Statistické metody a zpracování dat

VIII Analýza časových řad

Petr Dobrovolný

Základní pojmy

Časová řada je chronologicky uspořádaná posloupnost hodnot určitého statistického ukazatele.

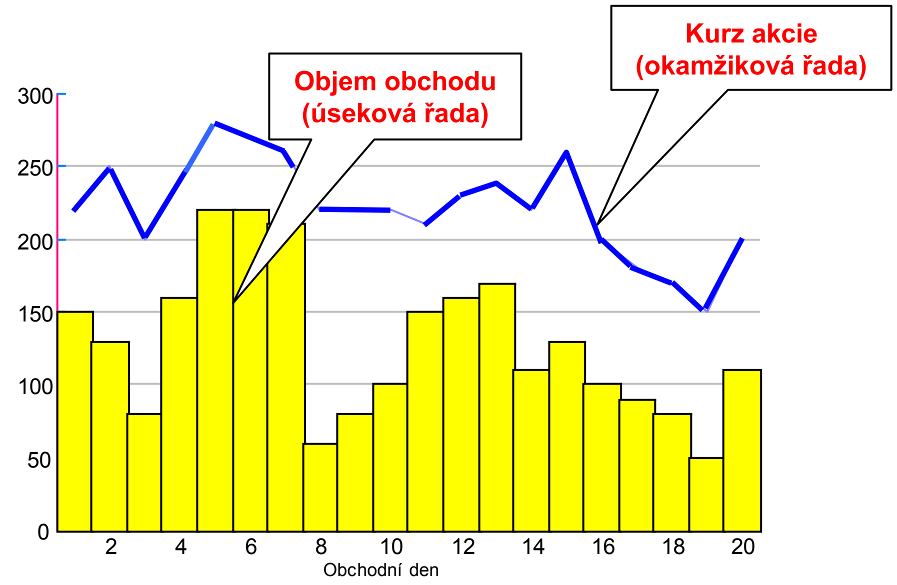
$$y_t = f(t) \quad y_1, y_2, \cdots, y_n$$

y_t , kde $t=1, 2, \ldots, n$

y = ukazatel
t = časová proměnná
n = počet členů řady

Pomocí časových řad můžeme zkoumat **dynamiku** jevů v čase.
Mají základní význam pro **analýzu příčin**, které na tyto jevy působily a ovlivňovaly jejich chování v minulosti, tak pro **předvídání** jejich budoucího vývoje.

Příklady časových řad a jejich použití



Vývoj cen akcií

Objem obchodování na burze

Vývoj počtu obyvatelstva určité lokality

Maximální denní srážkové úhrny na určité stanici

Průměrné měsíční teploty vzduchu na určité stanici

Průměrný roční odtok vody z povodí

Základní typy časových řad

Časové řady **deterministické** - neobsahují prvek náhody (sin(x)) a **stochastické** (realizace náhodného procesu)

Časové řady **absolutních** veličin (přímo zjišťovaných)

- okamžikové (počet obyvatel – k datu sčítání)
- intervalové (denní úhrn srážek)

Časové řady **odvozené**

- průměrných veličin (řada klouzavých průměrů)
- poměrných – relativních veličin (řada hektarových výnosů)

Časové řady **ekvidistantní** a **neekvidistantní**

Problémy při sestavování časových řad

- Problém volby časových bodů pozorování
- Problémy s délkou časové řady
- Problémy s kalendářem
- Problémy s nesrovnatelností jednotlivých měření

Uvedené problémy mohou vést k narušení **homogenity** časové řady

Zásady pro sestavování časových řad

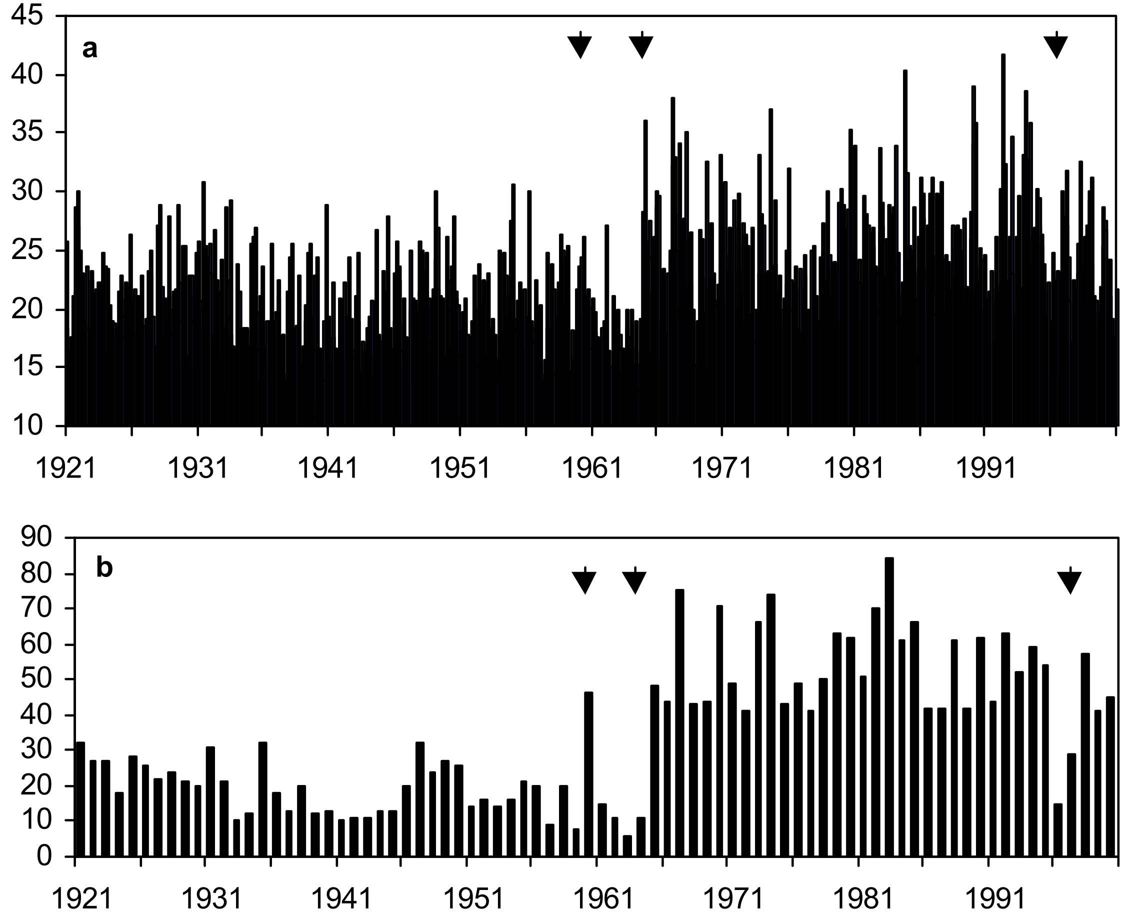
Metadata (data o datech) – historie měření vyšetřovaného prvku na meteorologické stanici, data výměny přístrojů, změny pozorovatelů, změny metodiky měření, ...

Homogenita časové řady – hodnoty jednotlivých členů pozorované řady odrážejí jen přirozenou proměnlivost studované veličiny a nejsou ovlivněny vnějšími vlivy.

- **absolutní** homogenita řady
- **relativní** homogenita řady – posuzování homogenity vůči řadě homogenní (vzorové)

Doplňování **chybějících** členů řady
Vylučování **odlehlých** hodnot.

Příklad nehomogenní řady



Maximální denní nárazy větru a počty dnů s nárazy větru na stanici Praha, Karlov v období 1921-1990

Okamžikové časové řady

Jsou spojité v čase, záleží u nich na rozhodném okamžiku šetření. Hodnota nezávisí na délce intervalu, za který je znak zjišťován. Okamžikové ukazatele za několik intervalů nesčítáme. Je však pro ně typické počítání průměrů v čase. Průměr okamžikové veličiny za určité období označujeme jako tzv. **chronologický průměr.** Nejprve spočteme průměr za časové okamžiky t_{i-1} a t_i, pro i=2 až n. Z těchto hodnot určíme průměr pro celou řadu:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n-1}$$

Uvedený vztah platí v případě, že délka všech intervalů je konstantní. Pokud ne, je nutné jednotlivé dílčí průměry vážit délkami intervalů a vypočítat vážený chronologický průměr.

Intervalové časové řady

Jednotlivé hodnoty se vztahují k **časovým úsekům** a přímo závisí na jejich délce. Za delší časové období lze intervalové ukazatele shrnovat a vytvářet **součtové (kumulativní) řady**. Součtová řada vznikne postupným sčítáním hodnot za sebou jdoucích časových intervalů. Podle průběhu součtové řady můžeme posoudit rovnoměrnost vývoje hodnot znaku.

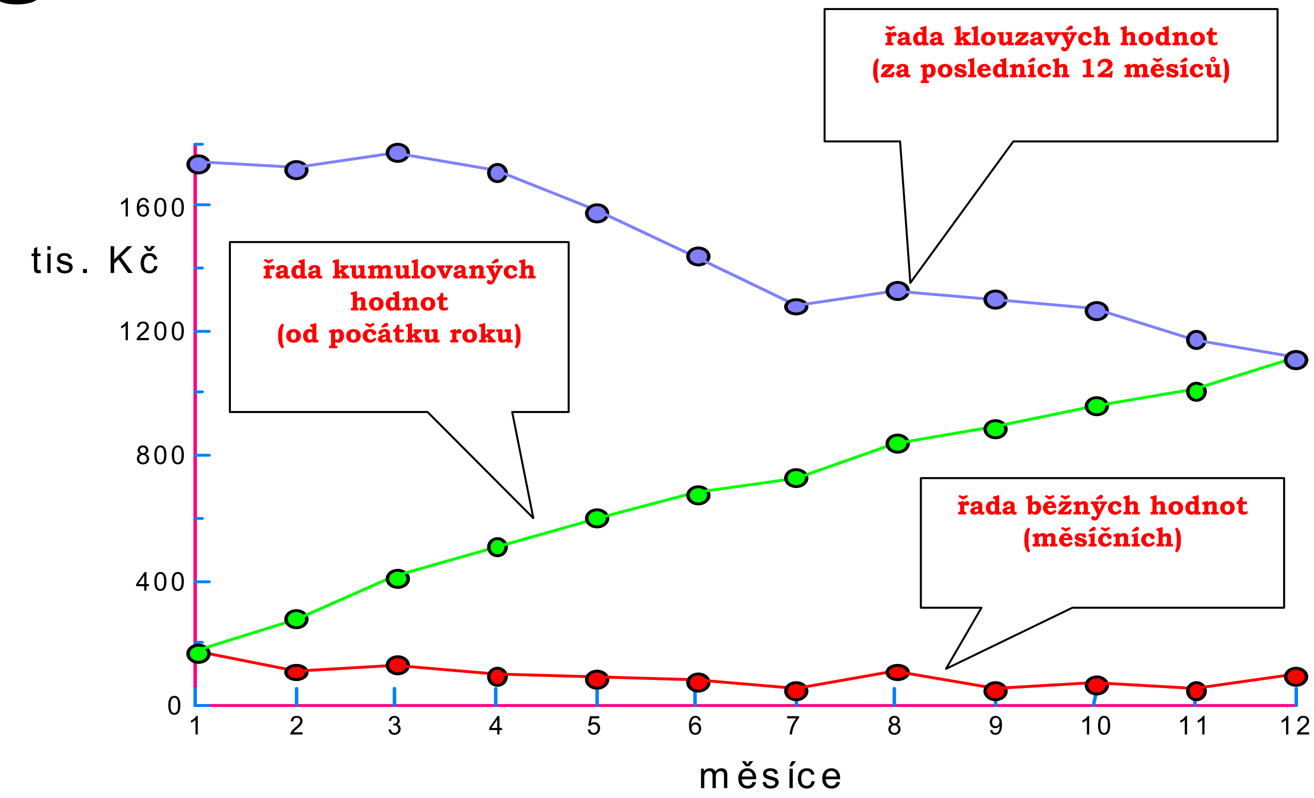
Hodnotu intervalového ukazatele zjištěnou za časový interval (t_{i-1}, t_i) označme q_i a přiřazujeme-ji ke středu časového intervalu.

Časovou řadu hodnot q_i označujeme intervalovou **řadou běžných hodnot**.

Požadavkem sestavování intervalových časových řad je **konstantnost** délky časového intervalu. V řadě případů tento požadavek není splněn (např. počet dnů v měsíci).

