzavřených množin* $\{A_n\}$ *prostoru* (P, ρ) *takovou, že*

a) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq, \dots, \supseteq A_n \dots,$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n) = 0,$

platí $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$: Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor a $\{A_n\}$ je libovolná posloupnost uzavřených množin splňující a), b). Vyberme $x_n \in A_n$ libovolné. Pak $\{x_n\}$ je cauchyovská. Vskutku, nechť $\varepsilon > 0$, pak podle předpokladu b) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $d(A_n) < \varepsilon$, a protože pro každé $n, m \geq n_0$ je $A_n, A_m \subseteq A_{n_0}$, platí $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ pro každé $n, m \geq n_0$. Z úplnosti prostoru (P, ρ) plyne existence $x_0 \in P$ takového, že $x_n \to x_0$. Zbývá ukázat, že $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Je-li $x_0 \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_0 \notin A_{n_1}$, a tedy $x_0 \notin A_n$ pro $n \geq n_1$, neboť pro tato n je $A_n \subseteq A_{n_1}$ pro $n \geq n_1$. Protože A_n jsou uzavřené, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\rho(x_0, A_n) > \varepsilon$ pro $n \geq n_1$, a tedy i $\rho(x_0, x_n) > \varepsilon$ — spor.

$\Leftarrow$: Nechť $\{x_n\}$ je libovolná cauchyovská posloupnost prostoru (P, ρ). Sestrojme posloupnost uzavřených množin takto: K číslu $\varepsilon_1 = 1/2$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \geq n_1$ je $\rho(x_n, x_m) < 1/2$. Označme $A_1 = \mathscr{B}[x_{n_1}; 1]$

(uzavřená koule se středem x_{n_1} a poloměrem $r = 1$, viz Cvičení 2.22 xiv)). K číslu $\varepsilon_2 = 1/4$ existuje $n_2 > n_1$ tak, že pro všechna $n, m \geq n_2$ je $\rho(x_n, x_m) < 1/4$. Označme $A_2 = \mathscr{B}[x_{n_2}; 1/2]$. Platí $A_2 \subseteq A_1$, neboť je-li $x \in A_2$, je $\rho(x, x_{n_2}) < < 1/2$ a $\rho(x, x_{n_1}) \leq \rho(x, x_{n_2}) + \rho(x_{n_2}, x_{n_1}) \leq 1/2 + 1/2 = 1$. Obecně k číslu $\varepsilon = 1/2^k$ existuje $n_k > n_{k-1}$ tak, že pro $n, m \geq n_k$ platí $\rho(x_n, x_m) < 1/2^k$. Podobně jako v předchozích případech definujme $A_k = \mathscr{B}[x_{n_k}; 1/2^k]$. Výsledkem konstrukce je posloupnost uzavřených množin A_n s vlastnostmi a) a b). Podle předpokladu existuje $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Evidentně $\rho(x_n, x_0) \to 0$, tedy $\{x_n\}$ je konvergentní a x_0 je její limita. □

Příklady 3.6.

i) Metrický prostor $C[a, b]$ s metrikou stejnoměrné konvergence ρ_c je úplný.[1] Dokažte.

Řešení. Nechť $f_n \in C[a, b]$ tvoří cauchyovskou posloupnost, tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n, m \geq n_0$ platí $\max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Odtud plyne, že pro každé $x \in [a, b]$ je číselná posloupnost $\{f_n(x)\}$ cauchyovská, a tedy konvergentní. Označme $f(x)$ její limitu. K číslu $\varepsilon/2$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n, m \geq n_1$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$ pro každé $x \in [a, b]$. Limitním přechodem pro $m \to \infty$ v posledním vztahu dostáváme $\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, tedy $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně (tj. v metrice ρ_c) k f a podle Příkladu 2.11 je $f \in C[a, b]$. ▲

[1] V teorii funkcionálních posloupností se toto tvrzení nazývá *Cauchyovo-Bolzanovo kritérium stejnoměrné konvergence*, viz [5, str. 45].

ii) Metrický prostor $C[a, b]$ s integrální metrikou ρ_I (viz Příklad 1.2 v)) není úplný. Dokažte.

Řešení. Nechť c je střed intervalu $[a, b]$ a pro $n > \frac{2}{b-a}$ definujme

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, c], \\ n(x - c), & x \in \left[c, c + \frac{1}{n}\right], \\ 1, & x \in \left[c + \frac{1}{n}, b\right], \end{cases}$$

(nakreslete si obrázek). Takto definovaná posloupnost je cauchyovská, neboť $\rho_I(f_n, f_m) \to 0$ pro $\min\{n, m\} \to \infty$. Nechť $f(x) \in C[a, b]$ je případná limita $\{f_n(x)\}$ v prostoru $(C[a, b], \rho_I)$, tj. $\rho_I(f_n, f) = \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx \to 0$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pro $n > \max\left\{\frac{1}{\varepsilon}, \frac{2}{b-a}\right\}$ platí

$$\rho_I(f_n, f) \geq \int_a^{c-\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \, dx + \int_{c+\varepsilon}^b |f_n(x) - f(x)| \, dx =$$
$$= \int_a^{c-\varepsilon} |f(x)| \, dx + \int_{c+\varepsilon}^b |1 - f(x)| \, dx.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, musí platit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, c), \\ 1, & x \in (c, b], \end{cases}$$

což odporuje spojitosti funkce $f(x)$, tedy zkonstruovaná cauchyovská posloupnost nemá v $C[a, b]$ limitu. ▲

iii) Baireův metrický prostor (viz Příklad 1.2 vii)) je úplný. Dokažte.

Řešení. Nechť $x_n = \{x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots\}$ je cauchyovská posloupnost prvků Baireova prostoru. Nerovnost $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ znamená, že $x_k^n = x_k^m$, $k = 1, \dots, n_0$, kde n_0 je největší přirozené číslo menší než $\frac{1}{\varepsilon}$. Protože $\varepsilon > 0$ je libovolné, znamená to, že každá z posloupností $\{x_1^n\}, \{x_2^n\} \dots$ je skorostacionární, tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje limita $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^n =: x_k$. Označíme-li $x = \{x_1, x_2, \dots\}$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$, tedy posloupnost $\{x_n\}$ je konvergentní. ▲

Cvičení 3.7.

i) Nechť $P = \mathbb{R}$ a metrika ρ je na $\mathbb{R}$ definována takto:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } |x - y| \text{ iracionální,} \\ \frac{1}{2} & \text{je-li } |x - y| \text{ nenulové racionální,} \\ 0 & \text{je-li } x = y. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda je tento metrický prostor úplný.

ii) Rozhodněte, zda pampeliškový prostor (viz Cvičení 1.4 vii)) je úplný.

iii) Prostor l_2 (viz Cvičení 1.4 viii)) je úplný. Dokažte.

iv) Rozhodněte, zda prostor l_∞ (viz Příklad 1.2 vi)) je úplný.

*v)** Nechť $\alpha_n \in (0, 1]$. Pro každé $x = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $y = \{y_1, \dots, y_n, \dots,\} \in l_2$ definujme

$$\rho_\alpha(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_n - y_n)^2}. \tag{3.1}$$

Dokažte, že metrický prostor (l_2, ρ_α) je úplný, právě když $\inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n > 0$.

III.2. Úplný obal metrického prostoru

Definice 3.8. Buď (P, ρ) metrický prostor. Metrický prostor (Q, σ) se nazývá *úplný obal* metrického prostoru (P, ρ), jestliže platí:

1) (Q, σ) je úplný prostor;
2) (P, ρ) je vnořený do (Q, σ) (tj. $P \subseteq Q$, $\rho = \sigma|_{P^2}$);
3) množina P je hustá v (Q, σ).

Příklady 3.9.

i) Euklidovský prostor $\mathbb{E}^1$ je úplným obalem prostoru racionálních i iracionálních čísel (s metrikou indukovanou z prostoru $\mathbb{E}^1$).

ii) Prostor $(C[a, b], \rho_c)$ je úplným obalem prostoru všech polynomů definovaných na intervalu $[a, b]$ s metrikou indukovanou tímto prostorem. Platnost podmínky 2) je triviální a podmínka 1) plyne z Příkladu 3.6 i). Platnost podmínky 3) plyne z následujícího tvrzení, které bývá v literatuře označováno jako Weierstrassova věta a jehož důkaz je možno nalézt např. v [11].

Tvrzení. *Nechť $f(x) \in C[a, b]$ a $\varepsilon > 0$ jsou libovolné. Existuje polynom $R(x)$ takový, že*

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - R(x)| < \varepsilon.$$

Věta 3.10. *Ke každému metrickému prostoru (P, ρ) existuje jeho úplný obal. Tento obal je určen jednoznačně v následujícím smyslu: Jsou-li (Q_1, σ), $(Q_2, \tilde{\sigma})$ úplné obaly prostoru (P, ρ), pak existuje izometrické zobrazení $\phi\colon Q_1 \to Q_2$ takové, že $\phi|_P$ je identita na P.*

Exaktní důkaz tohoto tvrzení je poněkud komplikovaný a se všemi podrobnostmi je možno jej nalézt v [8]. Protože je však tento důkaz konstruktivní a poměrně důležitý, uvedeme zde alespoň jeho hlavní myšlenky.

Uvažujme všechny cauchyovské posloupnosti z prostoru (P, ρ) a na této množině definujme relaci $\sim$ (není obtížné ukázat, že tato relace je ekvivalence) následujícím způsobem:

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \text{ právě když } \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0.$$

Nyní uvažujme třídy rozkladu cauchyovských posloupností v (P, ρ) definované touto ekvivalencí a množinu těchto tříd označme Q. Nechť X, Y jsou dvě třídy ekvivalence z Q a $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ jsou nějací reprezentanti těchto tříd (lze ukázat, že na jejich výběru nezáleží). Definujme

$$\sigma(X, Y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Lze ukázat, že takto definovaná funkce na Q^2 je metrikou a že prostor (Q, σ) je úplný. Přiřadíme-li nyní každému prvku $x \in P$ třídu $X \in Q$ tvořenou všemi posloupnostmi konvergujícími k tomuto prvku, je tímto způsobem definováno izometrické zobrazení P na jistou podmnožinu v Q. Ztotožníme-li P s touto podmnožinou, dostáváme platnost podmínky 2). Z vlastností cauchyovských posloupností plyne i platnost podmínky 3). Takto definovaný metrický prostor (Q, σ) je tedy hledaným úplným obalem prostoru (P, ρ).

Poznámka 3.11. Předchozí věta říká, že $\mathbb{E}^1$ je zúplnění prostoru racionálních čísel s euklidovskou metrikou. Tuto větu však není možné přímo použít pro konstrukci reálných čísel, protože definice metrického prostoru předpokládá znalost množiny reálných čísel.

V literatuře lze najít různé konstrukce oboru reálných čísel. V [4, 16] je tato konstrukce pojata axiomaticky, v [9] je použita tzv. metoda Dedekindových řezů.

Poznamenejme, že ke konstrukci reálných čísel je rovněž možné použít myšlenku úplného obalu, aplikovanou na racionální čísla. Tímto způsobem postupoval Georg Cantor.

Cvičení 3.12.

i) Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor, $A \subset P$. Pak $(\overline{A}, \rho)$ je úplný obal metrického prostoru (A, ρ). Dokažte.

ii) Pro $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in l_2$ definujme

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(x_n - y_n)^2}\,.$$

(Takto definovaný metrický prostor není úplný, viz Příklad 3.7 v).) Rozhodněte, zda množina omezených posloupností s metrikou definovanou vztahem (3.1) s $\alpha_n = 2^{-n}$ je úplným obalem l_2 s touto metrikou.

III.3. Kompaktní prostory

Z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné je známo (druhá Weierstrassova věta), že spojitá funkce f definovaná na uzavřeném intervalu $[a, b]$ zde nabývá své nejmenší a největší hodnoty, tj. existují x_1, x_2 ležící v tomto intervalu taková, že

$$f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \qquad f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Nyní nechť (P, ρ) je metrický prostor $A \subseteq P$ a $f: A \to \mathbb{E}^1$. Chtěli bychom najít podmínky na množinu A a zobrazení f, aby platilo obdobné tvrzení, tj. aby existovala $a_1, a_2 \in A$ taková, že $f(a_1) = \sup_{x \in A} f(x)$, $f(a_2) = \inf_{x \in A} f(x)$. Projdeme-li si důkaz druhé Weierstrassovy věty, zjistíme, že kromě spojitosti funkce f je nejdůležitější skutečností fakt, že z každé posloupnosti bodů uzavřeného intervalu lze vybrat konvergentní podposloupnost (toto tvrzení je známo jako Bolzanova-Weierstrassova věta). Tímto je také motivována následující definice.

Definice 3.13. Metrický prostor (P, ρ) se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat konvergentní podposloupnost. Množina $A \subseteq P$ se nazývá *kompaktní*, jestliže A s metrikou indukovanou metrikou ρ je kompaktní prostor, tj. z každé posloupnosti bodů množiny A lze vybrat podposloupnost mající v A limitu.

Věta 3.14. *Nechť A je kompaktní množina v metrickém prostoru (P, ρ). Pak A je uzavřená a ohraničená.*

Důkaz. Předpokládejme, že A není uzavřená, tj. existuje $x \in \overline{A}$, které neleží v A. Protože $\rho(x, A) = 0$, existuje posloupnost $x_n \in A$ konvergující k x. Každá vybraná podposloupnost z konvergentní posloupnosti má tutéž limitu x (Věta 2.2), která však neleží v A, tedy z $\{x_n\}$ nelze vybrat podposloupnost mající v A limitu, což je spor.

Nyní předpokládejme, že A není ohraničená, tj. $d(A) = \sup\limits_{x,y \in A} \rho(x, y) = \infty$. Sestrojme posloupnost $x_n \in A$ takto. Bod $x_1 \in A$ vyberme libovolně a nechť $x_2 \in A$ je takové, že $\rho(x_1, x_2) \geq 1$ (takové x_2 existuje vzhledem k neohraničenosti A). Jsou-li již známy prvky $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$, bod $x_n \in A$ vyberme tak, že $\rho(x_n, x_k) \geq 1$, $k = 1, \dots, n-1$. (Takový bod lze vždy najít, neboť v opačném případě by byla množina A podmnožinou sjednocení uzavřených koulí se středy v x_k, $k = 1, \dots, n-1$ a poloměry $r = 1$, což odporuje její neohraničenosti). Z takto sestrojené posloupnosti evidentně nelze vybrat konvergentní podposloupnost, neboť pro $n \neq m$ je $\rho(x_n, x_m) \geq 1$. $\square$

Příklady 3.15.

i) Diskrétní metrický prostor je kompaktní, právě když P má pouze konečně mnoho prvků. Dokažte.

Řešení. Tvrzení plyne z faktu, že posloupnost bodů diskrétního metrického prostoru je konvergentní, právě když je skorostacionární. Má-li tedy každá posloupnost obsahovat konvergentní podposloupnost, nesmí se v této posloupnosti vyskytovat nekonečně mnoho navzájem různých prvků, a proto je P kompaktní, právě když má pouze konečně mnoho prvků. ▲

ii) Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $\tilde{P} = P^n = P \times \cdots \times P$. Pro $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ a $p \geq 1$ definujme

$$\rho_p(x, y) = \Big[\sum_{k=1}^{n} \rho^p(x_k, y_k)\Big]^{1/p}.$$

Takto definovaná funkce je metrika na $\tilde{P}$ (ověřte!) a množina $A \subseteq \tilde{P}$ je kompaktní v $\tilde{P}$, právě když „průměty“

$$A_k = \{a \in P : \text{ existují } a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n \in P \text{ taková, že } [a_1, \dots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \dots, a_n] \in A\},\ k = 1, \dots, n,$$

jsou kompaktní v P. Dokažte.

Řešení. $\Leftarrow$: Předpokládejme, že množiny $A_k, k = 1, \dots, n$ jsou kompaktní a $\{a_m = [a_1^m, \dots, a_n^m]\}$ nechť je libovolná posloupnost bodů z A. Protože A_1 je kompaktní, z $\{a_1^m\}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost. V $\{a_2^m\}$ uvažujme pouze členy s indexy konvergentní podposloupnosti z $\{a_1^m\}$. Protože A_2 je kompaktní, z této podposloupnosti lze vybrat v $\{a_2^m\}$ konvergentní podposloupnost a v $\{a_3^m\}$ uvažujme pouze členy s indexy této vybrané podposloupnosti. Z těchto členů lze opět vybrat konvergentní podposloupnost. Opakujeme-li tento postup až do indexu n, obdržíme konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{a_n^m\}$, přičemž podposloupnosti z $\{a_k^m\}$, $k = 1, \dots, n-1$ s indexy této podposloupnosti jsou konvergentní. Tím jsme sestrojili konvergentní podposloupnost z $\{a_m\}$.

