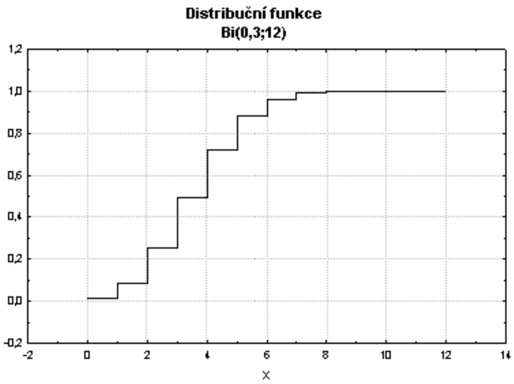
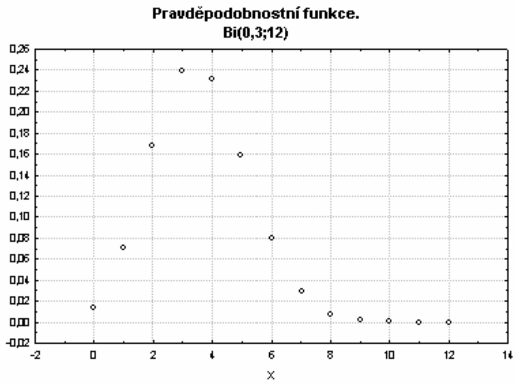
Téma 6: Grafické znázornění rozložení náhodných veličin a výpočty pravděpodobností spojených s náhodnými veličinami

Vzorový příklad 1: Nakreslete graf distribuční funkce a pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X ~ Bi(12; 0,3)

Postup ve STATISTICE: Vytvoříme nový datový soubor o 3 proměnných a 13 případech. První proměnnou nazveme X a uložíme do ní hodnoty 0, 1, ..., 12 (do Long Name napíšeme =v0-1). Druhou proměnnou nazveme DF a uložíme do ní hodnoty distribuční funkce (do Long Name napíšeme příkaz =IBinom(x;0,3;12)). Třetí proměnnou nazveme PF a uložíme do ní hodnoty pravděpodobnostní funkce (do Long Name napíšeme příkaz =Binom(x;0,3;12)).
Graf distribuční funkce: Graphs – Scatterplots – Variables X, DF – OK – vypneme Linear fit – OK – 2x klikneme na pozadí grafu – Plot:General – zaškrtneme Line – Line Type: Step – OK.
Graf pravděpodobnostní funkce: Graphs – Scatterplots – Variables X, PF – OK – vypneme Linear fit - OK.

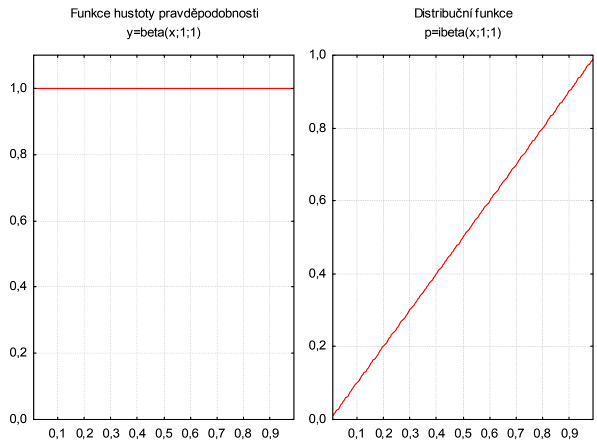




Příklad 1.: Podle tohoto návodu nakreslete grafy distribučních a pravděpodobnostních funkcí binomického rozložení pro různá n a p, např. n=5, p=0,5 (resp. 0,75) apod. Sledujte vliv parametrů na vzhled grafů.