Dalším typem součtových časových řad jsou **řady klouzavých úhrnů**. Jsou vhodné ke srovnání úrovně řady ve sledovaném období s úrovní řady období předešlého.

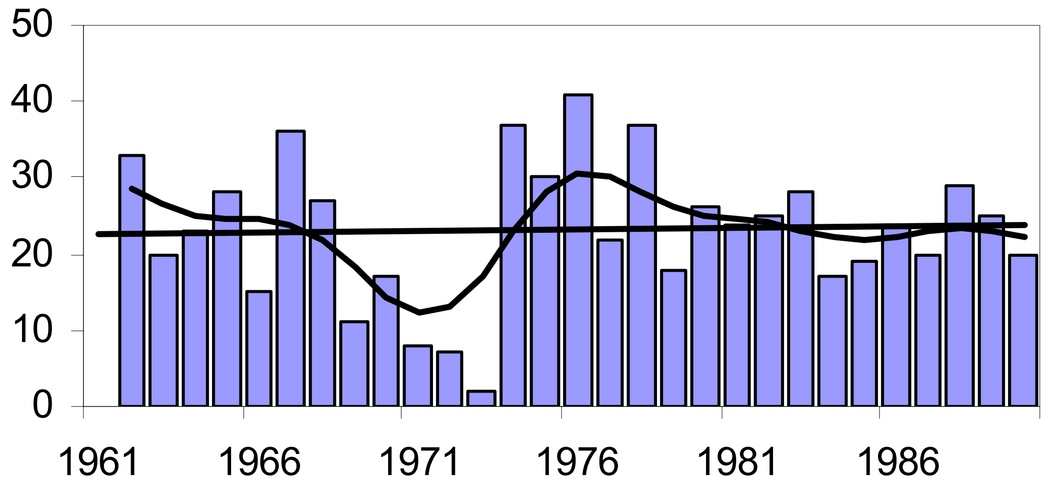
Z - diagram



Řady běžných hodnot, řady kumulovaných hodnot a řady klouzavých úhrnů lze znázornit v tzv. Z-diagramu

Odvozené časové řady

Jedná se o řady sestavné z průměrů či z relativních (poměrných) hodnot. V podstatě se jedná o řady okamžikové. Průměr okamžikového ukazatele je též okamžikovou veličinou. Nejedná se u nich o závislost na délce intervalu, ale na hodnotách znaku v daném intervalu (např. průměrné počty zaměstnanců místo okamžikových údajů či tzv. klouzavé průměry na místo ročních hodnot – viz. obr.)



Odvozené ukazatele časové řady

Při práci s časovými řadami je typické, že často pracujeme ne přímo s původní časovou řadou, ale s nějakou její **transformací**.

Absolutní přírůstek (první diference) $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

Jsou-li členy v řadě absolutních přírůstků prakticky konstantní, potom řada má lineární trend.

Relativní přírůstek $\delta_i = \dfrac{\Delta y_i}{y_{i-1}} = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} = \dfrac{y_i}{y_{i-1}} - 1$

Informuje nás o rychlosti (tempu) růstu

Odvozené ukazatele časové řady

Koeficient růstu (**řetězový index**): vyjadřuje, o kolik procent vzrostla hodnota časové řady v okamžiku t_i ve srovnání s hodnotou řady v čase t_{i-1}.

$$k_i = \delta_i + 1 = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100(\%)$$

Průměrný koeficient růstu: pro celou řadu se vypočte jako geometrický průměr jednotlivých hodnot koeficientů růstu.

$$\bar{k} = \sqrt[n-1]{k_1 \cdot k_2 \ldots k_{n-1}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \ldots \cdot \frac{y_n}{y_{n-1}}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$$

Uvedený výpočet je vhodný pouze v případě stálého a přibližně stejného růstu hodnot řady.

Odvozené ukazatele časové řady

Pro účely srovnání různých časových řad se jejich hodnoty převádějí na tzv. **bazické indexy** (indexy se stálým základem):

$$k_i^{'} = \frac{y_i}{y_z} \cdot 100(\%)$$

Hodnota y_z je obvykle prvním nebo posledním členem časové řady (základ).

Transformace časové řady

Jedná se o úpravu původní časové řady, tak aby

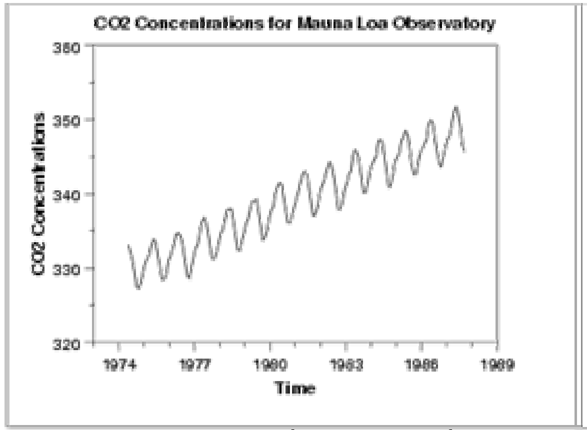
1. splňovala podmínky pro následnou analýzu (např. linearizace, stacionarita atd.)

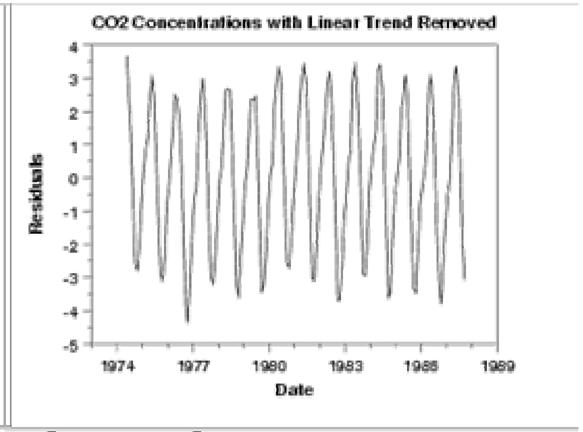
2. zvýrazňovala dále analyzovanou složku

Běžné druhy transformací:

- přidání konstanty $y = y + C$
- linearizace řady $y = ln(y)$
- odečtení průměru $y = y - \bar{y}$
- standardizace $y = \left(\dfrac{y - \bar{y}}{s_d} \right)$
- odečtení hodnot trendové funkce (viz. stacionarita)

Stacionární řada





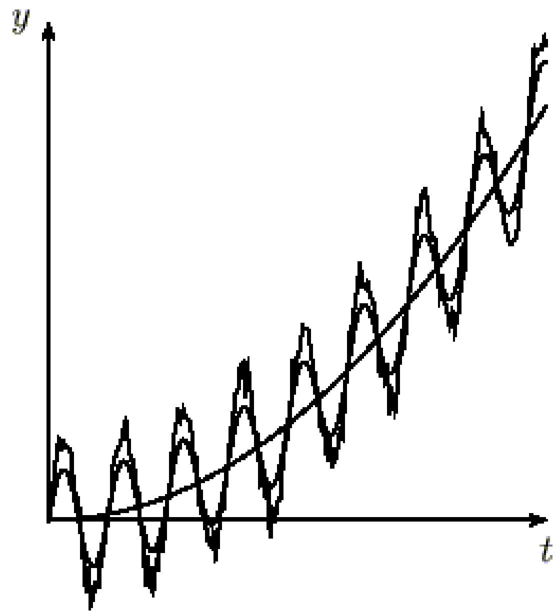
Stacionarita je jednou z nutných podmínek řady metod analýzy časové řady

Časovou řadu považujeme za stacionární, pokud splňuje následující podmínky:

- má konstantní průměr
- má konstantní variabilitu
- korelace dvou časově posunutých pozorování (autokorelace) závisí na délce posunu

Stacionarity lze docílit transformací na řadu diferencí či odečtením trendu

Základy analýzy časových řad



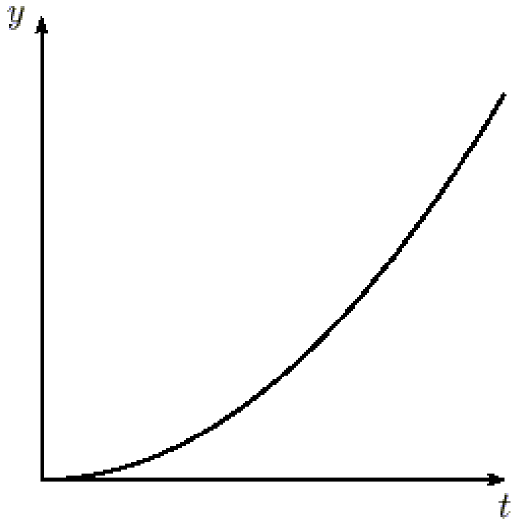
Hlavní cíle analýzy časových řad

1. odhalení zákonitostí a příčin dosavadního **vývoje**
2. **prognóza** chování časových řad

Každá řada může obsahovat čtyři základní složky:

- **trend** (T_t)
- **periodická (sezónní) složka** (S_t)
- **cyklická složka** (C_t)
- **náhodná složka** (ε_t)

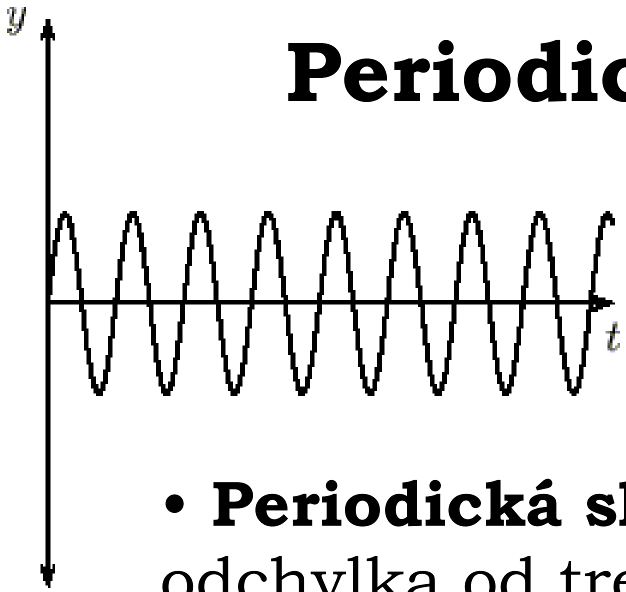
První tři složky tvoří systematickou část řady.



Trendová složka časové řady

- **Trend** je obecná tendence vývoje zkoumaného jevu za dlouhé období.
- Je výsledkem dlouhodobých a stálých procesů (v měřítku posuzované délky časové řady).
- Trend může být lineární či nelineární.
- Trend může být rostoucí, klesající nebo může existovat řada bez trendu (s nulovým trendem).
- Časové řady bez trendu se označují jako stacionární.

Periodická složka časové řady



$$f(t_i) = f(t_i + T)$$

• **Periodická složka** je pravidelně se opakující odchylka od trendové složky s pevnou délkou **periody T**.

• Perioda této složky je menší než celková velikost sledovaného období.

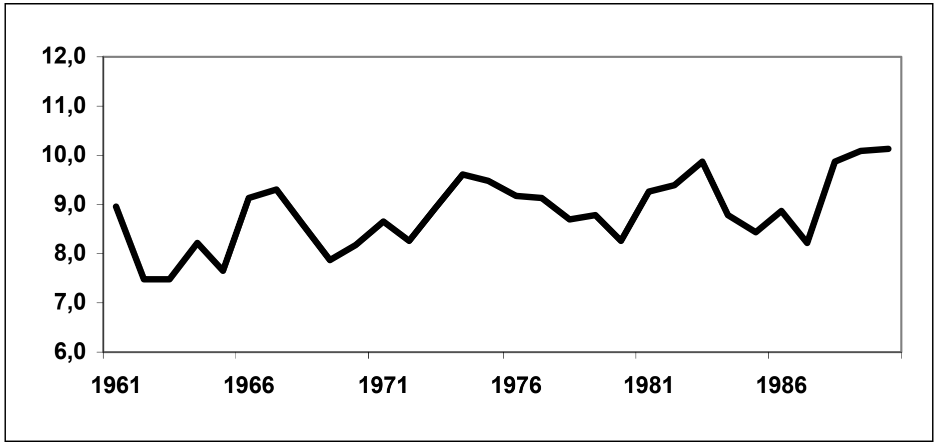
• Typickým případem jsou **sezónní kolísání** a nebo řady denních, měsíčních, čtvrtletních ukazatelů.

• Příčiny sezónnosti jsou různé, většinou však dobře definovatelné.

• Sezónnost je typická pro časové řady ekonomických ukazatelů.