$\Rightarrow$: Předpokládejme, že A je kompaktní, $k \in \{1, \dots, n\}$ je libovolné a $\{a_k^m\}$ je libovolná posloupnost bodů z A_k. Vyberme libovolné prvky $x_1 \in A_1, \dots, x_{k-1} \in A_{k-1}, x_{k+1} \in A_{k+1}, \dots x_n \in A_n$ a utvořme pomocí nich posloupnost $a_m = [x_1, \dots, x_{k-1}, a_k^m, x_{k+1}, \dots, x_n]$. Z této posloupnosti bodů množiny A lze vybrat konvergentní podposloupnost a je zřejmé, že členy $\{a_k^m\}$ s indexy této vybrané podposloupnosti tvoří konvergentní podposloupnost z $\{a_k^m\}$, tedy A_k je kompaktní. ▲

Ve Větě 3.14 jsme dokázali, že kompaktní množina v libovolném metrickém prostoru je uzavřená a ohraničená. Následující věta říká, že v euklidovských prostorech je tato podmínka pro kompaktnost dané množiny také dostatečná.

Věta 3.16. *Nechť A je podmnožina v $\mathbb{E}^n$. Množina A je kompaktní, právě když je uzavřená a ohraničená.*

Důkaz. Podle Příkladu 3.15 ii) stačí tvrzení dokázat pro $n = 1$. Dokažme, že je-li podmnožina A v $\mathbb{E}^1$ uzavřená a ohraničená, pak je kompaktní.

Nechť A je uzavřená a ohraničená. Pak každá posloupnost bodů z A je také ohraničená a podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné lze z této posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost. Protože A je uzavřená, leží její limita podle Věty 2.10 také v A, a tedy A je kompaktní. Opačná implikace plyne z Věty 3.14. □

Poznámky 3.17.

i) Předcházející tvrzení „uzavřená + ohraničená = kompaktní“ obecně neplatí. Například množina $A \subset l_2$ tvořená posloupnostmi $x_1 = \{1, 0, \dots, 0, \dots\}$, $x_2 = \{0, 1, 0, \dots, 0, \dots\}$, $x_3 = \{0, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots\} \dots$ je evidentně uzavřená a ohraničená v prostoru l_2, ale nelze z ní vybrat konvergentní podposloupnost.

ii) Další vlastnosti kompaktních množin v metrických prostorech lze nalézt v odstavcích IV.3 a V.2.

Cvičení 3.18.

i) Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq P$ je uzavřená, $B \subseteq P$ je kompaktní, $A \cap B = \emptyset$. Pak $\rho(A, B) > 0$. Dokažte.

ii) Dokažte tato tvrzení: Sjednocení konečného počtu kompaktních množin je kompaktní množina. Průnik libovolného počtu kompaktních množin je kompaktní množina.

iii) Rozhodněte, zda v pampeliškovém metrickém prostoru (Cvičení 1.4 vii)) platí tvrzení „uzavřená a ohraničená = kompaktní“.

iv) Nechť (P, ρ) je kompaktní metrický prostor, $A \subseteq P$ je uzavřená. Pak (A, ρ) je úplný metrický prostor. Dokažte.

v) Nechť P je množina regulárních $n \times n$ matic, pro $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in P$ definujme
$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2}.$$
Rozhodněte, zda množina ortogonálních matic (tj. matic, pro něž $A^T = A^{-1}$, kde ^{T} značí transpozici) je kompaktní v P.

vi) Nechť P je množina polynomů stupně nejvýše n s metrikou indukovanou z prostoru $(C[a, b], \rho_c)$. Rozhodněte, zda množina
$$A = \{R(x) \in P : \rho_c(R(x), 0) \leq 1\},$$
kde 0 značí nulový polynom, je kompaktní.

Kapitola IV

ZOBRAZENÍ METRICKÝCH PROSTORŮ

V této kapitole budeme věnovat hlavní pozornost *spojitosti* zobrazení mezi dvěma metrickými prostory (odst. IV.1). V odst. IV.2 budeme studovat tzv. *lipschitzovská* a *kontraktivní* zobrazení a v odst. IV.3 budou vyšetřovány vlastnosti spojitých zobrazení kompaktních prostorů.

IV.1. Spojitá zobrazení

Před uvedením definice spojitého zobrazení si připomeňme *spojitost reálné funkce* $f(x)$ (což je zobrazení z $\mathbb{E}^1$ do $\mathbb{E}^1$) *v bodě* x_0: Funkce f je spojitá v bodě x_0, jestliže $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

V souladu s Definicí 2.17 (okolí bodu) můžeme tuto definici formulovat také takto:

Funkce f je spojitá v bodě x_0, jestliže ke každému okolí V bodu $f(x_0)$ existuje okolí U bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U$ platí $f(x) \in V$.

Analogicky definujeme spojité zobrazení mezi libovolnými metrickými prostory.

Definice 4.1. Nechť (P, ρ), (Q, σ) jsou metrické prostory, F je zobrazení z P do Q. Řekneme, že toto zobrazení je *spojité v bodě* x_0, jestliže ke každému okolí V bodu $F(x_0)$ v Q existuje okolí U bodu x_0 v P takové, že $F(x) \in V$ pro každé $x \in U$. Řekneme, že F je spojité na P, je-li spojité v každém bodě P.

Následující věta je velmi důležitým nástrojem při vyšetřování spojitosti různých zobrazení mezi metrickými prostory a v literatuře se často objevuje jako definice spojit spojitého zobrazení.

Věta 4.2. *Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Zobrazení $F : P \to Q$ je spojité v bodě $x_0 \in P$, právě když pro každou posloupnost bodů v P, pro niž $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$, platí $F(x_n) \xrightarrow{\sigma} F(x_0)$.*

Důkaz. $\Rightarrow$: Nechť F je spojité v bodě x_0 a $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost konvergující k x_0. Potřebujeme dokázat, že $\sigma(F(x_n), F(x_0)) \to 0$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Podle definice spojitosti zobrazení F v bodě x_0 k ε-ovému okolí bodu $F(x_0)$ existuje δ-okolí bodu x_0 ($\delta > 0$) takové, že pro x z tohoto okolí platí $\sigma(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$. Protože $\rho(x_n, x_0) \to 0$, k číslu δ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $\rho(x_n, x_0) < \delta$, a tedy $\sigma(F(x_n), F(x_0)) < \varepsilon$. Celkem jsme k libovolnému $\varepsilon > 0$ našli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\sigma(F(x_n), F(x_0)) < \varepsilon$, tedy $F(x_n) \to F(x_0)$.

$\Leftarrow$: Nechť x_0 je libovolné a pro libovolnou posloupnost $x_n \to x_0$ platí $f(x_n) \to f(x_0)$. Předpokládejme sporem, že zobrazení f není spojité v bodě x_0, tj. existuje okolí V bodu $f(x_0)$ takové, že v každém okolí U bodu x_0 existuje x takové, že $f(x) \notin V$. Za okolí U bodu x_0 berme postupně množiny $U_n = \left\{x \in P : \rho(x, x_0) < \frac{1}{n}\right\}$, $n = 1, 2, \dots$ a označme x_n ten bod z U_n, pro nějž $f(x_n) \notin V$. Tímto způsobem jsme sestrojili posloupnost konvergující k x_0, pro niž $f(x_n)$ nekonverguje k $f(x_0)$ (neboť $f(x_n) \notin V$ pro každé $n \in N$), což je spor, a zobrazení f je spojité v bodě x_0. $\square$

Uvedenou větu využijeme v následujících příkladech.

Příklady 4.3.

i) Nechť F je zobrazení prostoru $(C[a, b], \rho_c)$ do $\mathbb{E}^1$ definované takto:

$$F(f) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

(tj. každé funkci spojité na intervalu $[a, b]$ je přiřazeno reálné číslo rovné funkční hodnotě funkce ve středu intervalu $[a, b]$). Rozhodněte, zda je toto zobrazení spojité.

Řešení. Nechť $f \in C[a,b]$ je libovolná funkce a $f_n \in C[a,b]$ je libovolná posloupnost konvergující k funkci f, tj. $\rho(f_n, f) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, jestliže $n \to \infty$. Z toho plyne, že i $\left|f_n\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \to 0$, tedy zobrazení F je spojité na $C[a,b]$. ▲

ii) Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $a \in P$, $A \subseteq P$. Dokažte, že zobrazení $f, g\colon P \to \mathbb{E}^1$ daná vztahy $f(x) = \rho(x,a)$, $g(x) = \rho(x,A)$ jsou spojitá.

Řešení. Nechť $x_n \to x_0$ je libovolná. Využitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme $|f(x_n) - f(x_0)| = |\rho(x_n,a) - \rho(x_0,a)| \le |\rho(x_n,x_0) + \rho(x_0,a) - \rho(x_0,a)| = \rho(x_n,x_0) \to 0$ pro $n \to \infty$, tedy $f(x_n) \to f(x_0)$ a f je spojité. V případě zobrazení g dostáváme $|g(x_n) - g(x_0)| = |\rho(x_n,A) - \rho(x_0,A)| \le |\rho(x_n,x_0) + \rho(x_0,A) - \rho(x_0,A)| = \rho(x_n,x_0) \to 0$ (využili jsme nerovnosti $\rho(x,A) \le \rho(x,x_0) + \rho(x_0,A)$, kterou lze snadno dokázat pomocí trojúhelníkové nerovnosti a definice vzdálenosti bodu od množiny), tedy i zobrazení g je spojité. ▲

iii) Nechť ρ_d je diskrétní metrika na $\mathbb{R}$. Určete nutnou a dostatečnou podmínku, aby zobrazení $f\colon \mathbb{E}^1 \to (\mathbb{R}, \rho_d)$ bylo spojité.

Řešení. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ je libovolné a $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost reálných čísel konvergující k x_0 v metrice prostoru $\mathbb{E}^1$, tj. $|x_n - x_0| \to 0$. K tomu, aby zobrazení f bylo spojité v bodě x_0, je nutné a stačí, aby $f(x_n)$ konvergovala k $f(x_0)$ v diskrétní metrice. To je však možné tehdy a jen tehdy, když je posloupnost $\{f(x_n)\}$ skorostacionární, tj. od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ je $f(x_n) = f(x_0)$. Protože $\{x_n\}$ je *libovolná* posloupnost konvergující k x_0, je toto možné, právě když f je konstantní zobrazení. Tedy zobrazení $f : \mathbb{E}^1 \to (\mathbb{R}, \rho_d)$ je spojité, právě když je konstantní, tj. existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$ taková, že $f(x) = k$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. ▲

Cvičení 4.4.

i) Nechť ρ_d je diskrétní metrika na $\mathbb{R}$. Určete nutnou a dostatečnou podmínku, aby zobrazení $f : (\mathbb{R}, \rho_d) \to \mathbb{E}^1$ bylo spojité. (Doplněk k předchozímu příkladu).

ii) Nechť P je prostor komplexních čísel s obvyklou metrikou (tj. stejnou jako v $\mathbb{E}^2$). Rozhodněte, zda zobrazení $F(z) = |z|$, $G(z) = \bar{z}$ jsou spojitá.[1]

iii) Dokažte, že zobrazení $f : P \to Q$ je spojité, právě když pro každou množinu $A \subseteq P$ platí $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

iv) Dokažte, že zobrazení $f : P \to Q$ je spojité, právě když pro každou otevřenou podmnožinu $A \subseteq Q$ je množina $f^{-1}(A) = \{x \in P : f(x) \in A\}$ otevřená v P. Může být slovo otevřená v tomto tvrzení nahrazeno slovem uzavřená?

v) Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A, B \subseteq P$, $A \cap B = \emptyset$ jsou uzavřené podmnožiny v P. Dokažte, že existuje spojité zobrazení $f : P \to \mathbb{E}^1$ takové, že

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \in B. \end{cases}$$

[1] $\bar{z}$ značí číslo komplexně sdružené k z.

vi) Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $f: P \to P$ je spojité zobrazení. Rozhodněte, zda zobrazení $F: P \to \mathbb{E}^1$ definované předpisem $F(x) = \rho(x, f(x))$ je spojité.

vii) Nechť F je zobrazení z l_2 do l_1 (viz Cvičení 1.4 viii)) definované pro $x = \{x_1, x_2, \dots, \}$ předpisem

$$F(x) = \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots, \}.$$

Rozhodněte, zda je toto zobrazení spojité.

viii) Nechť $P = \mathbb{R}$ s metrikou

$$\rho(x, y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{pro } x \neq y, \\ 0 & \text{pro } x = y. \end{cases}$$

Definujme zobrazení $f: (\mathbb{R}, \rho) \to \mathbb{E}^1$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda je toto zobrazení spojité.

IV.2. Kontrakce

Definice 4.5. Nechť (P, ρ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $F: P \to Q$. Řekneme, že zobrazení F je *lipschitzovské*, jestliže existuje nezáporná reálná konstanta L (tzv. Lipschitzova konstanta) taková, že

$$\sigma(F(x), F(y)) \leq L\rho(x, y) \text{ pro každé } x, y \in P.$$

Je-li $L < 1$, pak říkáme, že F je *kontrakce* (s konstantou L).

Vlastnosti kontrakce úplného metrického prostoru do sebe budou předmětem V. kapitoly.

Vztah mezi spojitými a lipschitzovskými zobrazeními popisuje následující věta.

Věta 4.6. *Nechť (P, ρ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $F: P \to Q$ je lipschitzovské zobrazení. Pak je toto zobrazení spojité.*

Důkaz. Nechť $x_0 \in P$ je libovolné a $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost v P konvergující k x_0. Protože platí $\sigma(F(x_n), F(x_0)) \leq L\rho(x_n, x_0)$, je $\sigma(F(x_n), F(x_0)) \to 0$, tedy F je spojité v x_0, a protože $x_0 \in P$ je libovolné, je F spojité na P. $\square$

Příklady 4.7.

i) Dokažte, že diferencovatelná funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{E}^1$ je kontrakce, resp. lipschitzovská, právě když

$$|f'(x)| < 1, \text{ resp. } |f'(x)| < \infty \quad \text{pro všechna } x \in [a, b]. \tag{4.1}$$

Řešení. Nechť $L < 1$ je takové reálné číslo, že $|f'(x)| < L$ pro každé $x \in [a, b]$ (takové číslo vždy existuje vzhledem k předpokladu (4.1)), a nechť $x_1, x_2 \in [a, b]$ jsou libovolná. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě diferenciálního počtu platí $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)(x_1 - x_2)| = |f'(c)| \cdot |x_1 - x_2|$, kde c leží mezi x_1 a x_2, a tedy $|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|$, což znamená, že f je kontrakce.

Předpokládejme sporem, že f je kontrakce s konstantou $L \in [0, 1)$ a přitom $\max\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)| \ge 1$. Pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že $|f'(c)| > L$, tj. $\lim\limits_{x \to c} \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| > L$, odtud $|f(x) - f(c)| > L|x - c|$, je-li x dostatečně blízko c. To je však spor se skutečností, že f je kontrakce, a tedy musí platit (4.1).

Analogicky se provede důkaz pro případ, kdy je f lipschitzovská.

Z předcházejících úvah plyne, že diferencovatelná funkce na (obecně nekompaktním) intervalu I je kontrakce, právě když $\sup\limits_{x \in I} |f'(x)| < 1$. ▲

ii) Stejnolehlost s koeficientem stejnolehlosti k, pro který platí $|k| < 1$, je kontrakcí roviny, tj. metrického prostoru $\mathbb{E}^2$, do sebe.

iii) Nechť $F: (C[a,b], \rho_c) \to \mathbb{E}^1$ je definováno předpisem

$$F(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

tj. funkci $f(x) \in C[a,b]$ je přiřazeno reálné číslo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (toto přiřazení je korektní, neboť spojité funkce jsou integrovatelné). Dokažte, že F je spojité zobrazení.

Řešení. Využijeme tvrzení Věty 4.6. Nechť $f(x), g(x) \in C[a,b]$ jsou libovolné. Potřebujeme dokázat, že existuje nezáporná reálná konstanta L taková, že $\rho(F(f), F(g)) = |F(f) - F(g)| \le L\rho_c(f,g)$. Platí

$$|F(f) - F(g)| = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \le$$
$$\le \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \int_a^b \mathrm{d}x = \rho_c(f,g)(b-a),$$

což znamená, že zobrazení F je lipschitzovské (s konstantou $L = (b-a)$), a tedy spojité. ▲

iv) Nechť F je zobrazení prostoru $C[0,1]$ s metrikou stejnoměrné konvergence ρ_c do sebe, které je definováno předpisem

$$F(f) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Rozhodněte, zda je F kontrakce.

