Téma 5: Výpočty pravděpodobností pomocí distribuční a pravděpodobnostní funkce binomického rozložení

STATISTICA poskytuje hodnoty distribučních a pravděpodobnostních funkcí mnoha rozložení. Omezíme se na binomické rozložení (funkce IBinom(x;p;n) a Binom(x;p;n), kde x ... počet úspěchů, p ... pravděpodobnost úspěchu v jednom pokusu, n ... celkový počet pokusů).

Vzorový příklad na binomické rozložení: Pojišťovna zjistila, že 12% pojistných událostí je způsobeno vloupáním. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 30 náhodně vybranými pojistnými událostmi bude způsobeno vloupáním

a) nejvýše 6,
b) aspoň 6,
c) právě 6,
d) od dvou do pěti?

Řešení:

Náhodná veličina X udává počet pojistných událostí způsobených vloupáním,
$X \sim Bi(30;\ 0{,}12)$.
ad a) $P(X\leq 6) = \Phi(6) = 0{,}9393$,
ad b) $P(X\geq 6) = 1 - P(X\leq 5) = 1 - \Phi(5) = 0{,}1431$,
ad c) $P(X=6) = \pi(6) = 0{,}0825$,
ad d) $P(2\leq X\leq 5) = \Phi(5) - \Phi(1) = 0{,}7469$.

Postup ve STATISTICE:
Otevřeme nový datový soubor se čtyřmi proměnnými a o jednom případu.

Řešení:

Do Long Name 1. proměnné napíšeme =IBinom(6;0,12;30).
Do Long Name 2. proměnné napíšeme =1-IBinom(5;0,12;30).
Do Long Name 3. proměnné napíšeme =Binom(6;0,12;30).
Do Long Name 4. proměnné napíšeme =IBinom(5;0,12;30)-IBinom(1;0,12;30).

a) $P(X\leq 6) = \Phi(6) =$ IBinom(6;0,12;30) = 0,939393
b) $P(X\geq 6) = 1-P(X\leq 5) = 1-\Phi(5) = 1-$IBinom(5;0,12;30) = 0,143077
c) $P(X=6) =$ Binom(6;0,12;30) = 0,082470
d) $P(2\leq X\leq 5) = P(1<X\leq 5) = \Phi(5)-\Phi(1) =$ IBinom(5;0,12;30)-IBinom (1;0,12;30) = 0,746953

Příklady ze skript Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika, kapitola 4:

Příklad 4.10.: V rodině je 10 dětí. Za předpokladu, že chlapci i dívky se rodí s pravděpodobností 0,5 a pohlaví se formuje nezávisle na sobě, určete pravděpodobnost, že v této rodině je

a) právě 5 chlapců
b) nejméně 3 a nejvýše 8 chlapců.

$n = 10$, úspěch = narození chlapce, pravděpodobnost úspěchu $\vartheta = 0{,}5$
X udává počet narozených chlapců

Řešení:

a) $P(X=5) = \pi(5) =$ Binom(5;0,5;10) = 0,246094

b) $P(3 \leq X \leq 8) = P(2 < X \leq 8) = \Phi(8) - \Phi(2) = \text{IBinom}(8;0,5;10) - \text{IBinom}(2;0,5;10) =$ 0,934570

Příklad 4.11.: Na dvoukolejném železničním mostě se potkají během 24 hodin nejvýše dva vlaky, a to s pravděpodobností 0,2. Za předpokladu, že denní provozy jsou nezávislé, určete pravděpodobnost, že během týdne se dva vlaky na mostě potkají

a) právě třikrát
b) nejvýše třikrát
c) alespoň třikrát.

$n = 7$, úspěch = potkání dvou vlaků během 24 hodin, pravděpodobnost úspěchu $\vartheta = 0{,}2$
X udává počet potkání dvou vlaků během týdne

Řešení:

$P(X=3) = \pi(3) = \text{Binom}(3;0,2;7) = 0{,}11468$
$P(X \leq 3) = \text{IBinom}(3;0,2;7) = 0{,}966656$
$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - \text{IBinom}(2;0,2;7) = 0{,}148032$

Příklad 4.12.: Je pravděpodobnější vyhrát se stejně silným soupeřem tři partie ze čtyř nebo pět partií z osmi, když nerozhodný výsledek je vyloučen a výsledky jsou nezávislé?

Úspěch je výhra partie se stejně silným soupeřem, když remíza je vyloučena
Pravděpodobnost úspěchu $\vartheta = 0{,}5$, X udává počet úspěchů

a) $n = 4$
b) $n = 8$

Řešení:

ad a) $P(X=3) = \pi(3) = \text{Binom}(3;0,5;4) = 0{,}250000$
ad b) $P(X=5) = \pi(3) = \text{Binom}(5;0,5;8) = 0{,}218750$

Příklad 4.13.: Dvacetkrát nezávisle na sobě házíme třemi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom hodě padnou tři líce?

$n = 20$, úspěch je padnutí tří líců při hodu třemi mincemi, $\vartheta = 1/8 = 0{,}125$,
X udává počet úspěchů

Řešení:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - \text{IBinom}(0;0,125;20) = 0{,}930791$

Příklad 4.14.: Pětkrát nezávisle na sobě házíme třemi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že právě dvakrát padnou tři jedničky?

$n = 5$, úspěch je padnutí tří jedniček při hodu třemi kostkami, $\vartheta = 1/6^3 = 1/216$,
X udává počet úspěchů

Řešení:

$P(X=2) = \pi(2) = \text{Binom}(2;1/216;5) = 0{,}000211$