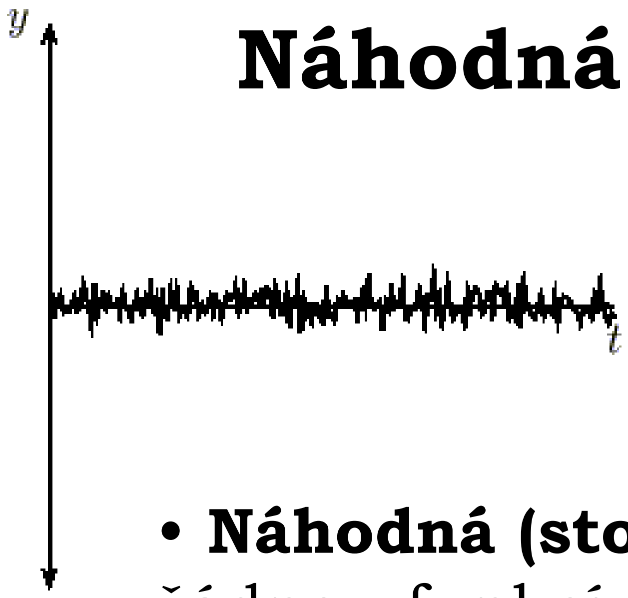
Cyklická složka

$$f(t_i) \approx f(t_i + \overline{T})$$



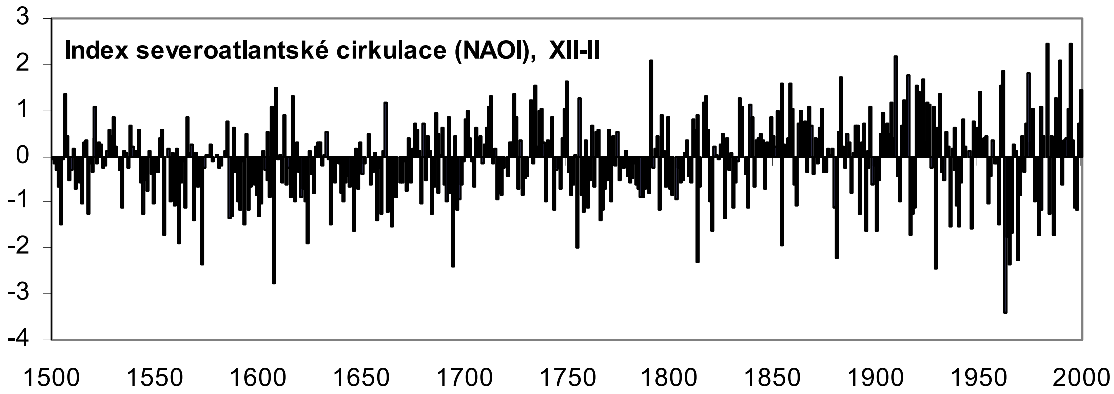
- **Cyklická složka** udává kolísání okolo trendu v důsledku dlouhodobého cyklického vývoje.
- Cyklická složka může vykazovat změny v délce a amplitudě cyklu.
- Délka cyklu je tedy většinou neznámá. (př. demografický trend, kolísání teploty vzduchu).
- Délka cyklu je tedy delší než 1 rok. V některých případech se označuje jako „střednědobý trend“.
- Bývá typickou součástí časových řad meteorologických prvků (př. problém globálního oteplování) či hydrologických jevů.

Náhodná složka časové řady



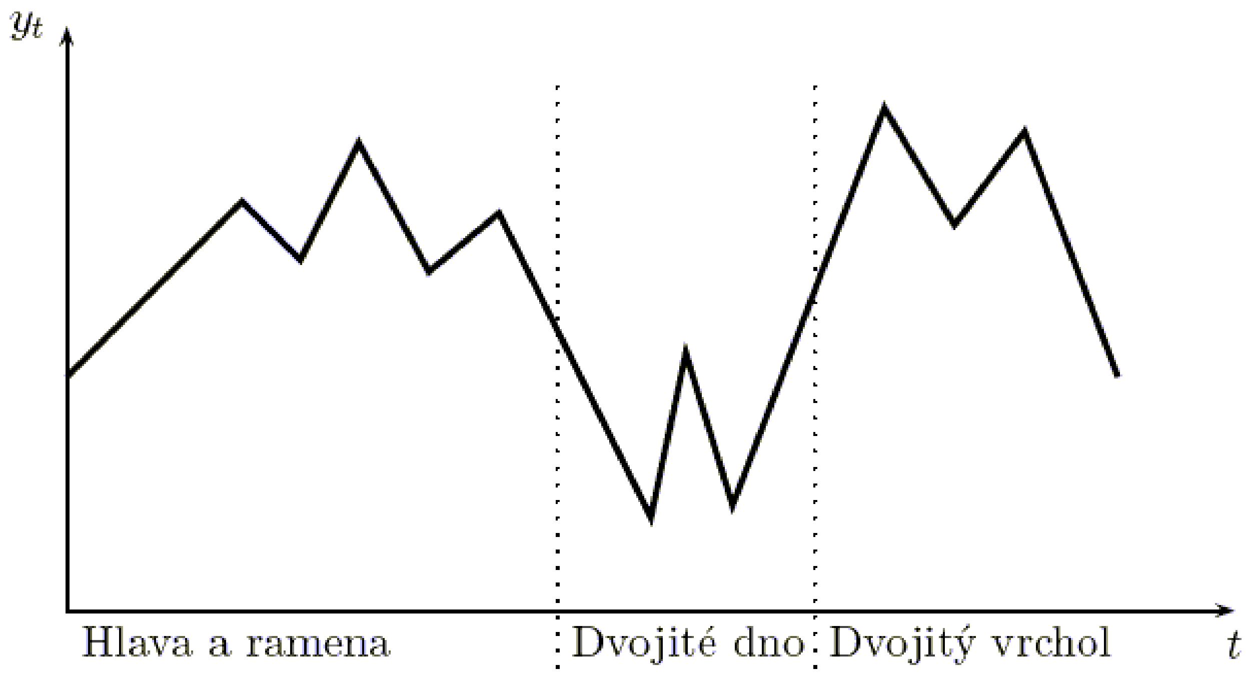
- **Náhodná (stochastická) složka** se nedá popsat žádnou funkcí času.
- "Zbývá" po vyloučení trendu, sezónní a cyklické složky.
- Jejím zdrojem jsou v **jednotlivostech** nepostižitelné jevy.
- Lze ji však popsat pravděpodobnostně.

Grafické metody analýzy časových řad



- Prvotní analýza spočívá v grafickém znázornění průběhu řady.
- Graf slouží k prvotnímu posouzení tendence změn či k hledání opakujících se jevů („patterns“).
- I tyto jednoduché metody umožňují velmi krátkodobou předpověď.
- Graf však velmi dobře může znázorňovat nehomogenity, porovnávat dvě či více řad mezi sebou, …
- Slouží k výběru vhodné metody analýzy.

Grafické metody analýzy časových řad



Vývoj kurzu akcií – příklad výskytu jednoduchých obrazců (patterns) v časové řadě

Modely analýzy časových řad

Časová řada – hodnota ukazatele je funkcí času a náhodné složky:

$$y_t = f(t, \varepsilon_t)$$

K analýze a popisu časových řad se používá několika základních modelů:

A. **Klasický (formální) model**
B. Box-Jenkinsova metodologie
C. Lineární dynamické a regresní modely
D. Spektrální analýza

Klasický (formální) model

Klasický model je pouze popisem jednotlivých složek časové řady jako forem pohybu, ne poznáním příčin.

Jedná se o **dekompozici** na jednotlivé složky a jejich formální popis modelem:

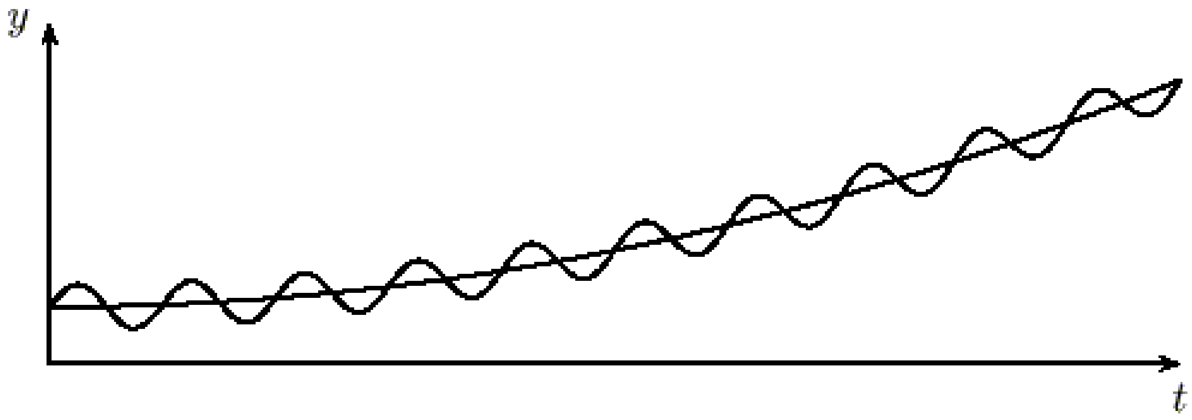
- **Aditivním**
- **Multiplikativním**

Základem je popis systematické složky (trendu, cyklických a periodických kolísání).

Vychází se z předpokladu, že jednotlivá pozorování jsou vzájemně nekorelovaná (viz. také problém stacionarity časových řad).

Aditivní model

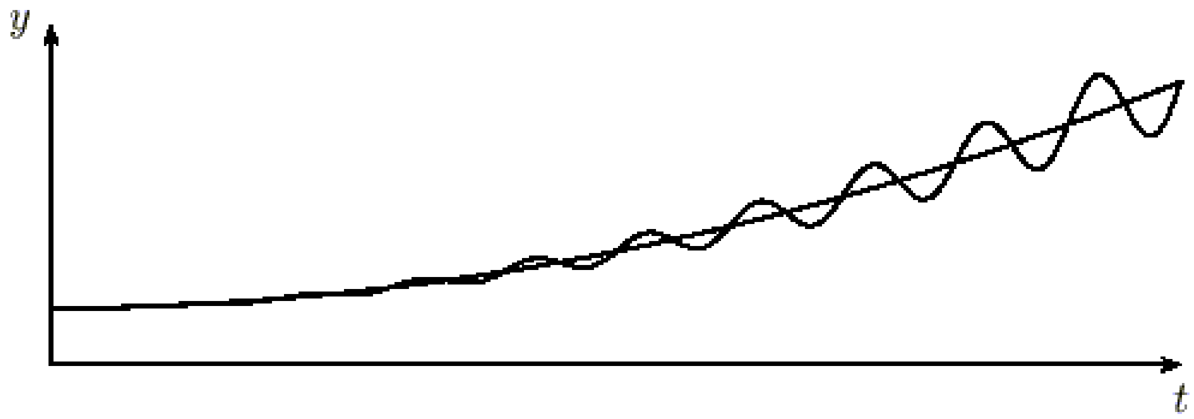
$$y_t = Y_t + \varepsilon_t = T_t + S_t + C_t + \varepsilon_t$$