Řešení. Nechť $f, g \in C[0,1]$, pak platí

$$\begin{aligned}\rho_c(F(f), F(g)) &= \max_{x\in[0,1]} |F(f(x)) - F(g(x))| = \\ &= \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t g(t)\,\mathrm{d}t \right| \le \\ &\le \max_{x\in[0,1]} \int_0^x t|f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t|f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \le \\ &\le \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\rho_c(f, g),\end{aligned}$$

tedy F je kontrakce s konstantou $L = \frac{1}{2}$. ▲

Poznámka 4.8. V Příkladu 4.7 iii) jsme dokázali důležitý výsledek z teorie funkcionálních posloupností: Jestliže posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje na intervalu $[a, b]$ stejnoměrně k funkci $f(x)$, pak je možné zaměnit pořadí limity a integrace

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Cvičení 4.9.

i) Rozhodněte, zda následující funkce $f : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$ jsou lipschitzovské, resp. kontrakce:

a) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{E}^1$,
b) $f(x) = ax + b,\ x \in \mathbb{E}^1$,
c) $f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0, 1]$.

ii) Nechť P je Baireův metrický prostor (viz Příklad 1.2 vii)). Definujme zobrazení F metrického prostoru P do sebe takto: Pro $x = \{x_n\} \in P$ (tj. $\{x_n\}$ je posloupnost přirozených čísel) je

$$F(x) = \{1, x_1, 1, x_2, 1, x_3, 1, x_4, 1, \dots\}.$$

Rozhodněte, zda je toto zobrazení kontrakce.

iii) Nechť P je množina slov skládajících se z 10 písmen s metrikou definovanou v Příkladu 1.2 viii). Je-li $x = \{x_1, \dots, x_{10}\}$ slovo skládající se z písmen $x_1, \dots, x_{10}$, definujeme

$$f(x) = \{a, x_2, \dots, x_{10}\},$$

tj. první písmeno v každém slově je nahrazeno písmenem a. Rozhodněte, zda toto zobrazení je lipschitzovské, resp. kontrakce.

iv) Nechť $\{x_1, x_2, \dots\} \in l_\infty$ a $F : l_\infty \to l_1$ je definováno předpisem

$$F(x) = \left\{\frac{1}{3}x_1, \frac{1}{9}x_2, \dots, 3^{-k}x_k, \dots\right\}.$$

Rozhodněte, zda je toto zobrazení lipschitzovské, resp. kontrakce.

IV.3. Spojitá zobrazení kompaktních prostorů

Jak jsme se již zmínili v odstavci III.3, jedním z nejdůležitějších výsledků teorie spojitých funkcí jedné proměnné jsou Weierstrassovy věty, jež říkají, že funkce, která je spojitá na uzavřeném intervalu, je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší a nejmenší hodnoty. V tomto odstavci si ukážeme, že tyto věty jsou důsledkem obecnějšího tvrzení týkajícího se zobrazení kompaktních metrických prostorů.

Věta 4.10. *Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $F\colon P \to Q$ je spojité a $A \subseteq P$ je kompaktní. Pak $F(A)$ je kompaktní v Q.*

Důkaz. Nechť $y_n \in F(A)$ je libovolná posloupnost, tj. existuje posloupnost $x_n \in A$ taková, že $f(x_n) = y_n$. Protože A je kompaktní, z $\{x_n\}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k nějakému prvku $x_0 \in A$. Ze spojitosti zobrazení F plyne

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} F(x_{n_k}) = F(x_0) \in F(A).$$

Tedy $\{y_n\}$ obsahuje konvergentní podposloupnost, jejíž limita leží v $F(A)$, což znamená, že $F(A)$ je kompaktní. $\square$

Nyní si ukážeme, jak plynou Weierstrassovy věty z Věty 4.10. Nechť $P = Q = \mathbb{E}^1$, $A = [a, b]$ a $f\colon [a, b] \to \mathbb{E}^1$ je spojitá funkce. Podle Příkladu 3.15 i) je uzavřený interval v $\mathbb{E}^1$ kompaktní množina, tedy $f([a, b])$ je rovněž kompaktní.

První Weierstrassova věta nyní plyne z faktu, že kompaktní množina v každém metrickém prostoru je ohraničená (viz Věta 3.14). Skutečnost, že funkce f nabývá na $[a, b]$ své nejmenší a největší hodnoty, plyne z následující úvahy: Vzhledem k definici infima množiny reálných čísel existuje posloupnost $y_n \in [a, b]$ taková, že $f(y_n) \to \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. Z této posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{y_{n_k}\}$. Její limitu označme x_1, tj. $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_1$. Z Věty 4.2 plyne, že $\lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_1)$. Z druhé strany, protože $\{f(y_{n_k})\}$ je vybraná podposloupnost z $\{f(y_n)\}$, platí $\lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, tedy $f(x_1) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. Podobně lze dokázat existenci $x_2 \in [a, b]$, pro něž $f(x_2) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

Příklad 4.11. Nechť A je kompaktní množina v metrickém prostoru (P, ρ) a $b \notin A$. Dokažte, že existují $a_1, a_2 \in A$ taková, že $\rho(b, a_1) = \inf_{a\in A} \rho(b, a) = \rho(b, A)$, $\rho(b, a_2) = \sup_{a\in A} \rho(b, a)$.

Řešení. Uvažujme funkci $f : P \to \mathbb{E}^1$ definovanou předpisem $f(x) = \rho(b, x)$. Tato funkce je spojitá na kompaktní množině A (viz Příklad 4.3 ii)). Podle Věty 4.10 je množina $f(A)$ kompaktní v $\mathbb{E}^1$, tj. uzavřená a ohraničená. Z toho plyne, že $\inf_{a\in A} \rho(b, a)$, $\sup_{a\in A} \rho(b, a) \in f(A)$, a odtud plyne existence hledaných prvků $a_1, a_2 \in A$. ▲

Cvičení 4.12.

i) Nechť A je kompaktní množina v metrickém prostoru (P, ρ). Dokažte, že existují $a_1, a_2 \in A$ taková, že $\rho(a_1, a_2) = \sup_{a,b\in P} \rho(a, b) = d(A)$.

ii) Nechť A je kompaktní množina v metrickém prostoru (P, ρ), $f : A \to \mathbb{E}^1$ je spojité. Dokažte, že *graf zobrazení* f, $G(f) = \{[x, y] \in A \times \mathbb{E}^1 : y = f(x)\}$ je kompaktní množina v prostoru $P \times \mathbb{E}^1$ s metrikou $\tilde{\rho}([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \rho(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|$.

Každý nový nápad je nejdřív směšný, pak příliš prostý — a nakonec to podle něj dělají všichni.

Kapitola V

BANACHŮV PRINCIP PEVNÉHO BODU A JEHO POUŽITÍ

V této kapitole si dokážeme jeden z nejdůležitějších výsledků teorie metrických prostorů, tzv. *Banachovu větu o pevném bodu* kontraktivního zobrazení v úplném metrickém prostoru. Tuto větu lze s výhodou využívat k důkazu vět o existenci a jednoznačnosti řešení různých typů rovnic, což si podrobněji ukážeme v odst. V.2 a V.3.

V.1. Banachův princip

Definice 5.1. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a F je zobrazení prostoru P do sebe, tj. $F : P \to P$. Bod $x \in P$ se nazývá *pevným bodem* zobrazení F, jestliže

$$F(x) = x. \tag{5.1}$$

Věta 5.2. *Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor a $F : P \to P$ je kontrakce, tj. existuje reálná konstanta $q \in [0, 1)$ taková, že*

$$\rho(F(x), F(y)) \le q\rho(x, y)$$

pro každé $x, y \in P$.
Pak existuje právě jeden pevný bod zobrazení F, tj. existuje právě jedno $x_0 \in P$ takové, že $F(x_0) = x_0$.

Banachův princip říká, kdy existuje právě jedno řešení rovnice (5.1). Poznamenejme, že důkaz tohoto tvrzení je stejně důležitý jako samotné tvrzení (toto uvádíme proto, že důkazy matematických tvrzení jsou ve skriptech studenty většinou přeskakovány a při přednášce jsou odpočinkovou chvilkou). Z důkazu totiž plyne metoda — tzv. *metoda postupných aproximací*, kterou lze dané řešení rovnice (5.1) zkonstruovat.

Důkaz. Pro přehlednost rozdělíme důkaz na několik částí.

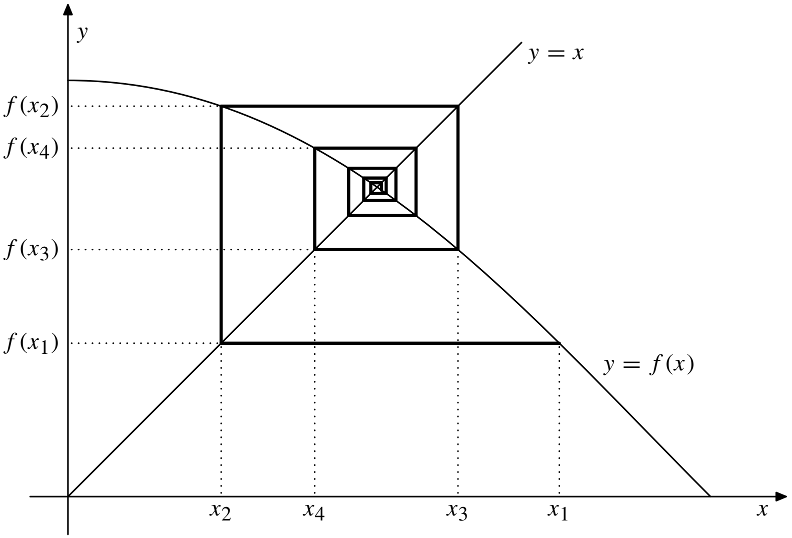
1. Nechť $x_1 \in P$ je libovolné. Definujme posloupnost $\{x_n\}$ v P takto: $x_2 = F(x_1)$, $x_3 = F(x_2), \dots, x_n = F(x_{n-1}) \dots$ S využitím předpokladu o kontrakci ukážeme, že tato posloupnost je cauchyovská. Platí:

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(F(x_{n-1}), F(x_n)) \le q\rho(x_{n-1}, x_n) = \\ &= q\rho(F(x_{n-2}), F(x_{n-1})) \le q^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \le \dots \le q^{n-1}\rho(x_1, x_2)\end{aligned}$$

   pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Využijeme-li tohoto vztahu, pro libovolné přirozené $m > n$ dostáváme

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m) &\le \rho(x_n, x_{n+1}) + \dots + \rho(x_{m-1}, x_m) \le \\ &\le q^{n-1}\rho(x_1, x_2) + q^n\rho(x_1, x_2) + \dots + q^{m-2}\rho(x_1, x_2) = \\ &= \rho(x_1, x_2)\, q^{n-1}[1 + q + \dots + q^{m-n-1}] \le \\ &\le \rho(x_1, x_2)\, q^{n-1}[1 + q + \dots] = q^{n-1}\rho(x_1, x_2)\, \tfrac{1}{1-q}.\end{aligned}$$

   Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Protože $\lim q^{n-1} = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \ge n_0$ platí $q^{n-1}\rho(x_1, x_2)\frac{1}{1-q} < \varepsilon$. Tedy pro $n, m \ge n_0$ je $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, čímž je dokázáno, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská.
2. Protože prostor (P, ρ) je úplný, je $\{x_n\}$ konvergentní, tedy $x_n \to x_0$, kde $x_0 \in P$.
3. Ukážeme, že x_0 je pevným bodem zobrazení F. Předpokládejme sporem, že x_0 není pevným bodem, tj. $\rho(x_0, F(x_0)) =: \varepsilon > 0$. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\rho(x_0, F(x_0)) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, F(x_0)) = \rho(x_0, x_n) + \rho(F(x_{n-1}), F(x_0)) \le \le \rho(x_0, x_n) + q\rho(x_0, x_{n-1})$. Protože jak $\rho(x_0, x_n)$, tak $q\rho(x_0, x_{n-1})$ konvergují k nule, je jejich součet menší než ε, je-li n dostatečně velké, což je spor.



Obrázek 5: Pevný bod a metoda postupných aproximací

□

4. Dokážeme, že x_0 je jediný pevný bod zobrazení F. Předpokládejme, že y_0 je jiný pevný bod. Pak $\rho(x_0, y_0) = \rho(F(x_0), F(y_0)) \le q\rho(x_0, y_0)$. Odtud plyne $(1-q)\rho(x_0, y_0) \le 0$, což je vzhledem k faktu, že $1-q > 0$, možné jen tehdy, když $\rho(x_0, y_0) \le 0$, tj. $x_0 = y_0$.

Poznámky 5.3.

i) Věta o pevném bodu kontraktivního zobrazení v úplném metrickém prostoru byla ve výše uvedeném tvaru dokázána polským matematikem Stefanem Banachem ve dvacátých letech 20. století. V současné době existuje celá řada zobecnění a modifikací tvrzení o existenci pevných bodů zobrazení v metrických prostorech; podrobnosti je možno nalézt např. v [17].

ii) Podmínky Banachova principu jsou pouze dostatečnými podmínkami pro existenci pevného bodu zobrazení metrického prostoru do sebe. Jinými slovy, toto zobrazení může mít pevný bod i v případě, že není splněn některý z předpokladů Banachovy věty (tj. kontrakce — do sebe — úplnost), viz Příklad 5.4 i) a Cvičení 5.6 i).

iii) Podmínku $\rho(F(x), F(y)) \le q\rho(x, y), q \in [0, 1)$ nelze obecně nahradit slabší podmínkou

$$\rho(F(x), F(y)) < \rho(x, y), \tag{5.2}$$

jak ukazuje tento příklad: $P = \mathbb{E}^1$ a $F(x) = x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, které nemá v P pevný bod, přestože podmínka (5.2) je splněna.

Příklady 5.4.

i) Najděte pevné body zobrazení $f: \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$, $f(x) = x^2$ a proveďte diskusi, na jakých intervalech jsou splněny předpoklady Banachovy věty.

Řešení. Graficky nebo řešením rovnice $x^2 = x$ dostáváme pevné body zobrazení $x = 0, 1$.

Nechť I je libovolný interval tvaru $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$, tj. I s metrikou indukovanou z $\mathbb{E}^1$ je úplný metrický prostor.

Podle Příkladu 4.7 i) je diferencovatelná funkce f kontrakcí, jestliže platí $\max_{x \in I} |f'(x)| = \max_{x \in I} |2x| < 1$, což je splněno pro $|x| < \frac{1}{2}$. Proto dále uvažujme libovolný uzavřený podinterval $[a, b]$ intervalu $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ověřme, kdy je f zobrazením $[a, b]$ do sebe. K tomu musíme najít nejmenší a největší hodnotu f na $[a, b]$ (tyto hodnoty existují v důsledku druhé Weierstrassovy věty). Diferencovatelná funkce nabývá svého maxima a minima na uzavřeném intervalu buď v nějakém stacionárním bodě ležícím uvnitř intervalu, nebo v jednom z krajních bodů intervalu. Položíme-li $f'(x) = 0$, dostáváme stacionární bod $x = 0$ a porovnáním této hodnoty s hodnotami $f(a)$ a $f(b)$ vidíme, že $\max f(x) = \max\{a^2, b^2\}$, $\min f(x) = 0$, tedy f zobrazuje interval $[a, b]$ do sebe, jestliže $a \in [-1, 1]$, $b \in (0, 1]$, $b \geq |a|$.

Například je-li f definovaná na $[-0{,}4; 0{,}4]$, pak splňuje předpoklady Banachovy věty. ▲

ii) Nechť (P, ρ) je kompaktní metrický prostor, $F: P \to P$ splňuje podmínku (5.2) pro každé $x, y \in P, x \neq y$. Pak má F právě jeden pevný bod v P. Dokažte.

Řešení. Uvažujme zobrazení $f: P \to \mathbb{E}^1$ zadané takto: $f(x) = \rho(x, F(x))$. Toto zobrazení je spojité (viz Cvičení 4.4 vi)). Předpokládejme, že zobrazení F nemá pevný bod v P. Pak $f(x) > 0$ pro každé $x \in P$. Vzhledem ke kompaktnosti P a spojitosti f nabývá f na P své nejmenší hodnoty, tj. existuje $x_0 \in P$ takové, že $f(x) \geq f(x_0)$ pro každé $x \in P$. Avšak pro $x_1 = F(x_0)$ z podmínky (5.2) plyne $f(x_1) = \rho(x_1, F(x_1)) = \rho(F(x_0), F(F(x_0))) < \rho(x_0, F(x_0)) = f(x_0)$, což je spor. Jsou-li x_0, y_0 dva pevné body F, podobně jako v důkazu Věty 5.2 lze ukázat, že podmínka (5.2) implikuje $x_0 = y_0$, tedy F má jediný pevný bod. ▲

Následující příklady ilustrují praktické použití Banachova principu, kterým je, jak jsme řekli v úvodu,

— důkaz existence a jednoznačnosti řešení rovnice (5.1);

— nalezení tohoto řešení metodou postupných aproximací.

