Příklady na pravděpodobnostní vytvořující funkce a vlastnosti Galtonova – Watsonova procesu větvení

Příklad 1.: Nakreslete průběh pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny X, kde
a) $X \sim Po(\lambda)$, $\lambda = 0{,}5$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1{,}5$, $\lambda = 2$
b) $X \sim Bi(6,\upsilon)$, $\upsilon = 0{,}25$, $\upsilon = 0{,}5$, $\upsilon = 0{,}75$
c) $X \sim Ge(\upsilon)$, $\upsilon = 0{,}25$, $\upsilon = 0{,}5$, $\upsilon = 0{,}75$

Návod:
ad a) Pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny $X \sim Po(\lambda)$ má tvar
$g_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$. Pro její zobrazení na intervalu (-1, 1) v MATLABu napíšeme příkazy:

```
lambda=[0.5 1 1.5 2]';
z=[-0.99:0.01:0.99]';
y1=exp(lambda(1)*(z-1)); y2=exp(lambda(2)*(z-1)); y3=exp(lambda(3)*(z-1));
y4=exp(lambda(4)*(z-1));
plot(z,y1,z,y2,z,y3,z,y4)
```

ad b) Pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny $X \sim Bi(n,\upsilon)$ má tvar
$g_X(z) = (1-\vartheta+z\vartheta)^n$. Pro její zobrazení na intervalu (-1, 1) (v případě, že n = 6) v MATLABu napíšeme příkazy:

```
theta=[0.25 0.5 0.75];z=[-0.99:0.01:0.99];
y1=(1-theta(1)+z*theta(1)).^6;
y2=(1-theta(2)+z*theta(2)).^6;
y3=(1-theta(3)+z*theta(3)).^6;
plot(z,y1,z,y2,z,y3)
```

ad c) Pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny $X \sim Ge(\upsilon)$ má tvar
$g_X(z) = \dfrac{\vartheta}{1-z(1-\vartheta)}$. Pro její zobrazení na intervalu (-1, 1) v MATLABu napíšeme příkazy:

```
theta=[0.25 0.5 0.75];z=[-0.99:0.01:0.99];
y1=theta(1)./(1-z*(1-theta(1)));
y2=theta(2)./(1-z*(1-theta(2)));
y3=theta(3)./(1-z*(1-theta(3)));
plot(z,y1,z,y2,z,y3)
```

Příklad 2.: Nechť je dán Galtonův – Watsonův proces větvení $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1,2, ...} a vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1/6, 1/2, 1/3, 0, ...). Znázorněte graficky závislost střední hodnoty a rozptylu počtu potomků v n-té generaci na pořadí generací, n = 1, 2, …, 10.

Návod:
Střední hodnota počtu potomků v 1. generaci: $E(X_1) = \mu = 0\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{6}$, střední hodnota počtu potomků v n-té generaci: $E(X_n) = \mu^n = \left(\frac{7}{6}\right)^n$.

Rozptyl počtu potomků v 1. generaci:

$D(X_1) = \sigma^2 = E\left(X_1{}^2\right) - [E(X_1)]^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{17}{36}$, rozptyl počtu potomků v n-té generaci: $D(X_n) = \frac{\sigma^2 \mu^{n-1}\left(\mu^n - 1\right)}{\mu - 1} = \frac{17}{6} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} \cdot \left[\left(\frac{7}{6}\right)^n - 1\right]$

Příkazy v MATLABu:

```
mi=7/6;sigmakv=17/36;
n=[1:10];
mi_n=mi.^n; sigmakv_n=sigmakv^2*mi.^(n-1).*(mi_n-1)/(mi-1);
plot(n,mi_n,'*')
figure
plot(n,sigmakv_n,‘o‘)
```