Model časové řady s aditivní sezónní složkou

Multiplikativní model

$$y_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot \varepsilon_t$$



Model časové řady s multiplikativní sezónní složkou

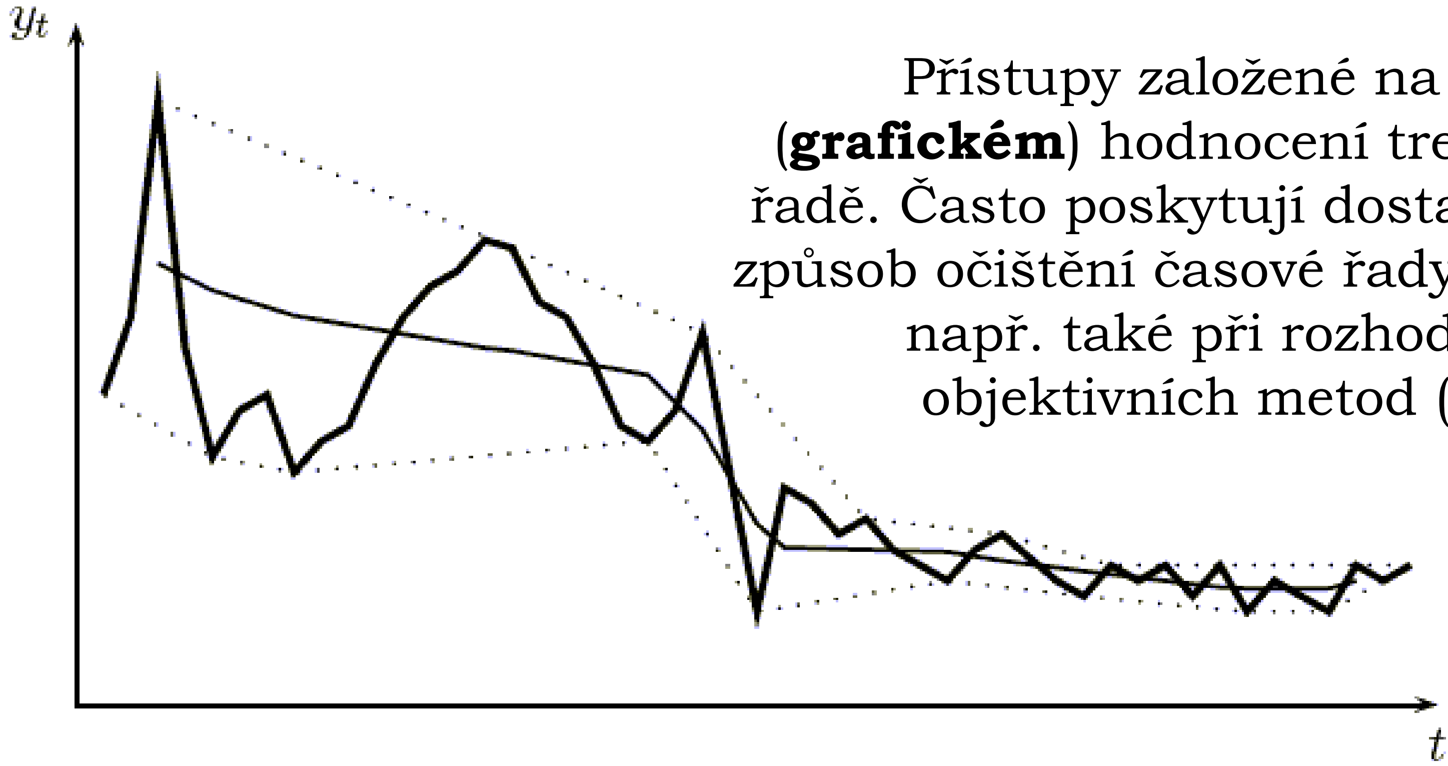
Analýza trendu

A. **Klasický přístup** založený na matematicko-statistickém modelování. Modelované parametry jsou **KONSTANTNÍ** v čase. Neadaptivní metody – např. regresní modely. Umožňují snadnou předpověď (spolehlivou?).

B. **Adaptivní přístup** – parametry se v čase **VYVÍJEJÍ**. Například charakter lineárního trendu se mění (mění se směrnice trendu). Za jednoduchou adaptivní metodu lze považovat i metodu klouzavých průměrů.

Analýza trendu – základní metody vyrovnávání:

- **analytické (popis časové řady funkcí)**
- **mechanické (klouzavé průměry)**
- **exponenciální vyrovnávání**



Přístupy založené na subjektivním (**grafickém**) hodnocení trendu v časové řadě. Často poskytují dostatečně přesný způsob očištění časové řady, používají se např. také při rozhodování o volbě objektivních metod (např. vhodné křivky).

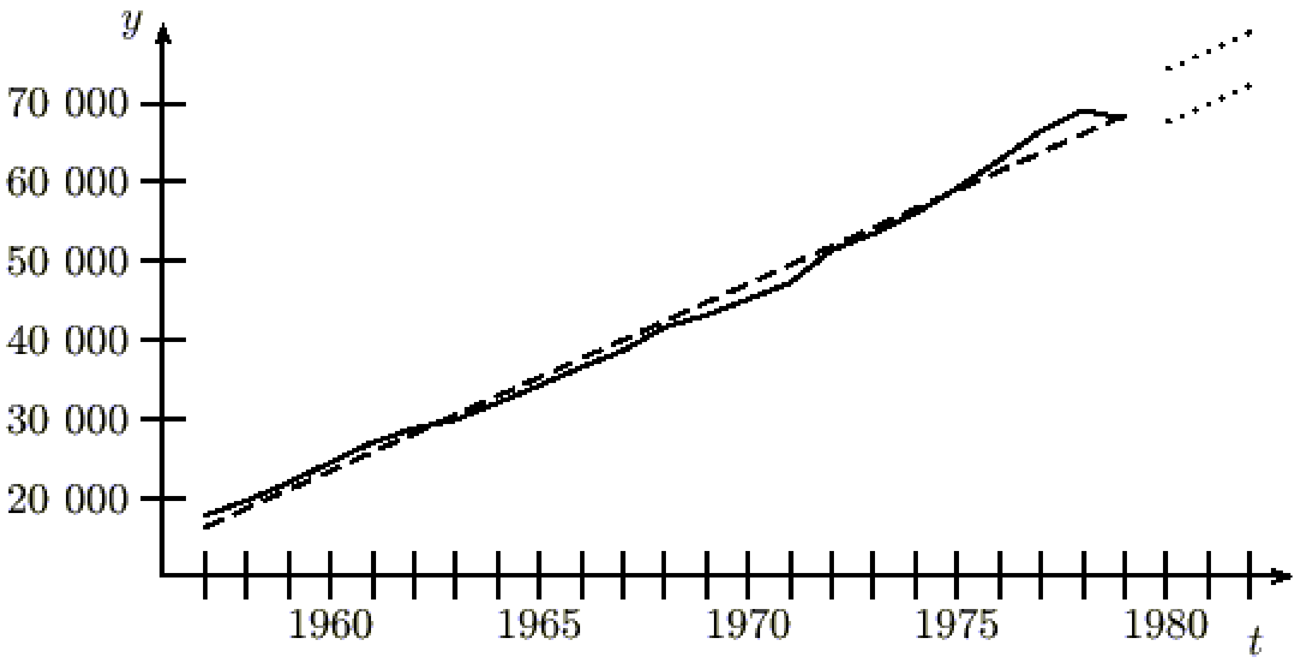
Analytické vyrovnávání trendu matematickou křivkou

$$y_t = Tr_t + E_t$$

- Patří mezi neadaptivní metody. Vychází z předpokladu, že se trend po celou sledovanou dobu nemění a že je možné ho popsat některým typem matematické křivky.
- Identifikace trendu se redukuje na výběr správného typu matematické křivky a odhad jejích parametrů.
- Na problém analýzy trendu lze pohlížet jako na speciální případ **regresní závislosti**, kdy nezávisle proměnnou je čas.
- Časovou řadu vyrovnáváme křivkou, která nejlépe vystihuje její vývojový trend. Výpočet parametrů křivky se děje **metodou nejmenších čtverců**.

Lineární trend

$$y_t = b_0 + b_1 t$$



Parametr b_1 představuje přírůstek hodnoty y připadající na jednotkovou změnu časové proměnné. Řada se vyznačuje konstantními absolutními přírůstky (první diference).

Lineární trend

Hodnoty parametrů b_0 a b_1 získáme metodou nejmenších čtverců obdobně jako v případě jednoduché lineární regrese, tedy:

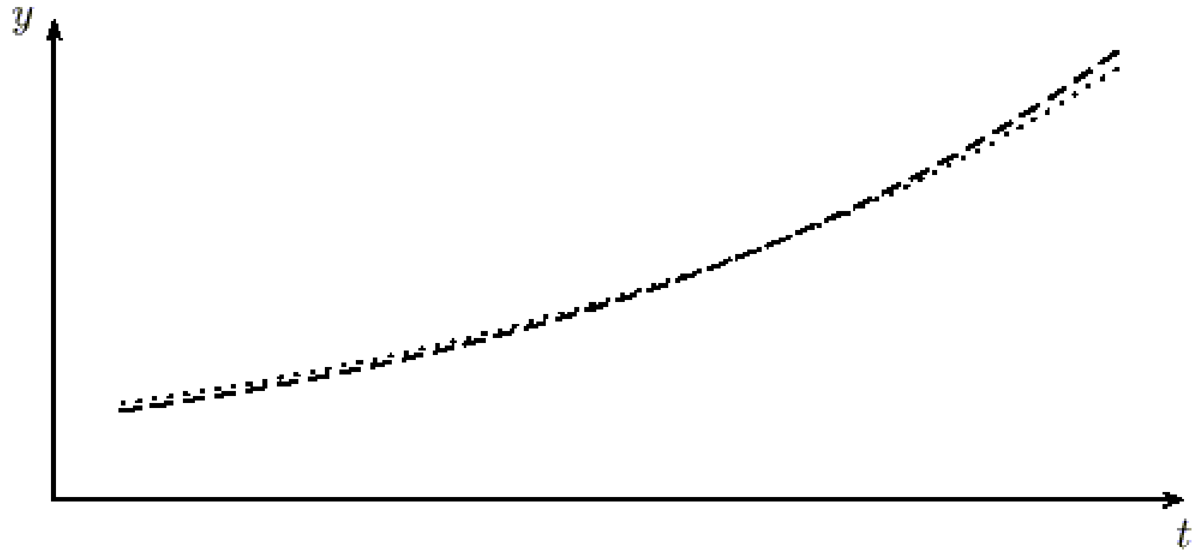
$$b_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} t y_t - \bar{t} \sum_{t=1}^{n} y_t}{\sum_{t=1}^{n} t^2 - n\bar{t}^2} \qquad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$$

Předpověď budoucí hodnoty (**bodová** předpověď) má tvar:

$$\hat{y}_T = b_0 + b_1 T$$

Exponenciální trend

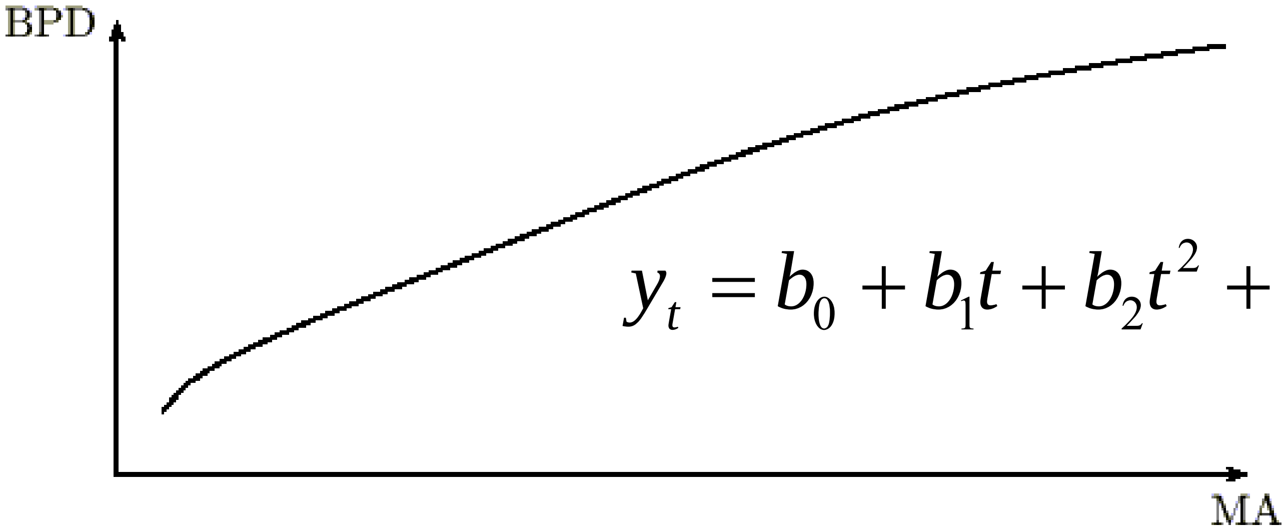
$$y_t = b_0 \cdot b_1^t$$



Parametr b_1 představuje průměrný přírůstek hodnot y_t. Ty se chovají jako členy geometrické posloupnosti. Protože se již nejedná o funkci lineární v parametrech, lze k odhadu exponenciálního trendu využít metody nejmenších čtverců pouze po její **logaritmické transformaci:**