Příklady 5.5.

i) Metodou postupných aproximací najděte řešení rovnice $\cos x = x$.

Řešení. Hledáme pevný bod zobrazení $f(x) = \cos x$. Aby bylo toto zobrazení kontraktivní, musí být podle Příkladu 4.7 i) $|\sin x| < 1$. Proto uvažujme toto zobrazení na intervalu $I = \left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$, kde $\varepsilon > 0$ je dostatečně malé. Pak $\cos x: I \to [0, 1]$ je kontrakce úplného metrického prostoru do sebe a jeho pevný bod hledáme postupnými aproximacemi $x_n = \cos x_{n-1}$.

Zvolíme-li $x_0 = \frac{1}{2}$, numerickým výpočtem dostáváme tyto hodnoty:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}87758, & x_4 &= 0{,}69478, & x_{15} &= 0{,}73965,\\ x_2 &= 0{,}63901, & x_5 &= 0{,}76820, & x_{20} &= 0{,}73901,\\ x_3 &= 0{,}80269, & x_{10} &= 0{,}73501, & x_{30} &= 0{,}73908. \end{aligned}$$

▲

ii) Najděte pevný bod zobrazení $f: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, které je složeno ze stejnolehlosti s koeficientem $k = \frac{1}{2}$ a středem stejnolehlosti $[0, 0]$ a z posunutí určeného vektorem $u = (1, 1)$.

Řešení. Uvažované zobrazení je dáno předpisem $f([a_1, a_2]) = \left[\frac{1}{2}\, a_1 + 1, \frac{1}{2}\, a_2 + 1\right]$. Výpočtem z rovnic $\frac{1}{2}\, a_1 + 1 = a_1$, $\frac{1}{2}\, a_2 + 1 = a_2$ určíme (jediný) pevný bod $A = [2, 2]$.

Metodou postupných aproximací dostaneme, zvolíme-li např. $x_1 = [-2, 2]$, tuto konvergentní posloupnost:

$$\begin{aligned} x_2 &= [0, 2], & x_3 &= [1, 2], & x_4 &= \left[\frac{3}{2}, 2\right],\\ x_5 &= \left[\frac{7}{4}, 2\right], & x_6 &= \left[\frac{15}{8}, 2\right], & x_7 &= \left[\frac{31}{16}, 2\right], \dots \end{aligned}$$

▲

iii) Metodou postupných aproximací najděte řešení diferenciální rovnice s danou počáteční podmínkou

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1. \tag{5.3}$$

Řešení. Abychom mohli použít Banachovu větu, zintegrujeme obě strany rovnice v intervalu $[0, x]$. Dostáváme $y(x) - y(0) = -2\int_0^x ty(t)\,\mathrm{d}t$, tj. $y(x) = 1 - 2\int_0^x ty(t)\,\mathrm{d}t$. Funkce y je tedy řešením úlohy (5.3), právě když je pevným bodem zobrazení F, které přiřazuje spojité funkci $y(x)$ opět spojitou funkci[1]

$$h(x) = 1 - 2\int_0^x ty(t)\,\mathrm{d}t,$$

a to v nějakém intervalu $[-\delta, \delta]$, $\delta > 0$. Označme P prostor $C[-\delta, \delta]$ s metrikou stejnoměrné konvergence (viz Příklad 1.2 v)). Podle Příkladu 3.6 i) je P úplný a $F\colon P \to P$, $F(y(x)) = h(x)$. Důkaz, že zobrazení F je kontrakce, je v podstatě totožný s řešením Příkladu 4.7 iv) a dává výsledek, že F je kontrakce, je-li $[-\delta, \delta] \subseteq (-1, 1)$. Nyní metodou postupných aproximací dostaneme, zvolíme-li $y_0 = 1$,

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 - 2\textstyle\int_0^x t\,\mathrm{d}t = 1 - x^2,\\
y_2 &= 1 - 2\textstyle\int_0^x t(1-t^2)\,\mathrm{d}t = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2},\\
y_3 &= 1 - 2\textstyle\int_0^x t(1-t^2+\frac{t^4}{2})\,\mathrm{d}t = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{6},\\
&\vdots\\
y_n &= 1 - x^2 + \tfrac{x^4}{2!} - \tfrac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n\tfrac{x^{2n}}{n!},
\end{aligned}$$

[1] Neboť integrál jako funkce horní meze je spojitá funkce.

což je Taylorův polynom stupně n v bodě $x = 0$ funkce $y = \mathrm{e}^{-x^2}$. V teorii nekonečných řad se dokazuje, že

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \mathrm{e}^{-x^2} \text{ pro } x \in (-\infty, \infty).$$

Řešením daného tzv. počátečního problému je proto funkce $y = \mathrm{e}^{-x^2}$. Dosazením do rovnice (5.3) se můžeme přesvědčit, že tato funkce je jejím řešením pro všechna $x \in \mathbb{R}$. ▲

iv) Pomocí Banachova principu ukažte, že soustava rovnic

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 2, \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 1 \end{aligned}$$

má právě jedno řešení.[1]

Řešení. Uvedený systém rovnic definuje zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tak, že řešení systému rovnic je právě jeho pevným bodem. Abychom mohli použít Banachovu větu, zaveďme na $\mathbb{R}^2$ např. euklidovskou metriku a ověřme, zda

[1]Tento příklad má ilustrativní charakter; systém rovnic lze samozřejmě řešit přímo. Uvedená metoda řešení systému lineárních rovnic je běžná v numerických metodách v případě, že matice soustavy má velké rozměry, neboť přímé metody řešení pak vyžadují velkou kapacitu paměti počítače.

f je kontrakce z $\mathbb{E}^2$ do sebe (případy jiných metrik jsou uvedeny ve Cvičení 5.8 iv)).

Označíme-li $u = (x, y)$, $u' = (x', y')$, $v = f(u)$, $v' = f(u')$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\rho^2(v, v') &= \left[\frac{1}{2}(x - x') + \frac{1}{3}(y - y')\right]^2 + \left[\frac{1}{3}(x - x') + \frac{1}{2}(y - y')\right]^2 = \\
&= \frac{13}{36}(x - x')^2 + \frac{13}{36}(y - y')^2 + \frac{2}{3}(x - x')(y - y') \le \\
&\le \frac{13}{36}(x - x')^2 + \frac{13}{36}(y - y')^2 + \frac{1}{3}(x - x')^2 + \frac{1}{3}(y - y')^2 = \\
&= \frac{25}{36}[(x - x')^2 + (y - y')^2] = \frac{25}{36}\rho(u, u'),
\end{aligned}$$

přitom při odhadu členu $\frac{2}{3}(x - x')(y - y')$ jsme použili nerovnost

$$2ab \le a^2 + b^2.$$

Protože $\frac{25}{36} < 1$, plyne z Banachova principu existence a jednoznačnost řešení daného systému rovnic. ▲

Cvičení 5.6.

i) Najděte pevné body osové souměrnosti, středové souměrnosti, posunutí, kruhové inverze.

ii) Najděte pevný bod následujících funkcí a rozhodněte, kdy jsou splněny předpoklady Banachovy věty:

a) $f(x) = ax + b, \ x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \frac{1}{x}, \ x \geq c > 0$;
c) $f(x) = \sqrt{x}, \ x \geq c \geq 0$;
d) $f(x) = \ln x, \ x \geq c > 0$.

iii) Určete interval, kde následující funkce splňují předpoklady Banachovy věty o pevném bodu, a metodou postupných aproximací najděte tento bod.

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$;
b) $f(x) = (x^2 - 1)/3$.

iv) Je dána rovnice $2 \operatorname{arctg} x = x$. Určete přibližně kladný kořen této rovnice:

a) metodou postupných aproximací, je-li $x_1 = 1{,}5$;
b) nahradíte-li v této rovnici funkci $\operatorname{arctg} x$ prvními dvěma členy Maclaurinova rozvoje.

Porovnejte hodnotu x_5 z a) s výsledkem b).

V.2. Cauchyova úloha

V tomto odstavci zformulujeme Banachův princip pro řešení některých diferenciálních rovnic, kde zobecníme postup z Příkladu 5.5 iii). Další příklady jsou pak uvedeny ve Cvičení 5.8.

Cauchyova úloha. Hledáme řešení diferenciální rovnice s počáteční podmínkou

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{5.4}$$

Tímto řešením je diferencovatelná funkce $y = y(x)$, jejíž graf prochází bodem $[x_0, y_0]$ a která v nějakém okolí bodu x_0 vyhovuje rovnosti $y'(x) = f(x, y(x))$.

Věta 5.7 (Cauchyova úloha)**.** *Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v $\mathbb{E}^2$ a splňuje tzv. Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné y, tj. existuje nezáporná reálná konstanta L taková, že*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

pro každé $[x, y_1], [x, y_2] \in \mathbb{E}^2$.
Pak má Cauchyova úloha (5.4) právě jedno řešení.

Důkaz. Integrací obou stran rovnice (5.4) od x_0 do x a využitím počáteční podmínky dostáváme

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t. \tag{5.5}$$

Využitím pravidla pro derivaci funkce, kde proměnná je jednou z mezí integrálu, lze ukázat, že funkce $y = y(x)$ je řešením (5.4), právě když splňuje rovnost (5.5). Nechť $\delta > 0$ je takové, že $\delta L < 1$, a uvažujme prostor $C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ všech spojitých funkcí definovaných na intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ s metrikou stejnoměrné konvergence ρ_c. Definujme zobrazení prostoru $C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ do sebe takto:

$$F(y(x)) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t.$$

Protože funkce $y(x)$ splňující (5.5) jsou řešeními Cauchyovy úlohy (5.4), k důkazu existence řešení této úlohy stačí najít pevný bod zobrazení F. Nechť tedy $g(x), h(x) \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Pak platí

$$\begin{aligned}
|F(g(x)) - F(h(x))| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t, h(t))\,\mathrm{d}t \right| \le \\
&\le \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, g(t)) - f(t, h(t))|\,\mathrm{d}t \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} L|g(t) - h(t)|\,\mathrm{d}t \right| \le \\
&\le \max_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |g(x) - h(x)| L \left| \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \right| \le L\delta\rho_c(g, h).
\end{aligned}$$

Tedy $\rho_c(F(g), F(h)) = \max\limits_{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |F(g(x)) - F(h(x))| \le L\delta\rho_c(g, h)$, což znamená, že F je kontrakce s konstantou δL. Protože prostor $C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ je úplný, má podle Věty 5.2 zobrazení F pevný bod, funkci $y(x)$, která je řešením (5.4). □

V.3. Systém lineárních rovnic

V tomto odstavci zobecníme úlohu z Příkladu 5.5 iv) — použijeme Banachův princip pevného bodu k důkazu existence a jednoznačnosti řešení systému n lineárních rovnic o n neznámých

$$Ax = b, \tag{5.6}$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $b = (b_1, \dots, b_n)$ jsou vektory a $A = (a_{ij})$ je regulární $n \times n$ matice s prvky $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Přepíšeme-li tento systém do tvaru

$$(E - A)x + b = x,$$

definuje levá strana této rovnice zobrazení $\mathbb{R}^n$ do sebe, jehož pevným bodem je právě řešení daného systému (5.6).

Hledáme podmínky na prvky matice A, které zajistí, že toto zobrazení je kontrakcí na $\mathbb{R}^n$ s vhodnou metrikou.

Uvažujme $\mathbb{E}^n$ a definujme zobrazení $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ takto:

$$f(x) = y = (E - A)x + b, \tag{5.7}$$

tj. označíme-li matici $E - A = K$, jsou jednotlivé komponenty vektoru y tvaru $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} k_{ij} x_i - b_i$. Nechť $y' = f(x')$, $y'' = f(x'')$. Pak

$$\rho^2(y', y'') = \sum_{i=1}^{n} (y_i' - y_i'')^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} k_{ij} (x_j' - x_j'') \Big)^2 \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}^2 \, \rho^2(x' - x''),$$

přičemž v poslední nerovnosti jsme použili Cauchyovu-Buňakovského nerovnost, která je uvedena v odst. VII.1. Odtud plyne podmínka pro to, aby f byla kontrakce:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}^2 \leq \alpha < 1. \tag{5.8}$$

Změníme-li euklidovskou metriku na množině $\mathbb{R}^n$ za maximální nebo součtovou metriku, změní se tvar podmínky na prvky matice A — viz Cvičení 5.8 iv).

Cvičení 5.8.

i) Metodou postupných aproximací najděte řešení Cauchyovy úlohy $y' = \frac{1}{2}y$, $y(0) = 1$.

ii) Dokažte existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy $y' + y^2 + 1 = 0$, $y(0) = 0$ a toto řešení najděte metodou postupných aproximací.

iii) Pomocí Banachova principu ukažte, že soustava rovnic má právě jedno řešení.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z - 1\\
y &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{4}z + 2\\
z &= \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z - 2
\end{aligned}$$

iv) Najděte podmínky na prvky matice A tak, aby zobrazení definované vztahem (5.7) bylo kontrakcí, definujeme-li na množině $\mathbb{R}^n$ metriku ρ_1, resp. ρ_∞.

Udejte příklad 2×2 matice, pro niž toto zobrazení je, resp. není kontrakcí v některé metrice.

Skutečný objev, to není najít nové země, ale dívat se novýma očima.

Kapitola VI

DALŠÍ VLASTNOSTI METRICKÝCH PROSTORŮ

V této kapitole jsou vysvětleny některé pojmy, které většinou nejsou probírány v rámci běžného kursu matematické analýzy, jsou však standardní částí každé monografie zabývající se podrobněji problematikou metrických prostorů. Tato kapitola může také sloužit jako úvod do studia topologie a funkcionální analýzy, což jsou matematické disciplíny probírané ve vyšších ročnících odborného studia.

Důkazy jednotlivých tvrzení i komentáře k nim jsou v této kapitole poněkud stručnější než v předcházejícím textu.

VI.1. Souvislé metrické prostory

Definice 6.1. Metrický prostor (P, ρ) se nazývá *souvislý,* jestliže P nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných disjunktních podmnožin P, které jsou uzavřené v P. Množina $A \subseteq P$ se nazývá *souvislá*, je-li metrický prostor (A, ρ) souvislý.

Poznamenejme, že množina $A \subseteq P$ je tedy souvislá, pokud ji nelze vyjádřit jako sjednocení dvou disjunktních množin, které jsou *uzavřené v* A, a nikoliv v P, jak je často tato definice chybně interpretována.

Příklady 6.2.

i) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Pak intervaly $[a, b]$, (a, b),$[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a)$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ a celá reálná přímka $(-\infty, \infty)$ jsou (jediné) souvislé množiny v $\mathbb{E}^1$. Důkaz souvislosti těchto množin je založen na axiomu o supremu pro množiny v $\mathbb{R}$ (každá neprázdná shora ohraničená množina v $\mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}$ svoje supremum). Pro metrický prostor $\mathbb{Q}$ toto tvrzení neplatí!

ii) Metrický prostor (P, ρ) je souvislý, právě když pro každou neprázdnou podmnožinu $A \subset P$, $A \neq P$ platí $h(A) \neq \emptyset$. Dokažte.

Řešení. $\Rightarrow$: Nechť (P, ρ) je souvislý a předpokládejme, že existuje $\emptyset \neq = A \subset P$, pro niž $h(A) = \emptyset$. Pak ale $P = \overline{A} \cup \overline{P \setminus A}$ je sjednocení neprázdných uzavřených disjunktních podmnožin.

$\Leftarrow$: Nechť pro každé $\emptyset \neq A \subset P$ je $h(A) \neq \emptyset$ a předpokládejme, že (P, ρ) není souvislý, tj. existují neprázdné uzavřené disjunktní podmnožiny

$A, B \subset P$ takové, že $P = A \cup B$. Pak ale $B = P \setminus A$ a $\overline{P \setminus A} \cap \overline{A} = \overline{B} \cap \overline{A} = B \cap A = \emptyset$, tj. $h(A) = \emptyset$, což je spor. ▲

Následující tvrzení je zobecněním Bolzanovy věty z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné, která říká, že spojitým obrazem intervalu na reálné ose je opět interval.