Příklad 2.: Nakreslete grafy distribučních a pravděpodobnostních funkcí
a) geometrického rozložení Ge(p), kde p = 0,1, p = 0,5, p = 0,9. Použije se funkce IGeom(x;p) a Geom(x;p), kde x nabývá hodnot např. 0, 1, … , 12
b) Poissonova rozložení Po(λ), kde λ = 0,5, λ = 2, λ = 10. Použije se funkce IPoisson(x;lambda) a Poisson(x;lambda), kde x nabývá hodnot např. 0, 1, … , 12

Vzorový příklad 2.: Nakreslete graf distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny X ~ Rs(0, 1). (Poznámka: Rovnoměrné spojité rozložení na intervalu (0,1) je speciálním případem Beta rozložení s parametry 1 a 1.)
Postup ve STATISTICE: Statistics – Probability Calculator – Distributions – Beta – shape 1 - napíšeme 1, shape 2 – napíšeme 1. STATISTICA vykreslí graf hustoty a distribuční funkce.



Příklad 3.: Nakreslete graf distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny X, která má
a) exponenciální rozložení Ex(2), Ex(1/2)
b) normální rozložení N(0, 1), N(-1, 1), N(0, 4), N(-1, 4)

Vzorový příklad 3.: Na výrobní lince jsou automaticky baleny balíčky rýže o deklarované hmotnosti 1000 g. Působením náhodných vlivů hmotnost balíčků kolísá. Lze ji považovat za náhodnou veličinu, která se řídí normálním rozložením se střední hodnotou 996 g a směrodatnou odchylkou 18 g. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný balíček rýže neprojde výstupní kontrolou, jestliže je povolená tolerance ± 30 g od deklarované hmotnosti 1000 g?

Řešení:

$$X \sim N(996, 18^2),\ U = \frac{X-996}{18} \sim N(0,1)$$

$$P\left(X \notin \langle 970,1030\rangle\right) = 1 - P(970 < X < 1030) = 1 - P\left(\frac{970-996}{18} < U < \frac{1030-996}{18}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1{,}89) + \Phi(-1{,}44) = 2 - 0{,}971 - 0{,}925 = 0{,}104$$

Postup ve STATISTICE
Využijeme toho, že STATISTICA pomocí funkce INormal(x;mu;sigma) umí vypočítat hodnotu distribuční funkce normálního rozložení se střední hodnotou mu a směrodatnou odchylkou sigma. Tedy

$$P\left(X \notin \langle 970,1030\rangle\right) = 1 - P(970 < X < 1030) = 1 - \left[\Phi(1030) - \Phi(970)\right] = 1 - \Phi(1030) + \Phi(970),$$

kde Φ je distribuční funkce rozložení $N(996,18^2)$.
Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. Dvakrát klikneme na název této proměnné a do jejího Long Name napíšeme příkaz
= 1- INormal(1030;996;18) + INormal(970;996;18)
V proměnné objeví hodnota 0,10376.

Příklad 4.: Výsledky u přijímacích zkoušek na jistou VŠ jsou normálně rozloženy s parametry μ = 550 bodů, σ = 100 bodů. S jakou pravděpodobností bude mít náhodně vybraný uchazeč aspoň 600 bodů? [Výsledek: 0,30854]

Příklad 5.: Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina X ~ N(20, 16) nabude hodnotu menší než 12 nebo větší než 28? [Výsledek: 0,0455]

Příklad 6.: Doba (v minutách) potřebná k obsloužení zákazníka v prodejně potravin je náhodná veličina, která se řídí rozložením Ex$\left(0,\overline{3}\right)$. Jaká je pravděpodobnost, že doba potřebná k obsloužení náhodně vybraného zákazníka v této prodejně bude v rozmezí od 3 do 6 minut?
Návod: Použijte funkci IExpon(x;lambda) [Výsledek: 0,232544]

Příklad 7.: Doba (v hodinách), která uplyne mezi dvěma naléhavými příjmy v jisté nemocnici, se řídí rozložením Ex(0,5). Jaká je pravděpodobnost, že uplyne více než 5 hodin bez naléhavého příjmu? [Výsledek: 0,082085]