$$\log y_t = \log b_0 + t \cdot \log b_1$$

Polynomický trend



$$y_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_k t^k$$

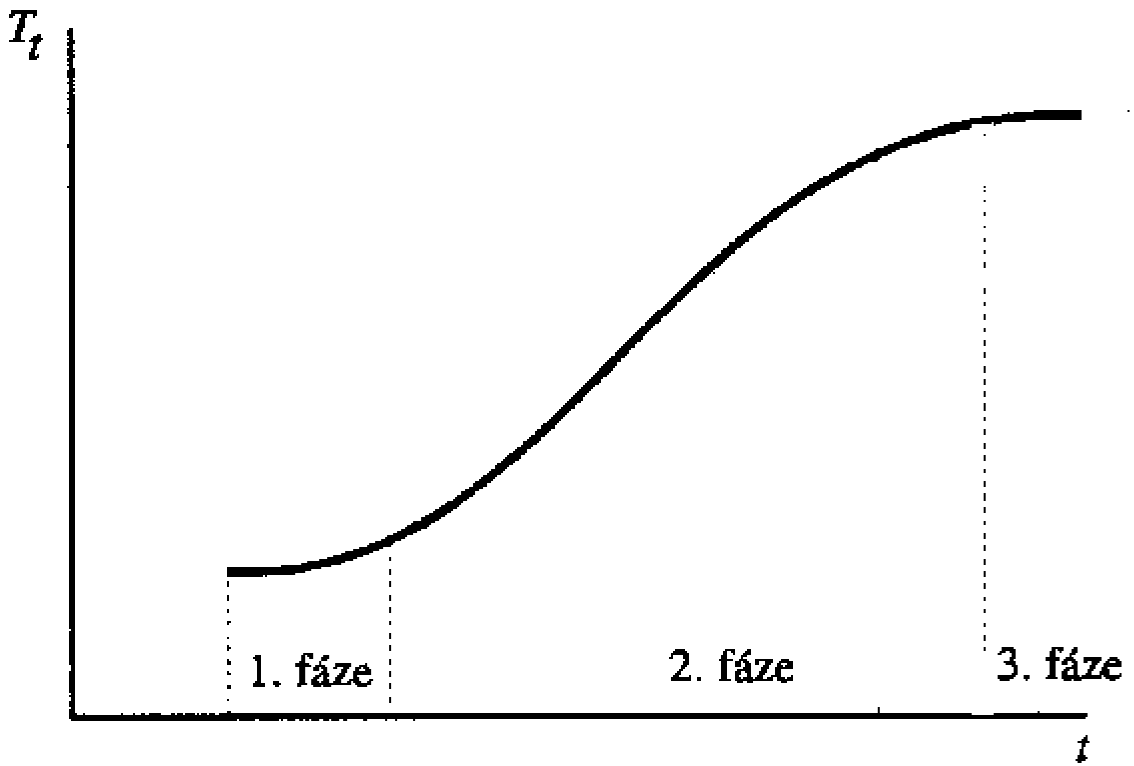
Při volbě stupně polynomu je třeba postupovat opatrně. Vyšší stupeň zajišťuje těsnější proložení empirických hodnot křivkou, vede ale k nestabilitě trendu.

Vyšší polynomy se většinou vůbec nehodí k extrapolacím.

K odhadu parametrů lze využít MNČ.

Logistická křivka

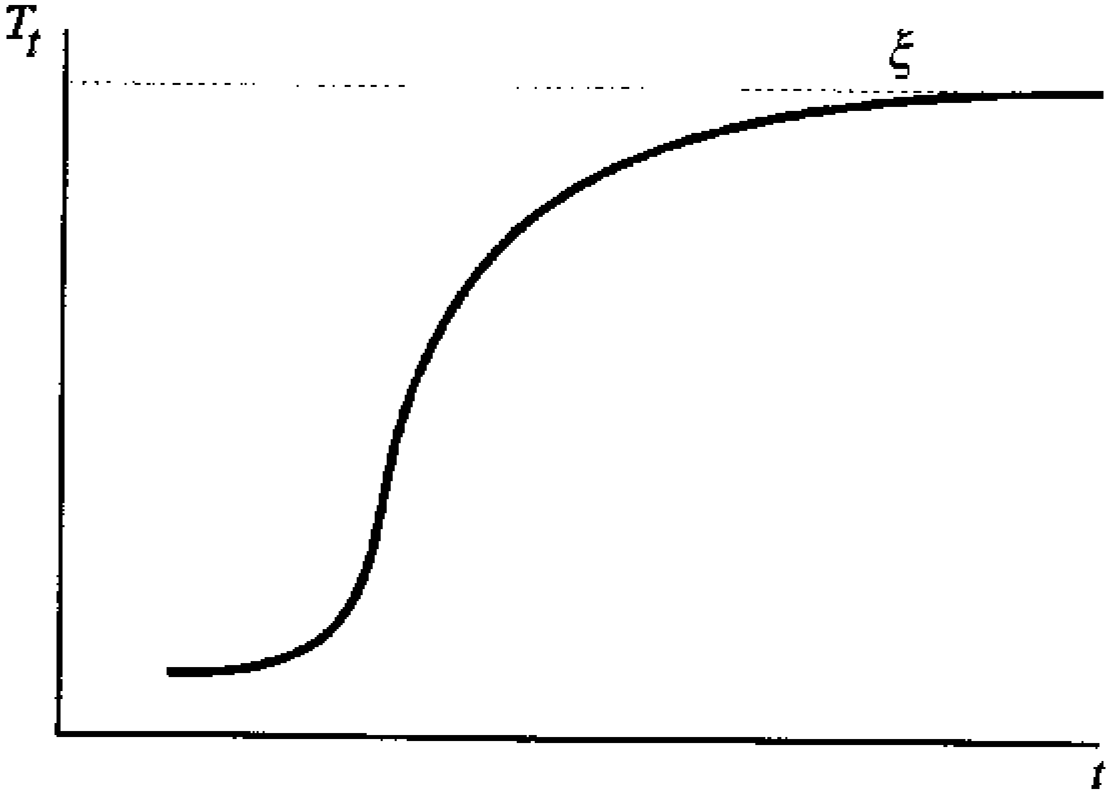
$$y_t = \frac{1}{k + b_0 \cdot b_1^t}$$



Křivka má tři úseky, první je charakterizován pozvolným vzestupem, druhá v okolí inflexního bodu prudkým růstem a třetí určitou vrcholovou stagnací. (patří mezi tzv. S-křivky).

Gompertzova křivka

$$y_t = k \cdot b_0^{b_1^t}$$



Křivka s podobným esovitým průběhem jako logistika, ale na rozdíl od ní je asymetrická. Těžiště hodnot je až za inflexním bodem.

Verifikace modelu

Je zapotřebí zhodnotit statistickou **významnost** odhadnutých **parametrů** modelu i **modelu** jako celku.

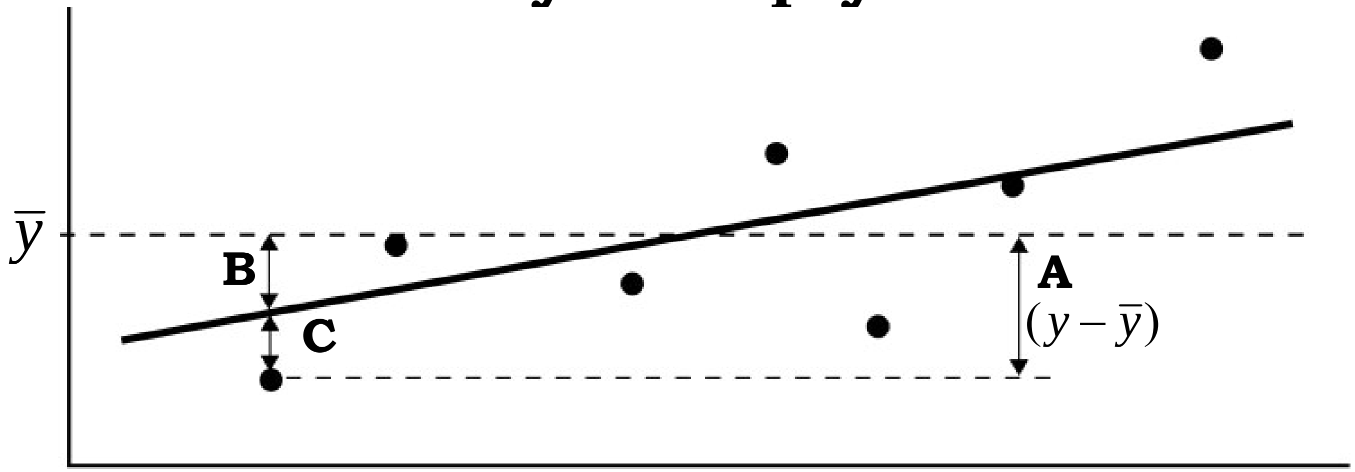
MNČ – podstatou je, že model vždy vysvětlí pouze **část** variability (proměnlivosti) pozorovaných dat.

Je nutné zjistit (testovat), zda model jako celek dává lepší vysvětlení, než je možné očekávat jako důsledek náhody a to na jisté hladině významnosti.

Koeficient determinance R^2 – základní ukazatel vhodnosti použitého modelu (vzorec a interpretace viz. korelační počet)

Analýza rozptylu

Analýza rozptylu



$$s_y^2 = s_{\hat{y}}^2 + s_{y-\hat{y}}^2$$

A. Rozptyl empirických hodnot (celkový)

$$s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})^2$$

B. Rozptyl vyrovnaných hodnot (modelový)

$$s_{\hat{y}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t - \overline{y})^2$$

C. Rozptyl reziduální

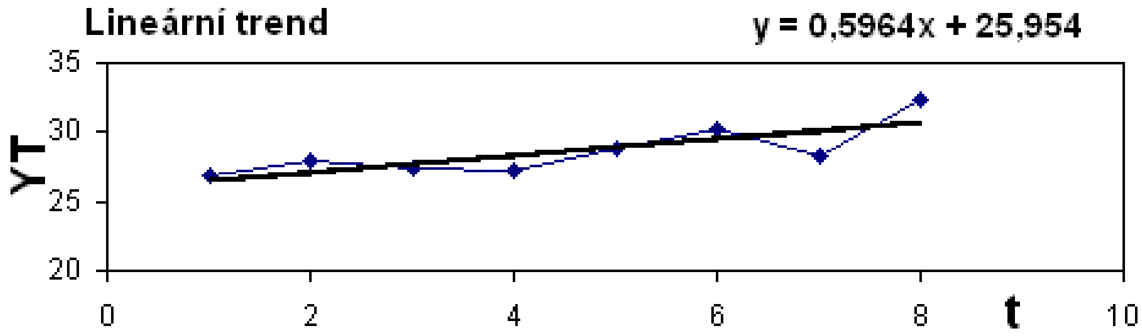
$$s_{y-\hat{y}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_i - \hat{y}_t)^2$$

Interpretace výsledků analýzy rozptylu

Model vysvětluje více než 63 % proměnlivosti studované charakteristiky v čase

VÝSLEDEK

Regresní statistika	
Násobné R	0,797711
Hodnota spolehlivosti R	0,636343
Nastavená hodnota spolehlivosti R	0,575733
Chyba stř. hodnoty	1,192911
Pozorování	8



ANOVA

p-hodnota

	Rozdíl	SS	MS	F	Významnost F
Regrese	1	14,94054	14,94054	10,49905085	0,017681891
Rezidua	6	8,538214	1,423036		
Celkem	7	23,47875			

	Koeficienty	Chyba stř. hod.	t stat	Hodnota P	Dolní 95%	Horní 95%	Dolní 95,0%	Horní 95,0%
Hranice	25,95357	0,929508	27,92182	1,39605E-07	23,67914451	28,228	23,67914	28,228
t	0,596429	0,18407	3,240225	0,017681891	0,146024926	1,046832	0,146025	1,046832

Interpretace: p < 0,05 - existuje statisticky významný rozdíl mezi rozptylem vysvětleným regresní přímkou (tedy modelem trendu) a zbytkovým (reziduálním) rozptylem – zvolený model trendu je vhodný

Kritéria pro volbu vhodného modelu trendové funkce I.

A. Volba vhodné trendové funkce by v prvé řadě měla vycházet z **věcné analýzy zkoumaného jevu**.

Ta nám umožní zaměřit se na určité typy (skupiny) funkcí či některé jiné předem vyloučit – jde o funkci rostoucí či klesající, má inflexní bod či je nekonečně rostoucí.