Věta 6.3. *Nechť (P, ρ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $A \subseteq P$ je souvislá a $f : P \to Q$ je spojité. Pak $f(A)$ je souvislá množina.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f(A)$ není souvislá, tj. tuto množinu lze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných disjunktních množin Q_1, Q_2, které jsou uzavřené v $f(A)$. Podle výsledku Cvičení 4.4 iv) jsou množiny $f^{-1}(Q_1)$, $f^{-1}(Q_2)$ uzavřené (a samozřejmě i neprázdné a disjunktní) v A, přičemž

$$A = f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2),$$

což odporuje souvislosti množiny A. □

Cvičení 6.4.

i) Metrický prostor je souvislý, právě když P a $\emptyset$ jsou jediné obojetné (tj. zároveň otevřené i uzavřené) množiny v P. Dokažte.

ii) Metrický prostor P je souvislý, právě když P nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných disjunktních podmnožin, které jsou otevřené v P. Dokažte.

iii) Dokažte, že otevřená množina $A \in \mathbb{E}^n$ je souvislá, právě když každé dva body z A lze spojit lomenou čarou, která leží celá v A.

iv) Nechť ρ_1, ρ_2 jsou ekvivalentní metriky na P. Dokažte, že (P, ρ_1) je souvislý, právě když je souvislý (P, ρ_2).

v) Nechť $(P, \rho), (Q, \sigma)$ jsou metrické prostory. Dokažte, že metrický prostor $P \times Q$ s metrikou $\tilde{\rho}$ definovanou pro $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in P \times Q$ předpisem

$$\tilde{\rho}\,([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \sqrt{\rho^2(x_1, x_2) + \sigma^2(y_1, y_2)}$$

je souvislý, právě když každý z prostorů P, Q je souvislý.

VI.2. Separabilní prostory

Definice 6.5. Metrický prostor (P, ρ) se nazývá *separabilní*, jestliže existuje nejvýše spočetná množina $A \subseteq P$, která je hustá v P, tj. $\overline{A} = P$.

Připomeňme, že nějaká množina obsahuje nejvýše spočetně mnoho prvků, jestliže má konečně mnoho prvků nebo existuje bijektivní zobrazení této množiny na množinu přirozených čísel. Množina je nespočetná, jestliže není nejvýše spočetná. Např. množina celých a racionálních čísel jsou nejvýše spočetné, množina iracionálních nebo reálných čísel je nespočetná. Sjednocení nejvýše spočetného počtu nejvýše spočetných množin je nejvýše spočetná množina, viz např. [9].

Věta 6.6. *Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Jestliže existuje $\delta > 0$ a nespočetná množina $X \subseteq P$ taková, že $\rho(x, y) > \delta$ pro každé $x, y \in X$, $x \neq y$, pak (P, ρ) není separabilní.*

Důkaz. Nechť A je libovolná hustá podmnožina v P. Podle Věty 2.13 to znamená, že ke každému $x \in P$ a každému $\varepsilon > 0$, zejména k $\varepsilon = \delta/2$, existuje $a \in A$ takové, že $\rho(a, x) < \varepsilon$. Protože $X \subseteq P$, totéž tvrzení platí i pro $x \in X$, což je však vzhledem k nespočetnosti množiny X možné jen tehdy, když A je nespočetná, tedy metrický prostor (P, ρ) není separabilní. □

Příklady 6.7.

i) Prostor $\mathbb{E}^1$ je separabilní, neboť $\mathbb{Q}$ — množina racionálních čísel — je jeho spočetná hustá podmnožina.

ii) Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou separabilní metrické prostory a nechť na množině $P \times Q$ je definována metrika stejným způsobem jako ve Cvičení 6.4 v). Pak prostor $P \times Q$ s touto metrikou je separabilní prostor. Vskutku, jsou-li A, B nejvýše spočetné husté podmnožiny v P, resp. Q, pak nejvýše spočetná množina $A \times B$ je hustá v $P \times Q$. Z tohoto faktu a předchozího příkladu mj. plyne, že prostor $\mathbb{E}^n$ je separabilní.

iii) Prostor l_2 je separabilní, neboť množina všech posloupností racionálních čísel, v nichž pouze konečně mnoho členů je nenulových, je nejvýše spočetná a hustá v l_2. Abychom tuto skutečnost dokázali, nechť $x = \{x_k\}$ je libovolná, tj. řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ je konvergentní. Odtud plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{\infty} x_k^2 = 0$. Odtud k číslu $\varepsilon/2 > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\sum\limits_{k=n}^{\infty} x_k^2 <$ $< \varepsilon/2$. Protože množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{E}^1$, k číslu $\varepsilon/2^{k+1}$ existuje $r_k \in \mathbb{Q}$ takové, že $|x_k - r_k| < \varepsilon/2^{k+1}$, $k = 1, \dots, n_0$. Označme $r = \{r_1, r_1, \dots, r_{n_0}, 0, \dots, \}$. Pak platí

$$\rho(x, r) = \sum_{k=1}^{n_0} (x_k - r_k)^2 + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} x_k^2 < \varepsilon \sum_{k=1}^{n_0} 2^{-(k+1)} + \frac{1}{2}\varepsilon < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Tedy množina posloupností racionálních čísel, v nichž pouze konečně mnoho členů je nenulových, je hustá v l_2.

iv) Prostor l_∞ všech ohraničených posloupností reálných čísel není separabilní. Nechť A je podmnožina l_∞ sestávající z posloupností, v nichž se vyskytují pouze čísla 0 a 1. Tato množina je nespočetná (viz [9]) a pro $x, y \in A,\ x \neq y$, platí $\rho(x, y) = 1$, tedy podle Věty 6.6 prostor l_∞ není separabilní.

Cvičení 6.8.

i) Rozhodněte, zda pampeliškový prostor (viz Cvičení 1.4 vii)) je separabilní.

ii) Rozhodněte, zda metrický prostor ze Cvičení 3.7 iii) je separabilní.

iii) Udejte nutnou a dostatečnou podmínku, kdy je diskrétní metrický prostor separabilní.

iv) Rozhodněte, zda Baireův metrický prostor (viz Příklad 1.2 vii)) je separabilní.

VI.3. Homeomorfní zobrazení

Definice 6.9. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$ je bijekce. Zobrazení f se nazývá *homeomorfní,* jestliže zobrazení f i f^{-1} jsou spojitá. Existuje-li mezi dvěma metrickými prostory homeomorfní zobrazení, pak řekneme, že tyto prostory jsou *homeomorfní.*

Poznamenejme, že je-li zobrazení f spojité, inverzní zobrazení f^{-1} nemusí být spojité. Například identické zobrazení na $\mathbb{R}$, chápané jako zobrazení $(\mathbb{R}, \rho_d)$ do $\mathbb{E}^1$, je spojité (Cvičení 4.4 i)) a inverzní zobrazení $\mathbb{E}^1$ do $(\mathbb{R}, \rho_d)$ není spojité (Příklad 4.3 iii)).

Důležitost pojmu homeomorfního zobrazení v teorii metrických prostorů popisuje následující věta.

Věta 6.10. *Nechť $f : P \to Q$ je homeomorfní zobrazení. Pak platí:*
a) *Množina $A \subseteq P$ je uzavřená v P, právě když množina $f(A)$ je uzavřená v Q.*
b) *Množina $A \subseteq P$ je otevřená v P, právě když množina $f(A)$ je otevřená v Q.*

Důkaz. Tvrzení plyne z výsledku Cvičení 4.4 iv). □

Příklady 6.11.

i) Nechť P je množina všech funkcí tvaru $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ s metrikou $\rho(x^n, x^m) = |n - m|$ a $Q = \mathbb{N}$ s metrikou indukovanou z $\mathbb{E}^1$. Pak lze snadno ověřit, že $f : P \to \mathbb{N}$ definované předpisem $f(x^n) = n$ je homeomorfní zobrazení z P na Q.

ii) Nechť P je kulová plocha bez severního pólu. Pak P je homeomorfní s $\mathbb{E}^2$, přičemž homeomorfním zobrazením mezi těmito prostory je stereografická projekce, viz Cvičení 1.4 vi). Spojitost stereografické projekce a k ní inverzního zobrazení plyne z explicitního předpisu pro toto zobrazení.

Cvičení 6.12.

i) Dokažte, že každé izometrické zobrazení je homeomorfní.

ii) Dokažte toto tvrzení: Nechť ρ_1, ρ_2 jsou metriky na množině P. Tyto metriky jsou ekvivalentní, právě když metrické prostory (P, ρ_1) a (P, ρ_2) jsou homeomorfní.

iii) Ke každému metrickému prostoru (P, ρ) existuje s ním homeomorfní prostor (Q, σ), který je omezený, tj. $\sup_{a,b \in Q} \sigma(a, b) < \infty$. Dokažte.

iv) Dokažte, že interval $(0, 1)$ s metrikou indukovanou z $\mathbb{E}^1$ je homeomorfní s $\mathbb{E}^1$.[1]

v) V diferenciálním počtu funkcí jedné proměnné je dokazováno toto tvrzení:

Nechť $f(x)$ je spojitá a prostá funkce na intervalu $I = [a, b]$. Pak inverzní funkce $f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$ je také spojitá.

Dokažte toto zobecněné tvrzení:

Nechť f je prosté a spojité zobrazení kompaktního metrického prostoru (P, ρ) na metrický prostor (Q, σ). Pak inverzní zobrazení f^{-1} je spojité.

[1] Tento příklad ukazuje, že homeomorfní obraz úplného prostoru nemusí být úplný.

VI.4. Kompaktní množiny

Definice 6.13. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $\varepsilon > 0$. Množina $A \subseteq P$ se nazývá *ε-síť v P*, jestliže ke každému $x \in P$ existuje $a \in A$ takové, že $\rho(x, a) < \varepsilon$.

Význam pojmu ε-sítě při studiu kompaktních množin ilustruje následující tvrzení.

Věta 6.14. *Metrický prostor (P, ρ) je kompaktní, právě když je úplný a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť.*

Důkaz. $\Rightarrow$: Nejprve ukážeme, že kompaktní metrický prostor je úplný (což je vlastně řešení Cvičení 3.18 iv)). Nechť $\{x_n\}$ je libovolná cauchyovská posloupnost v P. Z kompaktnosti P plyne, že existuje vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $x_0 \in P$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Platí $\rho(x_n, x_0) \leq \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$. Jsou-li nyní n a n_k dostatečně velká, je každý ze sčítanců v poslední nerovnosti menší než $\frac{\varepsilon}{2}$, tedy $\rho(x_n, x_0) \to 0$.

Nyní dokážeme existenci konečné ε-sítě. Nechť $\varepsilon > 0$ a $x_1 \in P$ jsou libovolná. Je-li $\mathscr{B}[x_1, \varepsilon] = P$, je důkaz proveden a $\{x_1\}$ je hledaná ε-síť. Je-li $\mathscr{B}[x_1, \varepsilon] \subset P$, existuje $x_2 \in P$, takové, že $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon$. Pokud $\mathscr{B}[x_1, \varepsilon] \cup \mathscr{B}[x_2, \varepsilon] = P$, je $\{x_1, x_2\}$ hledanou ε-sítí, v opačném případě existuje $x_3 \in P$ takové, že platí $\rho(x_1, x_3) > \varepsilon$, $\rho(x_2, x_3) > \varepsilon$. Pokud by bylo možné v této konstrukci pokračovat do nekonečna, sestrojili bychom posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že pro $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}$, je $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$, a z této posloupnosti nelze vybrat konvergentní podposloupnost.

$\Leftarrow$: Nechť (P, ρ) je úplný a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť. Buď $\{y_n\}$ libovolná posloupnost v P. Existuje bod x_1 z 1-sítě takový, že v $\mathscr{B}[x_1, 1]$ leží nekonečně mnoho členů $\{y_n\}$. Odtud plyne, že uvnitř $\mathscr{B}[x_1, 1]$ existuje bod x_2 $\frac{1}{2}$-sítě takový, že $\mathscr{B}\left[x_2, \frac{1}{2}\right] \subseteq \mathscr{B}[x_1, 1]$ a v $\mathscr{B}[x_2, \frac{1}{2}]$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{y_n\}$. Jako výsledek této konstrukce obdržíme posloupnost množin $A_n = \mathscr{B}\left[x_n, \frac{1}{n}\right]$, která splňuje předpoklady Věty 3.5, tedy existuje $y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ a není obtížné ukázat, že y_0 je limitou jisté vybrané posloupnosti z $\{y_n\}$. $\square$

Příklady 6.15.

i) Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ je ε-sítí v $\mathbb{E}^1$, je-li $\varepsilon > \frac{1}{2}$.

ii) Nechť P je Baireův metrický prostor, viz Příklad 1.2 vii), a nechť $X = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in \{1, 2, \dots, 9\}\}$. Množina $A \subset P$ skládající se z posloupností, které mají na prvních dvou místech všechny možné kombinace cifer $1, 2, \dots, 9$ a na zbylých místech jsou číslice 1, tvoří $\frac{1}{2}$-síť v X.

Definice 6.16. Systém otevřených podmnožin $\mathscr{M}$ v prostoru (P, ρ) se nazývá *otevřené pokrytí* prostoru P, jestliže

$$\bigcup_{M \in \mathscr{M}} M = P.$$

Systém podmnožin $\mathscr{N}$ v prostoru (P, ρ) se nazývá *podpokrytí pokrytí* $\mathscr{M}$, jestliže $\mathscr{N}$ je pokrytí a $N \in \mathscr{N}$ implikuje $N \in \mathscr{M}$.

Následující věta udává nutnou a dostatečnou podmínku pro kompaktnost metrického prostoru a v některých učebnicích je brána za definici kompaktních prostorů. Její důkaz je možno nalézt např. v [8].

Věta 6.17 (Heineho-Borelovo lemma)**.** *Metrický prostor* (P, ρ) *je kompaktní, právě když z každého otevřeného pokrytí* P *lze vybrat konečné podpokrytí, tj. podpokrytí obsahující pouze konečně mnoho množin.*

Jako poslední tvrzení uveďme bez důkazu (ten je možno nalézt např. v [11]) důležité tvrzení, které se týká kompaktnosti množin spojitých funkcí a v literatuře bývá uváděno jako Arzelàova věta. Pomocí této věty lze dokázat, že Cauchyova počáteční úloha (viz odst. V.2) je řešitelná za pouhého předpokladu spojitosti funkce $f(x, y)$. Tedy předpoklad, že funkce f splňuje lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné y, může být vypuštěn, viz např. [12]).

Věta 6.18. *Uzavřená množina* $\mathscr{A}$ *v prostoru* $(C[a, b], \rho_c)$ *je kompaktní, právě když všechny funkce z* $\mathscr{A}$ *jsou stejně ohraničené a stejně spojité, tj. právě když jsou splněny tyto podmínky:*

a) *Existuje konstanta* $K \geq 0$ *taková, že* $|f(x)| \leq K$ *pro každé* $f \in \mathscr{A}$ *a každé* $x \in [a, b]$.

b) *Ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že pro každou* $f \in \mathscr{A}$ *a každé* $x_1, x_2 \in [a, b]$*, pro něž* $|x_1 - x_2| < \delta$*, platí* $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Příklady 6.19.

i) Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ s metrikou indukovanou z $\mathbb{E}^1$ není kompaktní (neboť není ohraničená). Najděte otevřené pokrytí této množiny, ze kterého nelze vybrat konečné podpokrytí.

Řešení. Každá z jednoprvkových množin $\{1\}, \{2\} \dots$ je otevřená v $\mathbb{N}$ a z tohoto otevřeného pokrytí evidentně nelze vybrat konečné podpokrytí. ▲

ii) Dokažte, že množina $A = \left\{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2 : |x_n| \le \frac{1}{n}\right\}$ (tzv. *Hilbertova krychle*) je kompaktní v l_2.

Řešení. Využijeme tvrzení Věty 6.14. Ukážeme, že množina A je uzavřená (pak množina A s metrikou indukovanou z l_2 je úplný metrický prostor — viz Věta 3.3 a Cvičení 3.7 iii)) a že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje v A konečná ε-síť. Nechť $x^m = \{x_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů z A konvergující v metrice prostoru l_2 k posloupnosti $x = \{x_n\}$. Pak $\lim\limits_{m\to\infty} x_n^m = x_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, odtud $|x_n| \le \frac{1}{n}$, tj. $x \in A$ a A je uzavřená podle Věty 2.10. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Protože $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$ — viz např. [5, str. 101], existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Nyní každý z intervalů $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, $n = 1, \dots n_0$ rozdělme na dílky o délce menší než $\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$ a dělicí body včetně krajních bodů $-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}$ označme x_k^n, $n = 1, \dots n_0$. Za body ε-sítě bereme posloupnosti, jejichž členy s indexy $n > n_0$ jsou nulové a na prvních n_0 místech jsou všechny možné kombinace čísel x_k^n takové, že na n-tém místě je vždy některé z čísel x_k^n. Není obtížné ověřit, že takto sestrojená množina je opravdu ε-sítí. ▲

Titulní strana
Obsah
Výsledky cvičení
Rejstřík
Strana 111 z 147
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

Cvičení 6.20.

i) Nechť $\mathscr{A} = \{f \in C[a,b] : |f(x)| \leq 1,\ f$ jsou lipschitzovské s konstantou $L \leq 2\}$. Dokažte, že $\mathscr{A}$ je kompaktní v $(C[a,b], \rho_c)$.

ii) Jestliže existuje $\delta > 0$ a nekonečná množina $A \subseteq P$ taková, že $\rho(x,y) > \delta$ pro každé $x, y \in P,\ x \neq y$, pak metrický prostor (P, ρ) není kompaktní. Dokažte.

iii) Charakterizujte kompaktní množiny v prostorech l_∞ a l_p, $p \geq 1$, tj. udejte nutnou a dostačující podmínku, kdy je množina v daných prostorech kompaktní.

iv) Nechť (P, ρ) je kompaktní metrický prostor. Rozhodněte, zda prostor $U(P)$ s Hausdorffovou metrikou (viz Cvičení 2.22 vii)) je také kompaktní.