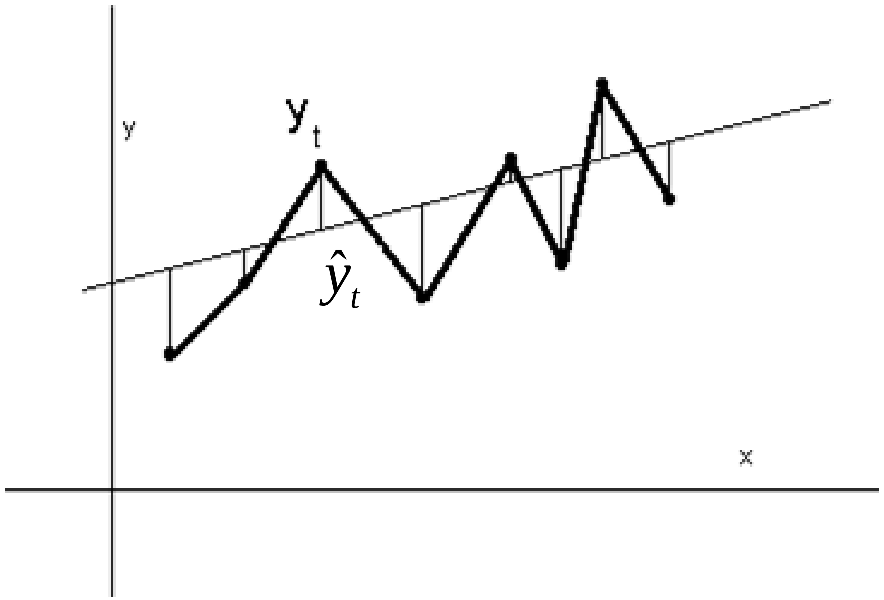
Pro použitou trendovou funkci je důležité, zda má (logistický trend) či nemá (lineární trend – růst řady není ničím omezen) asymptotu. Je to důležité pro předpovídání chování časové řady.

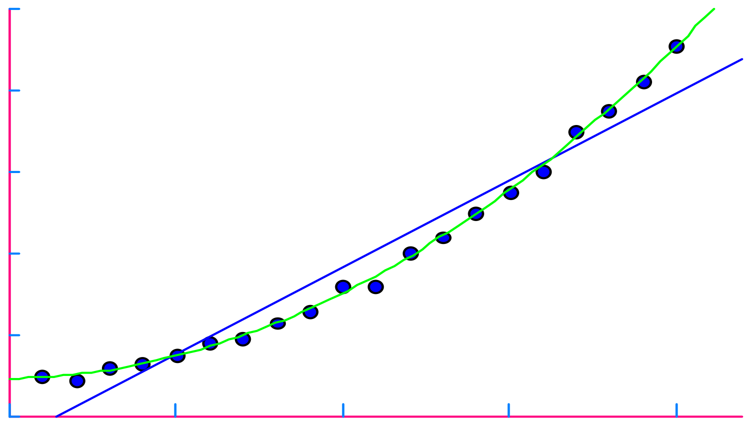
Kritéria pro volbu vhodného modelu trendové funkce II.

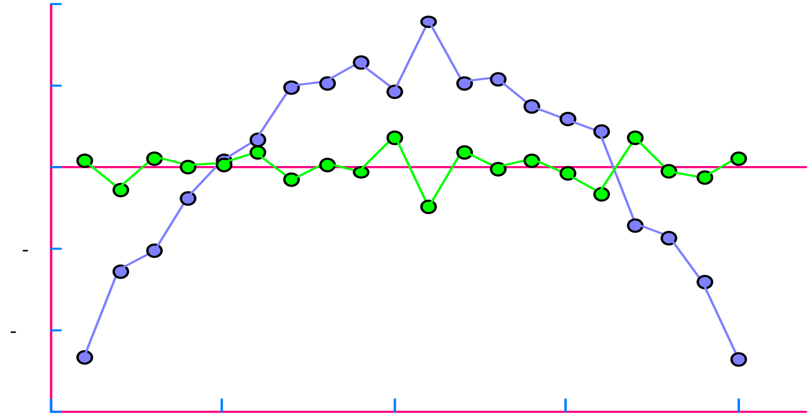
B. **Analýza grafu** časové řady a **analýza reziduí**.

y_t – empirické hodnoty

$\hat{y}_t$ – teoretické hodnoty – vyrovnané trendovou funkcí







Objektivní kritéria pro volbu vhodného modelu trendové funkce I

Spočívají v minimalizaci předem zvoleného kritéria (jako v případě regresní analýzy). Za toto kritérium se nejčastěji bere součet čtverců odchylek empirických hodnot y_t od hodnot vyrovnaných $\hat{y}_t$ (**součet čtvercových chyb**):

$$SSE = \sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \hat{y}_t \right)^2$$

Z uvažovaných funkcí se vybírá ta s nejmenší hodnotou reziduálního součtu čtverců.

POZOR – jde o formální kritérium. Např. použijeme-li polynom vysokého stupně, může být reziduální součet čtverců i nulový, avšak zcela nepoužitelný.

Objektivní kritéria pro volbu vhodného modelu trendové funkce II

Druhým kritériem je tzv. **index korelace**, jehož vzorec lze zapsat následujícím způsobem:

$$I = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2}}$$

Čitatel zlomku – suma odchylek vyrovnaných hodnot od hodnot empirických

Jmenovatel zlomku - suma odchylek vyrovnaných hodnot od průměru empirických hodnot

Za nejvhodnější se považuje funkce s největší hodnotou indexu korelace. K jeho používání však platí stejné výhrady jako k výše uvedenému kritériu

Objektivní kritéria pro volbu vhodného modelu trendové funkce III

Počítačové programy obvykle nabízejí následující míry úspěšnosti zvolené trendové funkce:

Střední chyba odhadu (M.E. – Mean Error)

$$M.E. = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{y}_t\right)}{n}$$

Střední čtvercová chyba odhadu (M.S.E. – Mean Square Error)

$$M.S.E. = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2}{n}$$

Je to nejpoužívanější kritérium.

Střední absolutní chyba odhadu (M.A.E. – Mean Absolute Error)

$$M.A.E. = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left| y_t - \hat{y}_t \right|}{n}$$

Střední absolutní procentní chyba odhadu (M.A.P.E. – Mean Absolute Percentage Error)

$$M.A.P.E. = \sum \left(\frac{\left| y_t - \hat{y}_t \right|}{y_t} \right) \cdot \frac{100}{n}$$

Střední procentní chyba odhadu (M.P.E. – Mean Percentage Error)

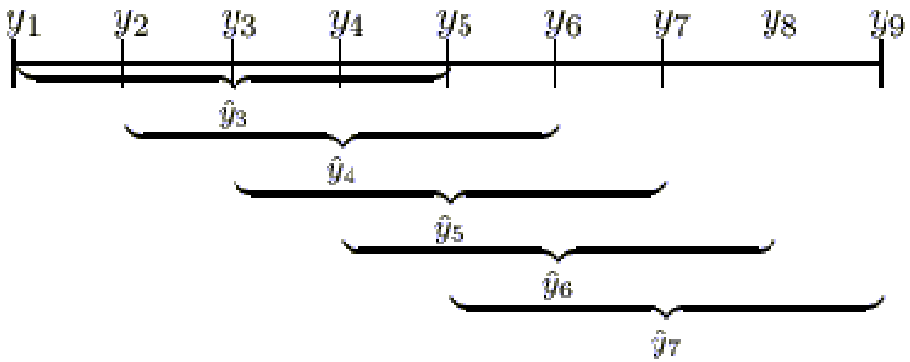
$$M.P.E. = \sum \left(\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right) \cdot \frac{100}{n}$$

Informativní testy pro volbu vhodné trendové křivky:

Trend	**Informativní test**
lineární	První diference (y_{t+1} - y_t) jsou přibližně konstantní
kvadratický	Druhé diference (y_{t+2} - $2y_{t+1}$ + y_t) jsou přibližně konstantní
exponenciální	Podíly sousedních hodnot (y_{t+1}/y_t) resp. První diference logaritmů tvaru ($\log y_{t+1}$ - $\log y_t$) jsou přibližně konstantní
logistický	Křivka prvních diferencí (y_{t+1}-y_t) se podobá křivce normální hustoty, podíly ($(1/y_{t+2} - 1/y_{t+1})/(1/y_{t+1} - 1/y_t)$) jsou přibližně konstantní
Gompertzova křivka	Podíly ($(\log y_{t+2} – \log y_{t+1})/(\log y_{t+1} – \log y_t)$) jsou přibližně konstantní

Mechanické vyrovnávání trendu metodami klouzavých průměrů

Používá se v případě, že se trend mění a nelze ho vyrovnat „globálně“ jednou matematickou křivkou. Metoda je vhodná pro neperiodické řady, neumožňuje extrapolaci hodnot.



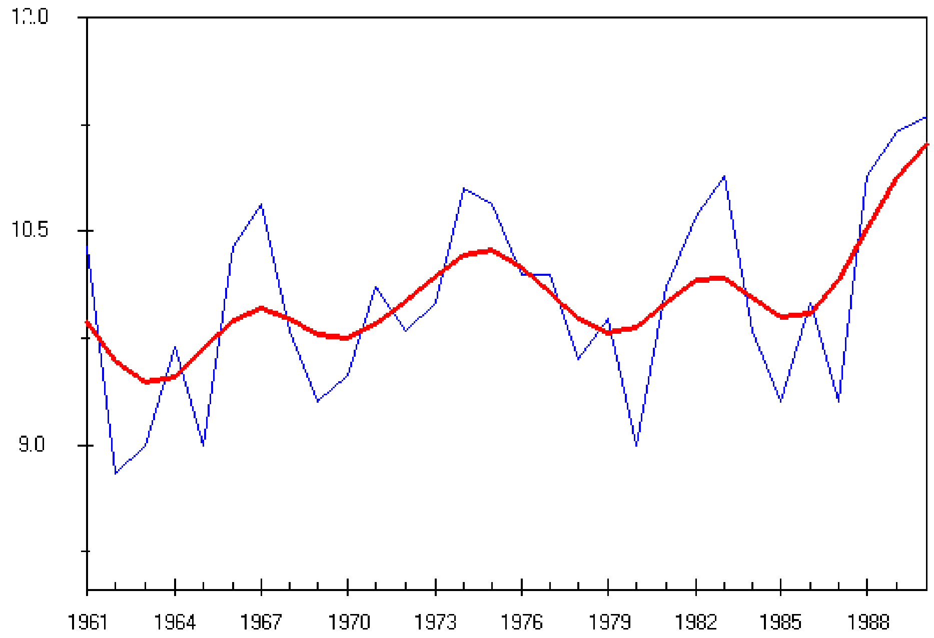
Vlastní průměry se používají jako **prosté** či **vážené**.
V některých případech lze použít klouzavých mediánů.
Klouzavé průměry mohou být **necentrované** a **centrované**

Metody klouzavých průměrů

Jako klouzavé průměry obecně označujeme lineární kombinace členů původní řady, např.:

$$\frac{1}{8}(y_{t-2} + 2y_{t-1} + 2y_t + 2y_{t+1} + y_{t+2})$$

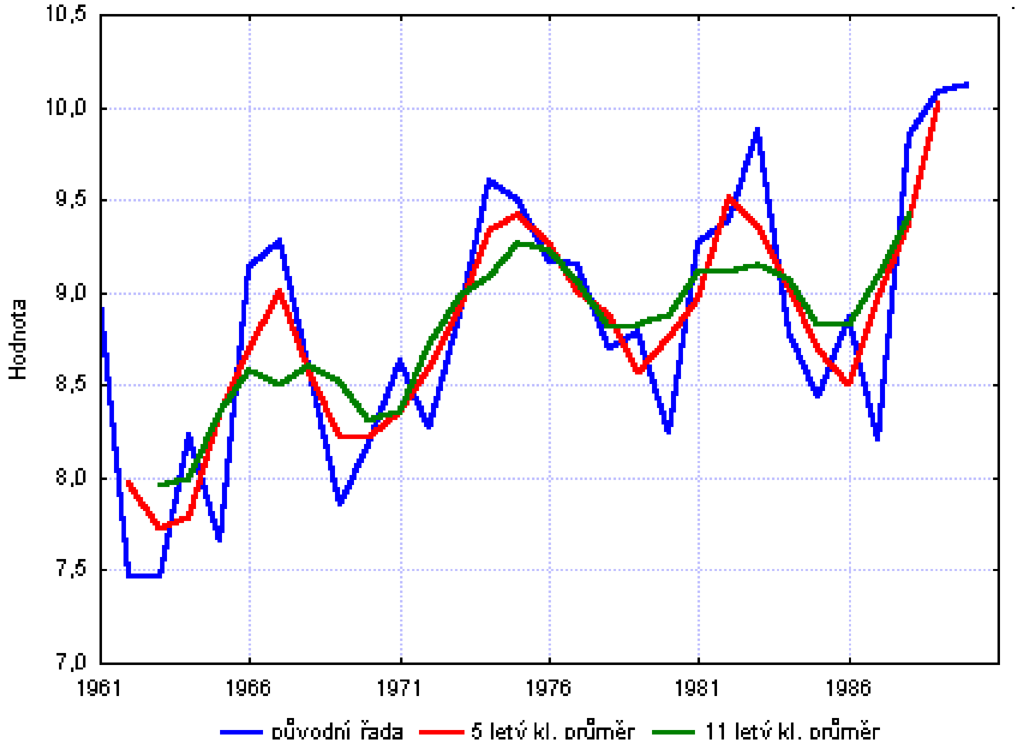
Patří mezi tzv. **adaptivní** přístupy k trendové složce časové řady.



Tzv. **polynomické** klouzavé průměry umožňují vyrovnání hodnot na počátku a konci časové řady

Volba řádu klouzavých průměrů

- Subjektivní posouzení charakteru dat
- Délka klouzavých průměrů by měla odpovídat periodě sezónních či cyklických fluktuací
- Vzorce pro výpočet optimální délky



Obsahuje-li řada sezónní složku, je vhodné volit řád klouzavých průměrů tak, aby zahrnoval celou délku periody sezónní složky.

Centrované klouzavé průměry

Ve většině případů se používají klouzavé průměry liché délky, u **sudé délky** je problém s přiřazením hodnot časovému okamžiku.

V ekonomických časových řadách, které často obsahují sezónní složku délky 4 (řady čtvrtletních hodnot) či 12 (řady měsíčních hodnot), se tento problém řeší tzv. **centrováním**.

Výsledné klouzavé průměry pro sudou délku klouzavé části vypočteme jako **průměry dvou sousedních klouzavých průměrů** liché délky.

Centrované klouzavé průměry

Příklad: Abychom vystihli roční chod určitého ukazatele, chceme pro řadu měsíčních hodnot použít klouzavých průměrů délky 12.

Shlazená hodnota však spadá doprostřed mezi „červen“ a „červenec“. Další shlazená hodnota pak mezi „červenec“ a „srpen“.

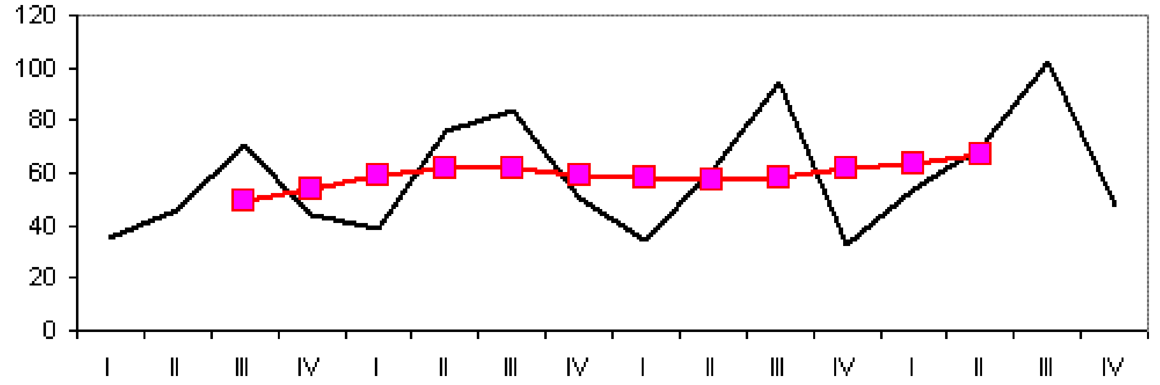
Tyto dva jednoduché klouzavé průměry vezmeme a zprůměrňujeme. Výsledek pak už můžeme přiřadit k „červencové“ hodnotě. Tedy vytváříme klouzavé průměry o délce 13:

$$\hat{y}_t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}(y_{t-6} + y_{t-5} + \ldots + y_{t+5}) + \frac{1}{12}(y_{t-5} + y_{t-4} + \ldots + y_{t+6})\right) =$$

$$\frac{1}{24}(y_{t-6} + 2y_{t-5} + 2y_{t-4} + \ldots + 2y_{t+5} + y_{t+6})$$

Centrované klouzavé průměry

1998	I	35		
	II	46	49,0	
	III	71	50,0	**49,5**
	IV	44	57,5	**53,8**
1999	I	39	60,8	**59,1**
	II	76	62,3	**61,5**
	III	84	61,0	**61,6**
	IV	50	57,3	**59,1**
2000	I	34	59,8	**58,5**
	II	61	55,5	**57,6**
	III	94	60,5	**58,0**
	IV	33	62,8	**61,6**
2001	I	54	64,8	**63,8**
	II	70	68,5	**66,6**
	III	102		
	IV	48		



Obecně místo jednoduchých klouzavých průměrů délky 2m vytváříme centrované klouzavé průměry délky 2m+1 podle tohoto obecného vzorce:

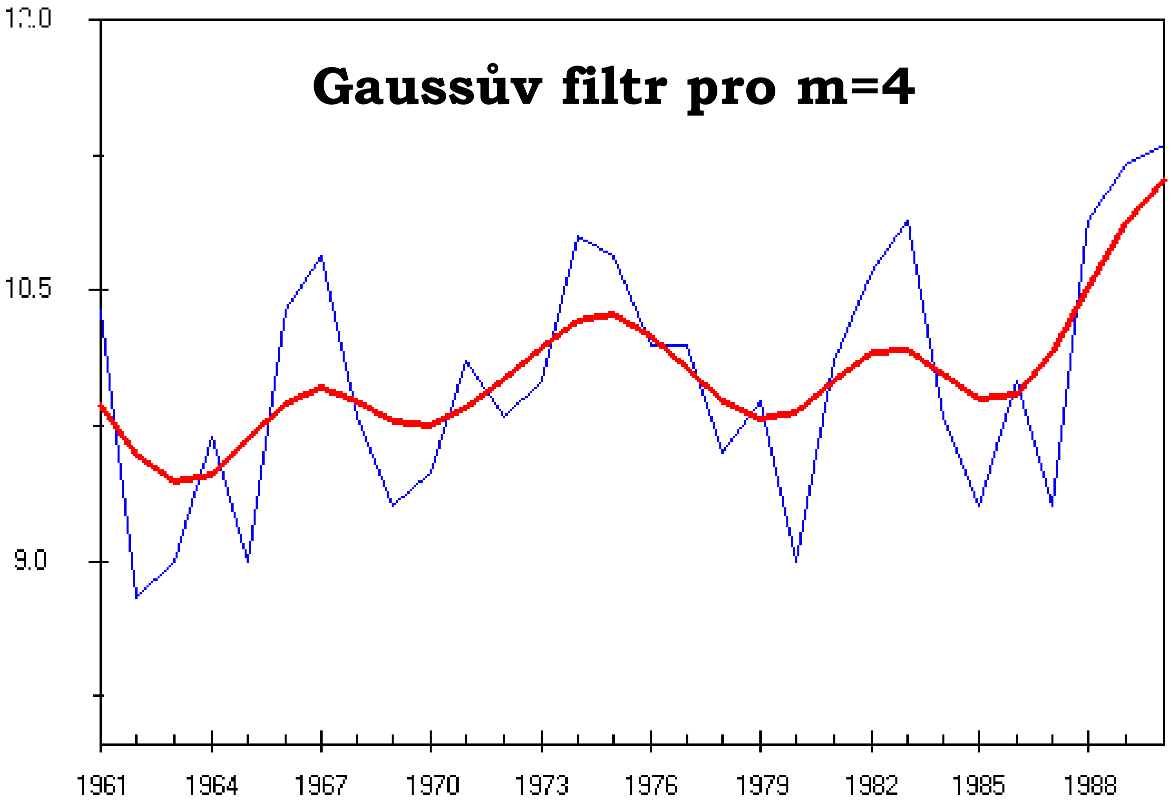
$$\hat{y}_t = \frac{1}{4m}(y_{t-m} + 2y_{t-m+1} + \ldots + y_{t+m-1} + y_{t+m})$$

Vážené klouzavé průměry

• Jednotlivé členy úseku řady přiřazeny váhy.

• Tyto váhy většinou lineárně klesají směrem od středního (vyrovnávaného) členu.

• Váhy mohou mít také např. podobu tzv. gaussova filtru.



Člen řady	váha
y_{t-4}	0,014
y_{t-3}	0,048
y_{t-2}	0,117
y_{t-1}	0,201
y_{t}	0,241
y_{t+1}	0,201
y_{t+2}	0,117
y_{t+3}	0,048
y_{t+4}	0,014

Analýza sezónní složky časových řad (sezónní očišťování)

1. klasický přístup k sezónní dekompozici
2. úvod do autokorelační analýzy

Sezónní složka S_t je typická pro časové řady, jejichž interval pozorování je kratší než jeden rok (sezóna může mít délku týden, měsíc, roční období).

Objevuje se v řadách ekonomických (tržby, produkce, …), ale i v řadách meteorologických prvků (roční chod teploty vzduchu).

Řada obsahující sezónní složku se vyznačuje pravidelným opakováním hodnot kolem trendu a toto opakování může mít délku např. 7 dnů (do týdne), 12 měsíců či 4 roční období (do roku).

Sezónní složka může mít aditivní resp. multiplikativní charakter

Obecný model řady při sezónním očišťování

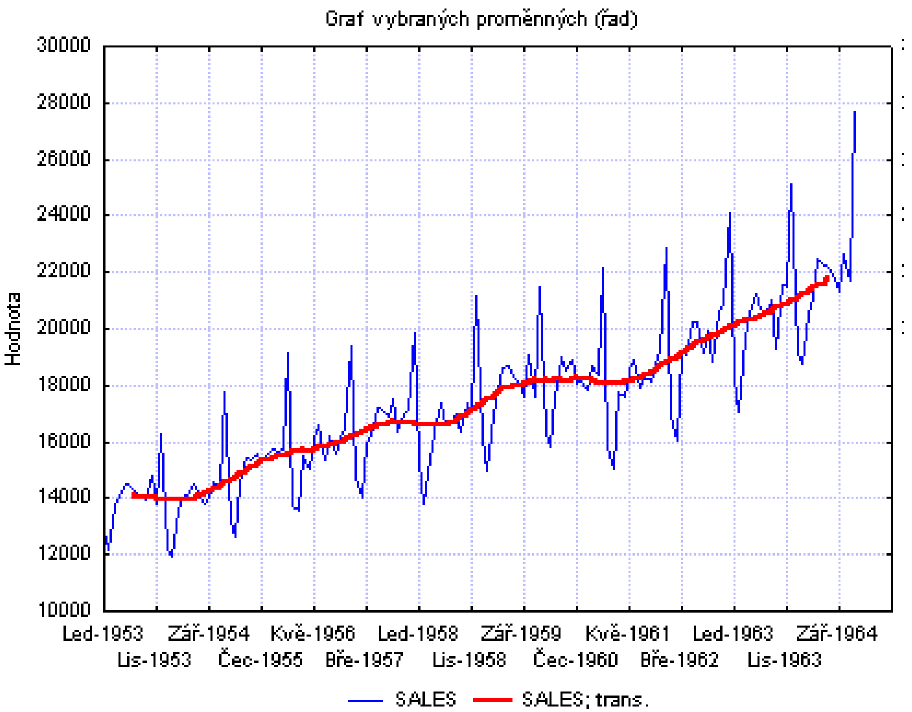
Trendovou a cyklickou složku považujeme za jeden celek. Cyklickou složku označujeme jako „střednědobý“ trend:

aditivní model: $$Y_t = TC_t + S_t + \varepsilon_t$$

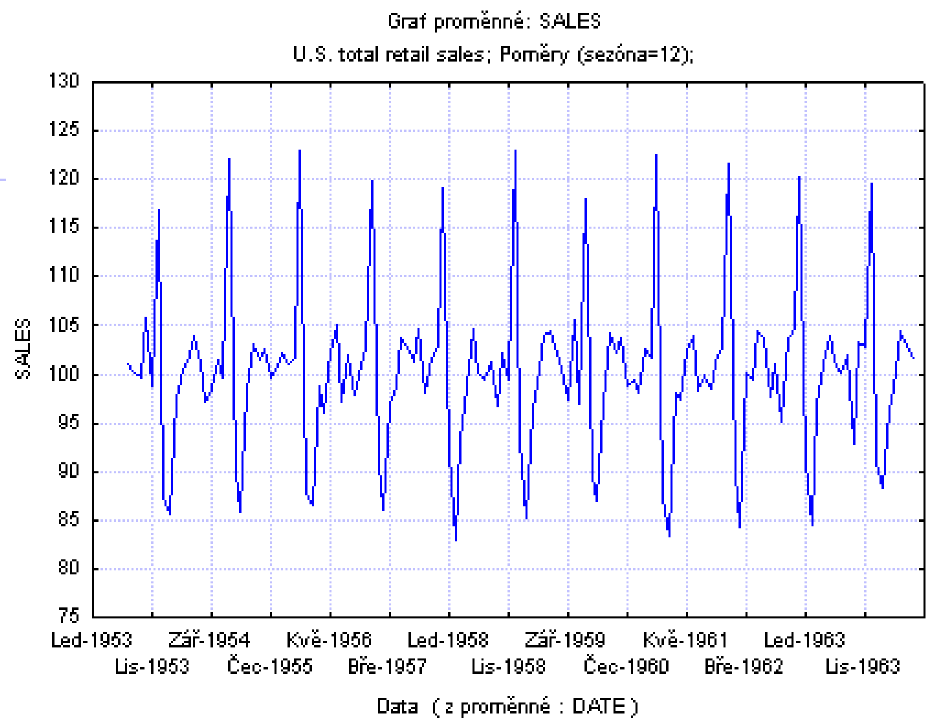
multiplikativní model: $$Y_t = TC_t \cdot S_t \cdot \varepsilon_t$$

Y_t je pozorovaná hodnota časové řady v čase t.