*v)** Nechť (P, ρ) je kompaktní metrický prostor a zobrazení $f : P \to P$ splňuje pro každé $x, y \in P$ podmínku $\rho(f(x), f(y)) \geq \rho(x, y)$. Dokažte, že $f(P) = P$ a f je izometrické zobrazení.

VI.5. Závěrečná cvičení

Na závěr této kapitoly zařazujeme několik neřešených příkladů, které by měly sloužit k celkovému procvičení problematiky metrických prostorů.

Cvičení 6.21. Nechť $P = \mathbb{R}$. Definujme metriky

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}, & \text{je-li } x \neq 0,\ y \neq 0,\ x \neq y, \\ \frac{1}{|x|}, & \text{je-li } x \neq 0,\ y = 0, \\ \frac{1}{|y|}, & \text{je-li } y \neq 0,\ x = 0, \\ 0, & \text{je-li } x = y, \end{cases}$$

$$\rho_2(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } x = y, \\ |x| + |y|, & \text{je-li } x \neq y. \end{cases}$$

a) Dokažte, že ρ_1, ρ_2 jsou metriky, a rozhodněte, zda jsou ekvivalentní.
b) Charakterizujte okolí bodů v prostorech (P, ρ_i), $i = 1, 2$.
c) Rozhodněte, zda prostory (P, ρ_i) jsou úplné, resp. souvislé, resp. separabilní.
d) Charakterizujte kompaktní množiny v (P, ρ_i).
e) Charakterizujte spojitá zobrazení $(P, \rho_i) \to \mathbb{E}^1$.

Cvičení 6.22. Nechť $P = \mathbb{N}$ a pro $n, m \in \mathbb{N}$ definujme $\rho_1(n, m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$,

$$\rho_2(n, m) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } n = m, \\ \frac{1}{1+\max\{n,m\}}, & \text{je-li } n \neq m, \end{cases}$$

$$\rho_3(n, m) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } n = m, \\ \frac{1}{1+n+m} & \text{je-li } n \neq m. \end{cases}$$

a) Charakterizujte konvergentní posloupnosti v (P, ρ_i), $i = 1, 2, 3$.
b) Rozhodněte, zda (P, ρ_i) je úplný, resp. separabilní, resp. souvislý.
c) Rozhodněte, zda zobrazení T prostoru (P, ρ_i) do sebe definované předpisem $T(n) = n + 1$ je spojité, resp. lipschitzovské, resp. kontraktivní.
d) Dokažte, že ρ_i, $i = 1, 2, 3$ jsou metriky, a rozhodněte, zda jsou ekvivalentní.

Cvičení 6.23. Nechť $P = \mathbb{R}^2$ a pro $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in \mathbb{R}^2$ definujme metriku

$$\rho([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \begin{cases} |x_1 - x_2|, & \text{je-li } y_1 = y_2, \\ \sqrt{1 + (x_1 - x_2)^2}, & \text{je-li } y_1 \neq y_2. \end{cases}$$

a) Dokažte, že ρ je metrika.
b) Charakterizujte všechny konvergentní posloupnosti v (P, ρ).
c) Rozhodněte, zda (P, ρ) je úplný, resp. separabilní, resp. souvislý.
d) Charakterizujte kompaktní množiny v (P, ρ).

Cvičení 6.24. Nechť $P = [0, 1) \cup \mathbb{N}$ a pro $x, y \in P$ definujme metriku

$$\rho(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{je-li } x, y \in [0, 1] \text{ nebo } x = y, \\ x + y, & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Dokažte, že ρ je metrika.
b) Rozhodněte, zda (P, ρ) je úplný, resp. souvislý, resp. separabilní.
c) Charakterizujte kompaktní a otevřené množiny v (P, ρ).
d) Rozhodněte, zda zobrazení $F\colon P \to P$ definované předpisem

$$F(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2, & \text{je-li } x \in [0, 1], \\ x - 1, & \text{je-li } x \in \{2, 3, \dots\} \end{cases}$$

je spojité, resp. lipschitzovské, resp. kontraktivní. Najděte všechny pevné body tohoto zobrazení.

Cvičení 6.25. Nechť P je množina spojitých funkcí na intervalu $[1, \infty)$, pro $f, g \in P$ definujme metriku

$$\rho(f, g) = \begin{cases} 0, & \text{pro } f = g, \\ \frac{1}{x} & \text{pro } f \neq g, \quad x = \inf\{t \in [1, \infty),\ f(t) \neq g(t)\}. \end{cases}$$

a) Dokažte, že ρ je metrika.
b) Charakterizujte okolí bodů z P.
c) Rozhodněte, zda (P, ρ) je úplný, resp. souvislý, resp. separabilní.
d) Rozhodněte, zda množina $A = \{f \in P : |f(x)| \leq 1, |f'(x)| \leq 1, x \in [1, \infty)\}$ je kompaktní.

Kapitola VII

TOPOLOGICKÉ, NORMOVANÉ A UNITÁRNÍ PROSTORY

Do této kapitoly je zařazena část týkající se nerovností potřebných při důkazu trojúhelníkové nerovnosti v různých příkladech a především jsou zde vysvětleny některé matematické pojmy, jež mají úzkou souvislost s pojmem metrický prostor, a to *topologický prostor*, který je obecnější než metrický prostor (každý metrický prostor je současně topologickým prostorem), a *normovaný lineární prostor*, resp. *unitární prostor*, které jsou speciálnější než metrický prostor (každý unitární prostor je normovaným lineárním prostorem a každý normovaný lineární prostor je metrickým prostorem).

VII.1. Nerovnosti

Jak vyplývá z příkladů odstavce I.1., při důkazu platnosti axiomu (M3) v různých příkladech hraje důležitou roli tzv. *Minkowského*[1] *nerovnost.*

Nejdříve dokážeme jedno pomocné tvrzení.

Lemma 7.1. *Nechť* $\alpha, r, s \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$, $r, s \geq 0$. *Pak platí:*

$$r^\alpha s^{1-\alpha} \leq \alpha r + (1-\alpha)s. \tag{7.1}$$

Důkaz. Předpokládejme, že $r > 0, s > 0$ (v případě, že jedno z čísel r, s je rovno 0, je nerovnost triviálně splněna). Reálná funkce $f(t) = t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1$ má v bodě $t = 1$ absolutní maximum $f(1) = 0$ na množině $(0, \infty)$ (ověřte!). Platí tedy $f(r/s) \leq 0$, což je dokazovaná nerovnost. □

Věta 7.2 (Hölderova nerovnost). *Nechť* $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ *a* $p, q \in (1, \infty)$ *jsou reálná, pro něž* $1/p + 1/q = 1$.[2] *Pak*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{7.2}$$

---

[1] Hermann Minkowski, 1864–1909, německý matematik, přispěl k vybudování matematického aparátu speciální teorie relativity. Byl mj. i učitelem A. Einsteina; známý je jeho výrok asi tohoto obsahu: „Nikdy bych si nemyslel, že teorii relativity vymyslí právě ten Einstein, který se tak ulíval z mých přednášek.“

[2] Taková čísla se nazývají *konjugovaná*.

Důkaz. Vzhledem k absolutním hodnotám v nerovnosti stačí uvažovat případ $x_k, y_k \geq 0$, přičemž je-li $x_k = 0$ nebo $y_k = 0$ pro všechna k, je nerovnost triviálně splněna. Je-li $\sum_{k=1}^{n} x_k \neq 0$ a $\sum_{k=1}^{n} y_k \neq 0$, plyne nerovnost z Lemmatu 7.1 dosazením

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad r = \frac{x_k^p}{\sum_{k=1}^{n} x_k^p}, \quad s = \frac{y_k^q}{\sum_{k=1}^{n} y_k^q}$$

do (7.1) a sečtením obdržených nerovností pro $k = 1, \dots, n$. □

Dosadíme-li $p = 2$, $q = 2$ do (7.2), dostáváme známou *Cauchyovu-Buňakovského nerovnost* mezi absolutní hodnotou skalárního součinu a součinem velikostí vektorů z $\mathbb{E}^n$.

Věta 7.3 (Minkowského nerovnost)**.** *Nechť $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ a $p \geq 1$. Pak platí*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7.3}$$

Důkaz. Pro $p = 1$ je nerovnost (7.3) zřejmá. Pro $p > 1$ předpokládejme, stejně jako v důkazu Hölderovy nerovnosti, že $x_k, y_k \geq 0$ a $\sum_{k=1}^{n} x_k \neq 0 \neq \sum_{k=1}^{n} y_k$. Dosaďme do (7.2) výraz $(x_k + y_k)^{p-1}$ místo x_k, pak tentýž výraz dosaďme do (7.2) místo y_k. Sečtením takto vzniklých nerovností dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^p \leq \Big[\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^p\Big]^{\frac{p-1}{p}}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big].$$

Vydělením poslední nerovnosti výrazem

$$\Big[\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^p\Big]^{\frac{p-1}{p}}$$

dostáváme dokazovanou nerovnost. □

7.4. Minkowského nerovnost pro nekonečné součty

Nechť $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ jsou posloupnosti reálných čísel takové, že nekonečné řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^p$, $p \geq 1$ konvergují. Limitním přechodem v (7.3) pro $n \to \infty$ dostáváme Minkowského nerovnost pro nekonečné součty

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

7.5. Minkowského nerovnost v integrálním tvaru

Jsou-li $f(x)$, $g(x)$ spojité funkce na intervalu $[a, b]$, aplikací Minkowského nerovnosti na integrální součty příslušející integrálům $\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \,\mathrm{d}x$, $\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x$, $\int_a^b |g(x)|^p \,\mathrm{d}x$ dostáváme Minkowského nerovnost v integrálním tvaru

$$\Big(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_a^b |g(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

VII.2. Topologický prostor

V předchozích kapitolách jsme často používali pojmy jako okolí bodu, otevřená, uzavřená, kompaktní množina apod., aniž bychom věnovali větší pozornost metrice, pomocí které byly tyto pojmy definovány. Často se můžeme v matematice setkat s objekty, mezi nimiž je obtížné definovat vzdálenost ve smyslu Definice 1.1, přesto však můžeme mluvit o jejich okolí nebo o tom, že tvoří otevřenou (uzavřenou) množinu apod. Má tedy smysl axiomaticky zavést obecnější pojem, než je metrický prostor, a to tzv. *topologický prostor*. Zde si uvedeme dva možné přístupy — první je založen na axiomatické definici otevřených množin, druhý má za základ axiomatizaci uzavřených množin.

Definice 7.6. Nechť $T \neq \emptyset$ a $\mathfrak{T}$ je systém podmnožin množiny T, který splňuje následující tři podmínky:

(T1) $\emptyset, T \in \mathfrak{T}$.

(T2) Průnik libovolného konečného systému množin z $\mathfrak{T}$ je prvek systému $\mathfrak{T}$.

(T3) Sjednocení libovolného systému množin z $\mathfrak{T}$ je prvek $\mathfrak{T}$.

Systém množin $\mathfrak{T}$ se nazývá *topologie* na T, množiny z $\mathfrak{T}$ se nazývají *otevřené* a dvojice $(T, \mathfrak{T})$ se nazývá *topologický prostor*.

Poznámky 7.7.

i) Na neprázdné množině lze samozřejmě definovat různé topologie, jsou jimi např. $\mathfrak{T}_1 = \{\emptyset, T\}$, $\mathfrak{T}_2 = \mathscr{P}(T)$ — systém všech podmnožin množiny T.

ii) Každý metrický prostor je topologický prostor, neboť podle Příkladu 2.16 iv) a Věty 2.20 systém všech otevřených množin v metrickém prostoru splňuje axiomy (T1)–(T3). Opačné tvrzení neplatí; je-li na množině T, která je alespoň dvouprvková, dán systém podmnožin $\mathfrak{T}$ splňující axiomy (T1)–(T3), nelze obecně definovat metriku tak, že $\mathfrak{T}$ jsou právě všechny otevřené množiny v této metrice (např. pro $\mathfrak{T} = \{\emptyset, T\}$). Hledání dodatečných podmínek, za kterých je systém podmnožin množiny T splňující axiomy (T1)–(T3) totožný se systémem otevřených množin při jisté metrice na T, je jedním z problémů (tzv. problém *metrizovatelnosti* topologického prostoru) studovaných v matematické disciplíně zvané *topologie*, s jejímiž základy se čtenář může seznámit např. v monografii [2].

Pojmy okolí bodu, uzávěr a uzavřená množina jsou v topologickém prostoru definovány takto:

Definice 7.8. Nechť $(T, \mathfrak{T})$ je topologický prostor, $x \in T$. *Okolím bodu* x rozumíme každou množinu $U \in \mathfrak{T}$, pro niž $x \in U$. Bod $x \in T$ se nazývá *bodem uzávěru* množiny $A \subseteq T$, jestliže pro každé okolí U bodu x platí $U \cap A \neq \emptyset$. Množina $\overline{A}$ všech bodů uzávěru množiny A se nazývá *uzávěr* množiny A.

Lze ukázat, že takto definovaný uzávěr množiny v topologickém prostoru má všechny vlastnosti (U1)–(U6) z Věty 2.9.

Jinou, ekvivalentní možností jak definovat topologický prostor je konstrukce pomocí uzávěrové operace a uzavřených množin.

Definice 7.9. Nechť $T \neq \emptyset$, $u\colon \mathscr{P}(T) \to \mathscr{P}(T)$ (zobrazení systému podmnožin množiny T do sebe), splňující pro všechna $A, B \in \mathscr{P}(T)$ následující podmínky (tzv. *Kuratowského axiomy*):

(Ũ1) $u(\emptyset) = \emptyset$;
(Ũ2) $A \subseteq u(A)$;
(Ũ3) $u(A \cup B) = u(A) \cup u(B)$;
(Ũ4) $u(u(A)) = u(A)$.

Množina $A \subseteq T$ se nazývá *uzavřená*, jestliže $u(A) = A$. Dvojice (T, u) se nazývá *topologický prostor*.

Při této definici se množina $A \subseteq T$ nazývá *otevřená*, jestliže množina $T \setminus A$ je uzavřená.

Příklad 7.10. Nechť $T \neq \emptyset$ a $(T, \mathfrak{T}_2)$ je topologický prostor z Poznámky 7.7 i) a definujme $u\colon \mathscr{P}(T) \to \mathscr{P}(T)$ předpisem $u(A) = A$ pro každou $A \subseteq T$. Pak není obtížné ověřit, že $(T, \mathfrak{T}_2)$ a (T, u) jsou totožné topologické prostory v tom smyslu, že systémy otevřených množin v $(T, \mathfrak{T}_2)$ a (T, u) jsou totožné.

Cvičení 7.11. Nechť $(T, \mathfrak{T}_1)$ je topologický prostor z části i) Poznámky 7.7. Určete $u\colon \mathscr{P}(T) \to \mathscr{P}(T)$ tak, aby $(T, \mathfrak{T}_1)$ a (T, u) byly totožné topologické prostory.

VII.3. Normované lineární prostory

Definice 7.12. Nechť $\mathbb{V}$ je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel a nechť zobrazení $p\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{V}$ a všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ následující podmínky:

(N1) $p(x) \geq 0$, přičemž $p(x) = 0$ právě když $x = 0$;
(N2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
(N3) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Zobrazení $p(x)$ se nazývá *norma* na $\mathbb{V}$ a obvykle se značí $\|x\|$ místo $p(x)$. Vektorový prostor, na kterém je definována norma, se nazývá *normovaný vektorový prostor* nebo také *normovaný lineární prostor*.

Jsou-li x, y prvky normovaného lineárního prostoru $\mathbb{V}$ a definujeme-li

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \tag{7.4}$$

je na $\mathbb{V}$ definována metrika, tedy každý normovaný lineární prostor je metrickým prostorem. Je-li normovaný lineární prostor v metrice definované vztahem (7.4) úplným prostorem, nazývá se *Banachův* prostor.

Příklady 7.13.

i) Prostor $\mathbb{R}^n$ s normou $\|x\| = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{1/2}$ je normovaný lineární prostor.

ii) Prostor spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ s normou definovanou vztahem

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

je normovaný lineární prostor. (Sčítání funkcí a násobení skalárem je definováno takto: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.)

iii) Prostor l_2 s normou $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{1/2}$ je normovaný lineární prostor. (Jsou-li $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, definujeme $x+y = \{x_k+y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha x = \{\alpha x_k\}_{k=1}^{\infty}$.)

Cvičení 7.14.

i) Dokažte, že množina $n \times n$ matic se sčítáním matic a násobením matic reálným číslem definovaným obvyklým způsobem tvoří normovaný lineární prostor při každé z následujících definic normy na množině čtvercových matic (srovnejte s výsledkem Cvičení 5.8 iv)):

$$\|A\|_1 = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_n(A^T A)}, \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

kde $\lambda_n(.)$ značí největší vlastní číslo matice v závorce a A^T je matice transponovaná k matici A.

ii) Rozhodněte, který z předchozích normovaných lineárních prostorů je Banachův prostor.

iii) Rozhodněte, zda prostor c tvořený všemi konvergentními posloupnostmi $\{x_n\}$ s normou prostoru ℓ_∞ je Banachův prostor (srovnejte s výsledkem Cvičení 2.22 xi)).

VII.4. Unitární prostory

Definice 7.15. Nechť $\mathbb{V}$ je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel a nechť zobrazení $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ splňuje pro všechna $x, y, z \in \mathbb{V}$ a všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ následující podmínky:

(S1) $\langle x, x \rangle \geq 0$, přičemž $\langle x, x \rangle = 0$ právě když $x = 0$;
(S2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
(S3) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

Pak se toto zobrazení nazývá *skalární součin* a prostor, na kterém je definován skalární součin, se nazývá *unitární prostor*.

Souvislost unitárních prostorů s normovanými, a tedy i metrickými prostory udává následující tvrzení.

Věta 7.16. *Nechť* $\mathbb{V}$ *je unitární prostor a nechť zobrazení* $\|\,.\,\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *je definované předpisem*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{7.5}$$

Pak:

a) *platí tzv. Cauchyova nerovnost*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \textit{pro všechna } x, y \in \mathbb{V};$$

b) $\|\,.\,\|$ *je norma na* $\mathbb{V}$*;*

c) *tato norma splňuje pro všechna* $x, y \in \mathbb{V}$ *tzv. rovnoběžníkové pravidlo*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{7.6}$$

Důkaz.

a) Podle (S1) je pro každé reálné t kvadratická funkce $f(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle \geq$ ≥ 0. To znamená, že její diskriminant $D = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$, což je Cauchyova nerovnost.

b) Platnost podmínek (N1) a (N3) plyne bezprostředně z (S1) a (S3). Platnost podmínky (N2) dokážeme z (S2) a Cauchyovy nerovnosti:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

c) Dokáže se přímým výpočtem po dosazení vztahu (7.5). □

V souvislosti s předchozím odstavcem vyvstává otázka, kdy je norma v normovaném lineárním prostoru vytvořena nějakým skalárním součinem pomocí vztahu (7.5). Odpověď dává následující tvrzení (důkaz [13, str. 68], [18, str. 64]).

Věta 7.17. *Norma v normovaném lineárním prostoru je vytvořena skalárním součinem pomocí vztahu* (7.5)*, právě když splňuje rovnoběžníkové pravidlo* (7.6)*. Tento skalární součin je určen vztahem*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right].$$

Příklady 7.18.

i) Prostor $\mathbb{R}^n$ s „obvyklým“ skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ je unitární prostor, norma z Příkladu 7.13 i) je vytvořena tímto skalárním součinem.

ii) Na prostoru spojitých funkcí $C[a, b]$ splňuje

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

všechny tři podmínky (S1)–(S3). Metrika na $C[a, b]$ definovaná tímto skalárním součinem je

$$\rho(f, g) = \|f-g\| = \left(\int_a^b [f(t)-g(t)]^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

a nazývá se *metrikou konvergence v průměru*. Prostor $C[a, b]$ s touto metrikou není úplný, jeho zúplněním dostaneme prostor označovaný $L^2[a, b]$ (tzv. *Lebesgueův*[1] *prostor funkcí integrovatelných v kvadrátu*). Tento prostor hraje významnou roli mimo jiné v teorii Fourierových[2] řad.

iii) Prostor l_2 je unitární prostor se skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Tento skalární součin vytváří normu z Příkladu 7.13 iii).

Na závěr tohoto odstavce připomeňme ještě jeden významný matematický pojem.

Definice 7.19. Úplný unitární prostor se nazývá *Hilbertův prostor*[3]. Úplnost se zde rozumí jako úplnost normovaného prostoru s normou definovanou vztahem (7.5).

Poznámka 7.20. Je-li Hilbertův prostor H navíc separabilní, platí tvrzení, která jsou přirozeným zobecněním známých vět z teorie euklidovských prostorů. Zejména platí tato tvrzení:

[1] Henri Leon Lebesgue, 1875–1941, francouzský matematik, zabýval se především teorií míry a integrálu.

[2] Fourier Jean-Baptiste Joseph, 1786–1830, francouzský matematik, zabýval se matematickou fyzikou.

[3] David Hilbert, 1862–1943, německý matematik, který pracoval téměř ve všech oblastech matematiky, na světovém matematickém kongresu v Paříži v r. 1901 ve svém vystoupení formuloval 23 strategických matematických problémů (dnes známých jako *Hilbertovy problémy*), které měly zásadní vliv na rozvoj matematiky ve 20. století.

a) Existuje posloupnost ortonormálních prvků $u_k \in H$, tj.

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j, \end{cases}$$

s vlastností, že ke každému $x \in H$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \right\| < \varepsilon.$$

Posloupnost u_k s touto vlastností se nazývá *ortonormální báze* prostoru H a pro čísla α_k platí $a_k = \langle x, u_k \rangle$ (čísla a_k se nazývají *Fourierovými koeficienty* prvku x v bázi u_k).

b) Pro ortonormální bázi v H platí tzv. *Parsevalova rovnost*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, u_k \rangle^2 = \|x\|^2.$$

c) Každý separabilní Hilbertův prostor H je izometrický s prostorem l_2. Izometrické zobrazení $F\colon H \to l_2$ je definované předpisem

$$x \xmapsto{F} \{\langle x, u_1 \rangle, \langle x, u_2 \rangle, \dots\}.$$

Cvičení 7.21.

i) Rozhodněte, zda následující normy na daných prostorech jsou vytvořeny skalárním součinem:

a) Norma z Příkladu 7.13 ii) na prostoru $C[a, b]$.

b) Norma $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ na prostoru l_1.

c) Norma $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k|$ na $\mathbb{R}^n$.

ii) Ukažte, že

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)]\,\mathrm{d}t$$

je skalární součin na $C^1[a, b]$, tj. na množině funkcí mající spojitou derivaci. Rozhodněte, zda $C^1[a, b]$ s tímto skalárním součinem je Hilbertův prostor.

iii) Ukažte, že posloupnost

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}$$

tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2[-\pi, \pi]$ (viz Příklad 7.18 ii)). Odvoďte Fourierovy koeficienty funkce $f \in L^2[-\pi, \pi]$ v této bázi.

Ke svým přáním dostáváš současně sílu uskutečnit je. Musíš však pro to něco udělat.

NÁVODY A VÝSLEDKY CVIČENÍ

1.4

i) $\rho_1(A,B)=2,\ \rho_2(A,B)=\sqrt{2},\ \rho_\infty(A,B)=1.$

ii) $\mathscr{K}_1$ je čtverec s vrcholy v bodech $[1,0]$, $[0,1]$, $[-1,0]$, $[0,-1]$, $\mathscr{K}_2$ — kružnice se středem v počátku a poloměrem 1, $\mathscr{K}_\infty$ — čtverec s vrcholy v bodech $[1,1]$, $[-1,1]$, $[-1,1]$, $[-1,-1]$.

iii) a) $\rho_c(x,\sqrt{x})=1/4,\ \rho_I(x,\sqrt{x})=1/6,$

b) $\rho_c(x,\ln x)=\mathrm{e}-1,\ \rho_I(x,\ln x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-3).$

iv) a), b), c) jsou metriky — využijte Příkladu 1.2 ix).

v) Pro $A=[a_1,a_2,a_3],\ B=[b_1,b_2,b_3]$ je $\rho(A,B)=\arccos(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$.

vi) Jsou-li $A=[a_1,a_2,a_2],\ B=[b_1,b_2,b_3]\in P$, $\rho(A,B)=\sqrt{\left(\frac{a_1}{1-a_3}-\frac{b_1}{1-b_3}\right)^2+\left(\frac{a_2}{1-a_3}-\frac{b_2}{1-b_3}\right)^2}$.[1]

[1] Další podrobnosti týkající se stereografické projekce je možno nalézt např. ve skriptu M. Ráb: Komplexní čísla a jejich užití v elementární matematice, Brno 1990.

vii) a) K důkazu trojúhelníkové nerovnosti proveďte diskusi podle polohy bodů $A, B, C \in \mathbb{R}^2$.

b) Je-li $[a, b] = [0, 0]$, pak $\mathscr{K}([a, b]; r) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$. Je-li $[a, b] \neq [0, 0]$, je $\mathscr{K}([a, b]; r)$=$\{[x, y] : xb = ay,\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ pro $r \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ a $\mathscr{K}([a, b]; r) = \{[x, y] : xb = ya,\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\} \cup \left\{[x, y] : xb \neq ya,\ x^2 + y^2 = \left(r - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2\right\}$ pro $r > \sqrt{a^2 + b^2}$.

viii) a) Využijte Minkowského nerovnosti pro nekonečné součty (odst. 7.4).

b) l_∞: $\rho(0, \{x_n\}) = 1/2$, l_p: $\rho(0, \{x_n\}) = (\frac{1}{2^p - 1})^{1/p}$.

ix) a) $\rho(11{,}5) = 1$, $\rho(16{,}6) = 1/5$, $\rho(60{,}10) = 1/25$.

b) $n = 10 + 7^3 k$, k je celé číslo.

x) Načrtněte si v rovině trojúhelník s vrcholy a, b, c a metriku konstruujte jako ohodnocený orientovaný graf s těmito vrcholy.

1.10

i) $\rho(A, k) = 12 - 5\sqrt{2}$, $\rho(B, k) = 2$.

ii) $d(A) = 1/2$.

iii) Je-li $X = [x_1, x_2, x_3]$, je $\rho(X, A) = \arccos \sqrt{1 - x_3^2}$.

1.13

i) Rovnost $\rho_c(F(f), F(g)) = \rho_c(f, g)$ plyne ze symetrie intervalu $[-1, 1]$ vzhledem k počátku. Izometrie v ρ_I plyne z platnosti vztahu $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(-x)\,\mathrm{d}x$.

ii) F je izometrické.

iii) $k = \pm 3$, plyne ze substituční metody pro určité integrály.

2.4

i) Obě reálné posloupnosti jsou cauchyovské a podle Cauchyova-Bolzanova kritéria z diferenciálního počtu jsou také konvergentní.

ii) $x_n = \{x_k^n\}_{k=1}^\infty$ je konvergentní v Baireově prostoru, právě když každá z posloupností $\{x_k^n\}_{n=1}^\infty$, $k = 1, 2, \dots$ je skorostacionární.

2.22

i) $\overline{A} = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{4\}$, $A^o = (0, 1) \cup (2, 3)$, $h(A) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

ii) $\overline{A} = [0, 1]$, $A^o = \emptyset$, $h(A) = [0, 1]$.

iv) Podle Věty 2.10 je množina $P \setminus A$ uzavřená v (P, ρ_1), právě když je uzavřená v prostoru (P, ρ_2), odtud plyne tvrzení.

v) a) – c) plyne téměř okamžitě z definice a Věty 2.10.

vi) Metriky jsou navzájem ekvivalentní. Je-li $R_m(x) = a_n^m x^n + \dots + a_0^m$ posloupnost polynomů, $R_m(x) \to R(x) = a_n^0 x^n + \dots + a_0^0$ v metrice ρ, právě když $\lim\limits_{m\to\infty} |a_k^m - a_k^0| = 0$, $k = 0, \dots, n$.

vii) Důkaz viz [13, str. 25].

viii) $A_n \to A = \{X \in \mathbb{E}^2 : \rho_2(X, S) \leq r\}$, právě když $S_n \to S$ v $\mathbb{E}^2$ a $r_n \to r$ v $\mathbb{E}^1$.

ix) Tvrzení neplatí. Uvažujte posloupnost intervalů $\{A_n\}$ v $\mathbb{E}^1$ definovanou takto: $A_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ pro n sudé a $A_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ pro n liché.

x) Platí $\overline{A} = B$. Nechť $c = \frac{a+b}{2}$ a $f_n(t) = \frac{2}{n(b-a)}(t - a)$, $t \in [a, c]$, $f_n(t) = \frac{2}{n(b-a)}(b - t)$, pro $t \in [c, b]$. Pak pro libovolnou $x(t) \in B$ je $x(t) + f_n(t) \in A$ a $\rho_c(x + f_n, x) \to 0$.

xi) A je uzavřená v l_∞. Nechť $x^n = \{x_1^n, x_2^n, \dots\} \in A$ a $x^n \to \bar{x} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots\}$ v l_∞. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} |x_k^n - \bar{x}_k| = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Limitní posloupnost $\bar{x}$ je cauchyovská (a tedy podle Cauchyova-Bolzanova kritéria konvergentní, tj. $\bar{x} \in A$), neboť $|\bar{x}_k - \bar{x}_l| \le |\bar{x}_k - x_k^n| + |x_k^n - x_l^n| + |x_l^n - \bar{x}_l|$ a každý z posledních sčítanců je menší než $\varepsilon/3$, jsou-li k, l, n dostatečně velká.

xii) a), b) Platí $\overline{A} = \mathbb{R}$.

xiii) Metriky jsou ekvivalentní. Posloupnost $x^n = \{x_1^n, x_2^n, \dots\}$ konverguje k $\bar{x} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots\}$ v metrikách ρ_i, $i = 1, 2$, právě když $\lim\limits_{n\to\infty} |x_k^n - \bar{x}_k| = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

xiv) a) Využijte Vět 2.10 a 2.19.

b) Tvrzení neplatí, v diskrétním metrickém prostoru, kde P je alespoň dvouprvková, je $\overline{\mathscr{O}_1(a)} = \mathscr{O}_1(a) = \{a\} \ne \mathscr{B}[a; 1] = P$. c) $\mathscr{B}[[0, 0, 0]; 1]$ je krychle s vrcholy v bodech $[\pm 1, \pm 1, \pm 1]$.

3.7

i) Prostor je úplný, neboť konvergentní a cauchyovské jsou pouze skorostacionární posloupnosti.

ii) Prostor je úplný. Vyšetřete zvlášť cauchyovské posloupnosti ležící v okolí počátku a cauchyovské posloupnosti ležící v okolí bodu $[x, y] \ne [0, 0]$.

iii) Je-li $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ cauchyovská v l_2, pak každá z reálných posloupností $\{x_k^n\}_{n=1}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$ je cauchyovská, tedy i konvergentní, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^n = \bar{x}_k$. Není obtížné ukázat, že $x^n \to \bar{x} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots\}$ v l_2.

iv) Prostor l_∞ je úplný, k důkazu použijte stejné konstrukce jako v předchozím příkladu.

v) Označme ρ metriku v l_2. Je-li $\tilde{\alpha} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n > 0$, je pro $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\rho(x, y) \ge \rho_\alpha(x, y) \ge \tilde{\alpha}\rho(x, y)$. Odtud lze snadno s využitím příkladu iii) dokázat, že l_2 s metrikou ρ_α je úplný.

Je-li $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = 0$, existuje vybraná podposloupnost $\{\alpha_{n_k}\}$ taková, že $\alpha_{n_k} \to 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{n_k}^2$ konverguje. Definujme posloupnost posloupností $x^m = \{x_l^m\}_{l=1}^{\infty}$, kde $x_l^m = 1$ pro $l = n_1, n_2, \ldots, n_m$ a $x_l^m = 0$ pro ostatní l. Tato posloupnost je cauchyovská v l_2 s metrikou ρ_α, ale její limita $\bar{x} = \{\bar{x}_l\}_{l=1}^{\infty}$, kde $\bar{x}_l = 1$ pro $l = n_1, n_2, n_3, \ldots$ a $\bar{x}_l = 0$ pro ostatní l, není prvkem prostoru l_2.

3.12

i) Platnost podmínek 2) a 3) je triviální a 1) plyne z Věty 3.3.

ii) (l_∞, ρ_α) není úplným obalem (l_2, ρ_α), neboť (l_∞, ρ_α) není úplný prostor. Posloupnost posloupností $x_n = \{1, 2, \ldots, n, 0, 0, \ldots\}$ je cauchyovská (neboť řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k/2^k$ je konvergentní, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{\infty} k/2^k = 0$) a její limita v metrice ρ_α $x = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ není prvkem l_∞.

3.18

i) Je-li $\rho(A, B) = 0$, existuje $x_n \in B$ taková, že $\rho(x_n, A) \to 0$, a vzhledem ke kompaktnosti B lze předpokládat, že $x_n \to x_0 \in B$. Pak $\rho(x_0, A) = 0$, tj. $x_0 \in \overline{A} = A$, a tedy $x_0 \in A \cap B$ — spor.

iii) Tvrzení neplatí. Jednotková kružnice z $\mathbb{E}^2$ je v pampeliškovém prostoru uzavřená a ohraničená, ale pro každé dva různé body A, B na této kružnici platí $\rho(A, B) = 2$, tedy z žádné posloupnosti bodů na kružnici nelze vybrat konvergentní podposloupnost.

iv) Viz Věta 6.14.

v) Množina je kompaktní. Sloupce ortogonální matice jsou tvořeny jednotkovými vektory; je-li $\{A_n\}$ posloupnost ortogonálních matic, konvergentní podposloupnost najděte podobným způsobem jako v Příkladu 3.15 ii).

vi) P je kompaktní. Výsledek plyne ze skutečnosti, že množina koeficientů je ohraničená a uzavřená v $\mathbb{E}^{n+1}$.

4.4

i) Každé zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazení $(\mathbb{R}, \rho_d) \to \mathbb{E}^1$.

ii) F i G jsou spojitá.

iii) $\Rightarrow$: Přímo z definice spojitosti; $\Leftarrow$: je-li $x_n \to x_0$, položte $A = \{x_1, x_2, \dots\}$.

iv) Tvrzení platí i pro uzavřené množiny, viz [8, str. 29].

v) Uvažujte funkci $f(x) = \frac{\rho(x,B)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}$.

vi) F je spojité. Je-li $x_n \to x_0$, pak

$$|F(x_n) - F(x_0)| = |\rho(x_n, f(x_n)) - \rho(x_0, f(x_0))| \le$$
$$\le |\rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, f(x_0)) + \rho(f(x_0), f(x_n)) - \rho(x_0, f(x_0))| \to 0.$$

vii) Jsou-li $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^\infty$, $y = \{y_k\}_{k=1}^\infty$, pak $\rho_1(F(x^n), F(y)) = \sum_{k=1}^\infty |(x_k^n)^2 - - y_k^2| = \sum_{k=1}^\infty |x_k^n - y_k|.|x_k^n + y_k| \le \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^n - y_k|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^n + y_k|^2\right)^{1/2} = = \rho_2(x^n, y)\cdot\rho(x^n, \bar{y})$, kde $\bar{y} = \{-y_k\}_{k=1}^\infty$. Protože $\{\rho(x_n, y)\}$ je konvergentní (konverguje k $\rho(y, \bar{y})$), je ohraničená, tj. $\rho_1(F(x^n), F(y)) \le K\rho_2(x^n, y)$. Odtud plyne spojitost F jako ve Větě 4.6.

viii) Není, stačí uvážit posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

4.9

i) a) f je lipschitzovské ($L = 1$), není kontrakce,

b) f je lipschitzovské pro každé $a \in \mathbb{R}$, kontrakce pro $|a| < 1$,

c) f není lipschitzovské.

ii) F je kontrakce s $L = 1/2$.

iii) f je lipschitzovské s $L = 1$, není kontrakce.

iv) Jsou-li $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\} \in l_\infty$, platí $\rho_1(F(x), F(y)) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}|x_n - y_n| \leq$

$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\right) \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| = \frac{1}{2}\rho_\infty(x, y)$, tedy F je kontrakce.

4.12

i) Vyšetřete spojité zobrazení $F\colon P \times P \to \mathbb{R}$ definované předpisem $F(x, y) =$
$= \rho(x, y)$.

ii) Tvrzení lze přímo dokázat z definic kompaktnosti a spojitosti.

5.6

i) Osová souměrnost — každý bod osy souměrnosti, středová souměrnost — střed souměrnosti, posunutí s nenulovým vektorem posunutí — žádný pevný bod, kruhová inverze — body kružnice.

ii) a) Je-li $a \neq 1$, $x = \frac{b}{1-a}$, je-li $a = 1$, $b \neq 0$ — žádný pevný bod, je-li $a = 1$, $b = 0$, každé $x \in \mathbb{R}$ je pevný bod. Předpoklady Banachovy věty splněny pro $|a| < 1$.

b) Je-li $c \in (0, 1]$, je pevný bod $x = 1$, je-li $c > 1$ — žádný pevný bod. Předpoklady Banachovy věty nejsou splněny.

c) Pevné body $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ pro $c = 0$, pro $c > 1$ — žádný pevný bod, předpoklady Banachovy věty nejsou splněny.

d) Žádný pevný bod pro každé $c \in \mathbb{R}$, předpoklady Banachovy věty nejsou splněny.

iii) a) Předpoklady jsou splněny pro $x \in \mathbb{R}$, pevný bod je $x = 2$. Je-li $x_1 = 1$, pak $x_2 = 3/2,\ x_3 = 7/4, \dots, x_n = 2 - 1/2^n$.

b) Předpoklady splněny pro $|x| < 3/2$, pevný bod v tomto intervalu $x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \doteq -0{,}302775637$. Je-li $x_1 = 1/2$, je $x_2 = -1/4,\ x_3 = -5/16 = -0{,}3125, \dots, x_{10} \doteq -0{,}302775503$.

iv) b) $x_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

5.8

i) $y = \exp\frac{x}{2}$; je-li $y_1 = 1$, pak $y_2 = 1 + \frac{x}{2}$ a $y_n(x) = T_n(x)$, kde $T_n(x)$ je Taylorův mnohočlen n-tého stupně funkce $\exp\frac{x}{2}$ se středem $x_0 = 0$.

ii) $y = -\operatorname{tg} x$, porovnejte Taylorovy mnohočleny stupně $2^n - 1$ se středem $x_0 = 0$ funkce $-\operatorname{tg} x$ s postupnými aproximacemi $y_n(x)$, je-li $y_1 = 0$.

iii) Zobrazení $[x, y, z] \to \left[\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z - 1,\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{4}z + 2,\ \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z - 2\right]$ je kontrakce ($L = 0{,}8$; dosaďte do (5.8)).

iv) Pro $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ je zobrazení kontrakce v ρ_1, je-li $\max\{|a_{11}| + |a_{21}|,\ |a_{21}| + |a_{22}|\} < 1$, a v metrice ρ_∞, je-li $\max\{|a_{11}| + |a_{12}|,\ |a_{21}| + |a_{22}|\} < 1$.

6.4

i) Je-li $\emptyset \neq A \subset P$ obojetná, pak $P = A \cup (P \setminus A)$ je sjednocení neprázdných uzavřených disjunktních množin.

ii) Je-li $A \cap B = \emptyset,\ A \cup B = P$, platí $P = (P \setminus A) \cup (P \setminus B)$.

iii) Důkaz viz [1, str. 216].

iv) Tvrzení plyne z faktu, že daná množina je uzavřená v (P, ρ_1), právě když je uzavřená v (P, ρ_2).

v) Množina $A \times B \subseteq P \times Q$ je uzavřená, právě když A je uzavřená v P a B je uzavřená v Q.

6.8

i) Není separabilní, pomocí Věty 6.6 vyšetřete jednotkovou kružnici v $\mathbb{E}^2$.

ii) Není separabilní, pomocí Věty 6.6 vyšetřete nespočetnou množinu iracionálních čísel.

iii) (P, ρ_d) je separabilní, právě když P je nejvýše spočetná.

iv) Prostor je separabilní. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Uvažujme nejvýše spočetnou množinu A tvořenou všemi posloupnostmi, jejichž členy s indexy $n > \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ jsou nulové ($\lfloor\ \rfloor$ značí celou část z daného čísla).

6.12

i), ii) Tvrzení plynou přímo z definice.

iii) Uvažujte P s novou metrikou $\sigma(x, y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$. K důkazu, že toto je opravdu metrika, využijte výsledku Cvičení 1.4 iv) b).

iv) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(2x - 1)$ je homeomorfismus intervalu $(0, 1)$ na $\mathbb{R}$.

v) Je-li $A \subset P$ uzavřená, pak je kompaktní, odtud $f(A)$ je kompaktní, tedy uzavřená v Q, a spojitost zobrazení f^{-1} plyne z Věty 6.10.

6.20

i) Jsou-li funkce z $\mathscr{A}$ lipschitzovské se stejnou konstantou, pak je systém funkcí $\mathscr{A}$ stejně spojitý a tvrzení plyne z Věty 6.18.

ii) Důkaz je obdobný jako důkaz Věty 6.6.

iii) $A \subseteq l_\infty$ je kompaktní, právě když existuje $\{y_n\} \to 0$ taková, že množina $A = \{x = \{x_n\} \in l_\infty : |x_n| \leq |y_n|\}$. $A \subseteq l_p$ je kompaktní, právě když existuje $\{y_n\} \in l_p$ taková, že $A = \{x = \{x_n\} \in l_p : |x_n| \leq |y_n|\}$.
iv) Tvrzení platí, viz např. [2, str. 120].

6.21

a) Nejsou ekvivalentní.
b) ρ_1: Je-li $x = 0$. $\mathscr{O}_\varepsilon(x) = (-\infty, -1/\varepsilon) \cup (1/\varepsilon, \infty)$, je-li $x \neq 0$, $\mathscr{O}_\varepsilon(x) = \left(-\infty, -\frac{|x|}{\varepsilon|x|-1}\right) \cup \left(\frac{|x|}{\varepsilon|x|-1}, \infty\right)$ pro $\varepsilon > \frac{1}{|x|}$ a $\mathscr{O}_\varepsilon(x) = \{x\}$ pro $\varepsilon \leq \frac{1}{|x|}$.
ρ_2: Je-li $x = 0$, $\mathscr{O}_\varepsilon(x) = (-\varepsilon, \varepsilon)$, je-li $x \neq 0$, $\mathscr{O}_\varepsilon(x) = \{x\}$ pro $\varepsilon \leq |x|$ a $\mathscr{O}_\varepsilon(x) = (|x| - \varepsilon, \varepsilon - |x|)$ pro $\varepsilon > |x|$.
c) ρ_1, ρ_2: Prostor je úplný, není souvislý ani separabilní.
d) $A \subseteq P$ je kompaktní, právě když:
ρ_1: A je konečná nebo $A = \{x_n \in \mathbb{R} : x_n \to \infty \text{ v } \mathbb{E}^1\}$,
ρ_2: A je konečná nebo $A = \{x_n \in \mathbb{R} : x_n \to 0 \text{ v } \mathbb{E}^1\}$.
e) ρ_1: f je spojité, právě když $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(0)$,
ρ_2: f je spojité, právě když $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

6.22

a) $\rho_{1,2,3}$: Pouze skorostacionární posloupnosti jsou konvergentní.
b) $\rho_{1,2,3}$: Prostor je separabilní, není úplný ($x_n = n$ je cauchyovská) ani souvislý (každá podmnožina je obojetná).
c) Je spojité ve všech metrikách, je lipschitzovské ($L = 1$), není kontrakce.
d) Metriky jsou navzájem ekvivalentní.

6.23

b) $[x_n, y_n] \to [x_0, y_0]$, právě když $y_n = y_0$ pro velká n a $x_n \to x_0$ v $\mathbb{E}^1$.

c) Prostor je úplný, není souvislý ($A = \{[x, y] : x = 0,\ y \in [0, 1]\}$ je obojetná) ani separabilní (vyšetřete množinu A pomocí Věty 6.6).

d) Je-li $A \subseteq P$, označme $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}$ takové, že $[x, y] \in A\}$, $A_2 = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}$ takové, že $[x, y] \in A\}$. Množina $A \subseteq P$ je kompaktní $\iff A_1$ je kompaktní v $\mathbb{E}^1$ a A_2 je konečná.

6.24

b) Prostor je úplný a separabilní, není souvislý ($[0, 1]$ a $\{2, 3, \dots\}$ jsou uzavřené množiny).

c) $A \subset P$ je kompaktní, právě když existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí $A \subseteq [0, 1] \cup \{2, 3, \dots, n_0\}$.

d) Zobrazení je spojité, lipschitzovské ($L = 1$), není kontrakce, $x = 0$ je jediný pevný bod.

6.25

b) $\mathscr{O}_\varepsilon(f) = P$, je-li $\varepsilon \geq 1$ a $\mathscr{O}_\varepsilon(f) = \left\{g \in P : g(x) = f(x),\ x \in \left[1, \frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$ pro $\varepsilon < 1$.

c) Prostor je úplný (vyšetřete konvergentní a cauchyovské posloupnosti), není souvislý (vyšetřete $A = \{f : |f(x)| < 1,\ x \in [1, \infty)\}$ a její komplement) ani separabilní (pomocí Věty 6.6 vyšetřete množinu konstantních funkcí).

d) Není kompaktní, z posloupnosti $f_n = \frac{1}{n}$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost.

7.11

i) $u(A) = T$ pro každou $A \in \mathscr{P}(T)$.

7.14

i) Viz [10, Kap. 5]

ii) Prostor je Banachův ve všech třech normách, neboť konvergence posloupnosti matic $A^{[k]} \to A$, $k \to \infty$, v každé z norem je ekvivalentní konvergenci jednotlivých prvků matic $a_{ij}^{[k]} \to a_{ij}$.

iii) Stačí dokázat, že prostor c je uzavřený v l_∞. Nechť $x^{[k]} = \{x_n^{[k]}\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z c a $x^{[k]} \to x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak pro libovolná $k, m, n \in \mathbb{N}$ je $|x_n - x_m| \leq |x_n - x_n^{[k]}| + |x_n^{[k]} + x_m^{[k]}| + |x_m^{[k]} - x_m|$. Protože $x_n^{[k]} \to x_n$ pro $k \to \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro pevné k je $x^{[k]} \in c$, tj. $x_n^{[k]}$ je cauchyovská posloupnost, je každý ze tří sčítanců na pravé straně poslední nerovnosti libovolně malý, pokud jsou k, m, n dostatečně velká. To znamená, že $x = \{x_n\}$ je caychovská, tedy $x \in c$.

7.21

i) Ani jedna z norem *není* vytvořena skalárním součinem. V a) uvažte $x(t) = t$, $y(t) = t(1-t)$, $[a, b] = [0, 1]$, v b) a c) $x = \{1, 2, 0, 0 \ldots, 0, \ldots, \}$, $y = \{2, 1, 0, \ldots, 0, \ldots\}$.

ii) Prostor *není* Hilbertův, protože není úplný. Uvažujte $[a, b] = [-1, 1]$ a posloupnost funkcí $f_n(x) = 1 + \cos \pi n x$ pro $x \in [-(1/n), 1/n]$ a $f_n(x) = 0$ pro $x \in [-1, 1] \setminus [-(1/n), 1/n]$ a využijte stejné úvahy jako v Příkladu 3.6 ii).

LITERATURA

[1] Alexandrov P. S. : Vvedenije v obščuju teoriju množestv i funkcij. Nauka, Moskva, 1948.

[2] Čech E. : Bodové množiny. Academia, Praha, 1974.

[3] Dorogovcev A. J. : Matematičeskij analiz, sbornik zadač. Vyssaja škola, Kijev, 1987.

[4] Došlá Z. – Kuben J. : Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. Skriptum MU, Brno, 2004.

[5] Došlá Z. – Novák V. : Nekonečné řady. Skriptum. MU, Brno, 2002.

[6] Engelking R. : General topology. PWN, Warszawa, 1977.

[7] Fučík S. : Příklady z matematické analýzy II., Metrické prostory. Skriptum. SPN, Praha, 1977.

[8] Fuchs E. : Metrické prostory. Skriptum. UJEP, Brno, 1976.

[9] Fuchs E. : Teorie množin. Skriptum. UJEP, Brno, 1976.

[10] Horn, R. A. – Johnson, C. R.: Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[11] Jarník V. : Diferenciální počet II. Academia, Praha, 1976.

[12] Kalas J. – Ráb M. : Obyčejné diferenciální rovnice. Masarykova univerzita, Brno, 1995.

[13] Kosmák L. – Potůček R. : Metrické prostory. Academia, Praha, 2004.

[14] Kufner A. : Co asi nevíte o vzdálenosti. Mladá fronta, edice ŠMM, Praha, 1974.

[15] Kuratowski C. : Topologie (dva díly). PWN, Warszawa, I. díl 1958, II. díl 1961.

[16] Novák V. : Diferenciální počet v $\mathbb{R}$. Skriptum. SPN, Praha, 1985.

[17] Smart D. R. : Fixed point theorems. Cambridge University Press, 1974.

[18] Yoshida, K. : Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

REJSTŘÍK