Jednotlivé kroky analýzy sezónní složky

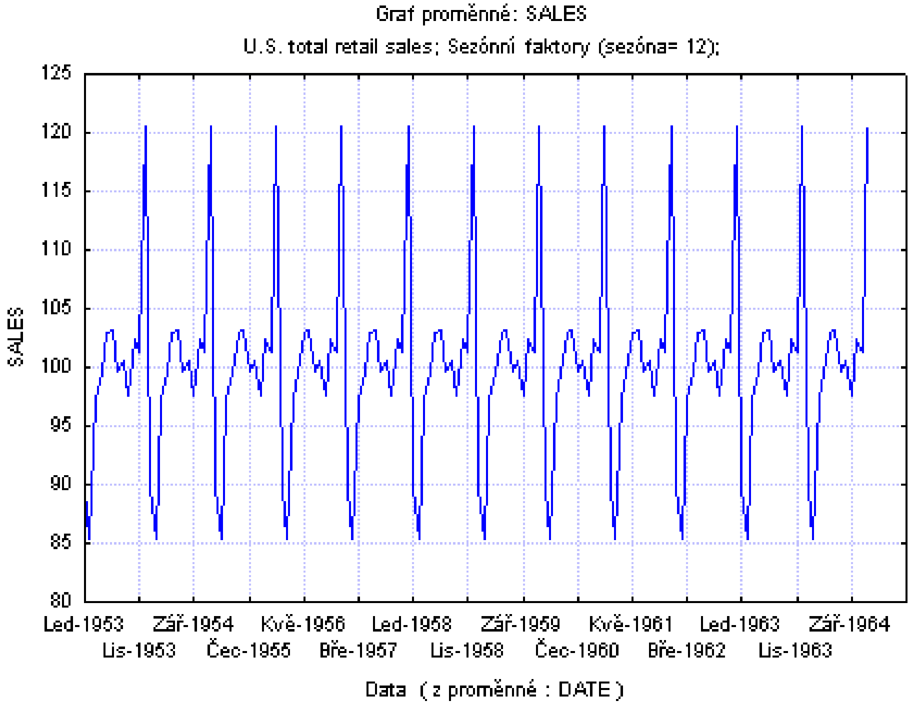


1. Z **originální** řady obsahující sezónní složku je vypočtena řada **klouzavých průměrů** s délkou klouzavých průměrů rovnou délce sezónní složky.



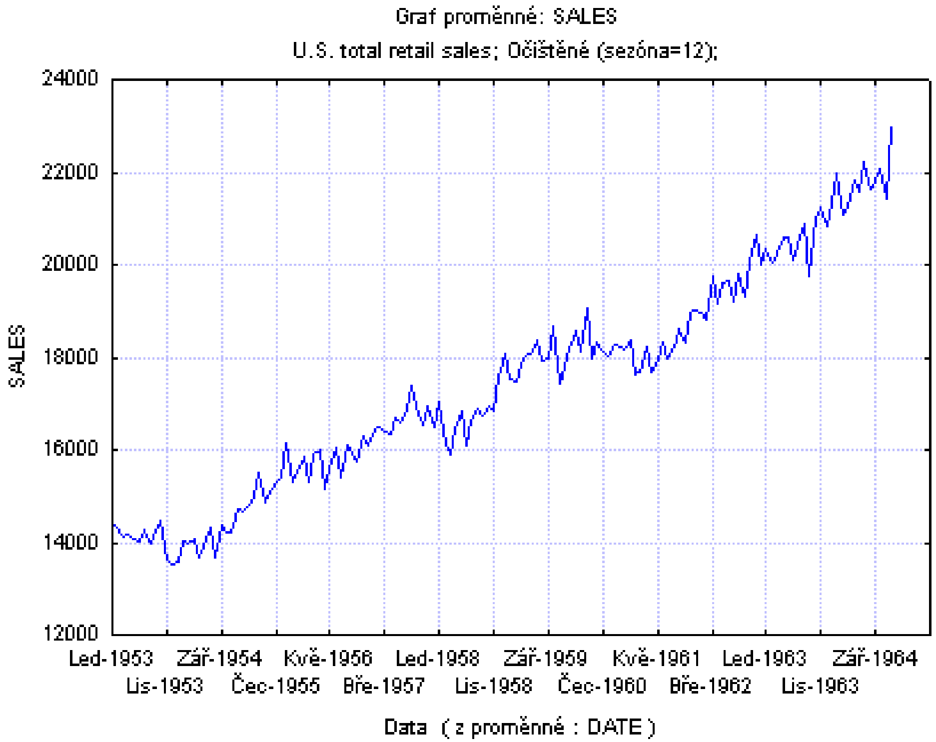
2. Vytvoříme novou řadu jako rozdíl (aditivní model) resp. **podíl** (multiplikativní model) **řady původní a řady shlazené**.

Jednotlivé kroky analýzy sezónní složky

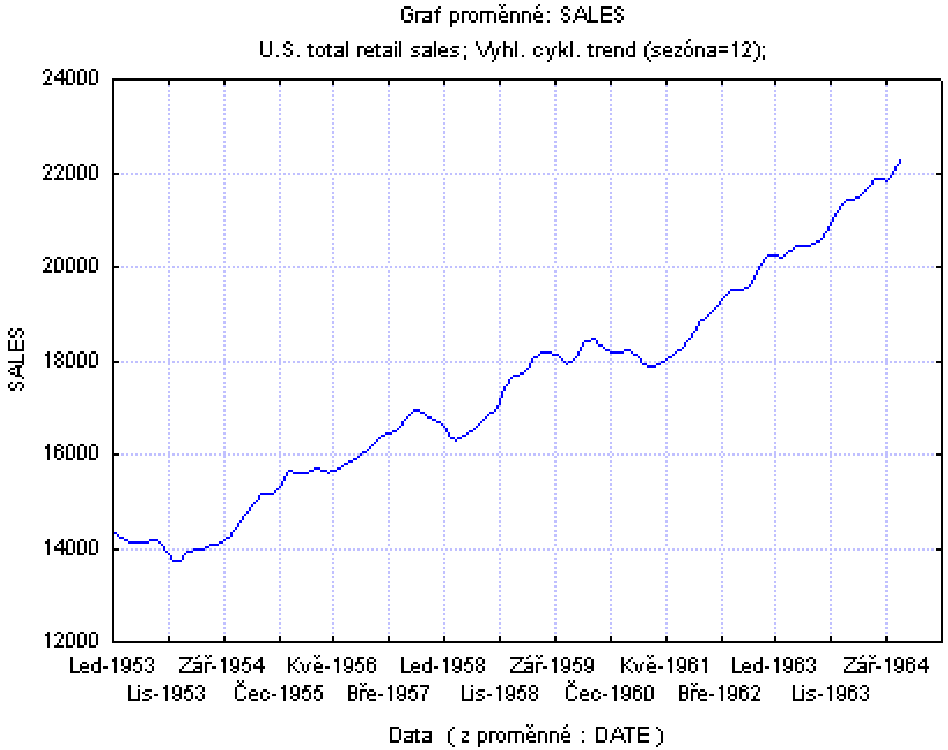


3. Tzv. **sezónní komponenty** jsou vypočteny jako průměr pro každý člen v rámci sezóny. Výsledné hodnoty představují průměrnou sezónní složku v časové řadě.

4. Sezónně očištěná řada (tedy řada obsahující vedle náhodné složky ještě složku TC_t) se potom vyjádří jako rozdíl (resp. podíl) řady originální a sezónní komponenty.

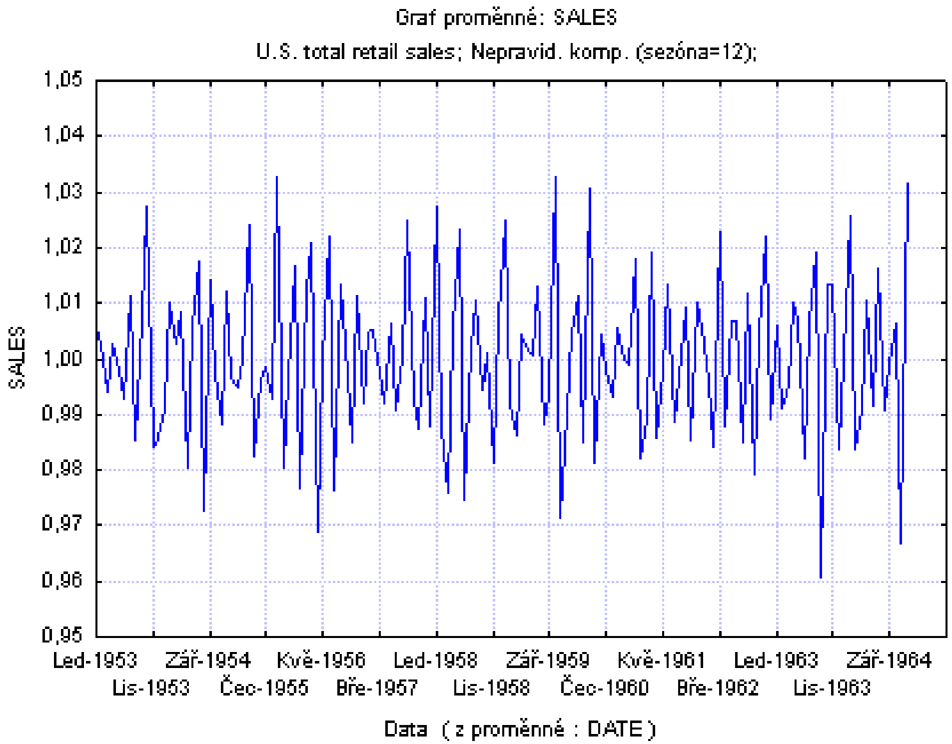


Jednotlivé kroky analýzy sezónní složky



5. Složka *TC_t* se většinou aproximuje řadou shlazenou váženým klouzavým průměrem délky 5 se symetrickými vahami (1, 2, 3, 2, 1).

6. Obdobně lze izolovat **náhodnou složku** jako rozdíl (resp. podíl) řady sezónně očištěné a řady se zvýrazněnou složkou TC_t (viz. bod 5).



Autokorelace časových řad

Autokorelační analýza - metoda, kterou lze zkoumat vzájemné vztahy mezi hodnotami jedné časové řady.

Může sloužit jako metoda k definování sezónní a cyklické složky časových řad.

Jejím základem je výpočet **autokorelačního koeficientu**, resp. **autokorelační funkce**.

Autokorelační koeficient

Autokorelační koeficient r_k je relativní míra proměnlivosti členů časové řady posunutých o určitou hodnotu k. Definuje vztah mezi členy časové řady y_t a y_{t+k}.

Posun k se z angličtiny označuje jako **lag**. Je to tedy korelační koeficient vypočtený mezi jednotlivými členy časové řady, mezi kterými je k-1 jiných pozorování tedy *lag* = k a označujeme ho jako autokorelační koeficient k-tého řádu.

Pro $k = 0$ je hodnota $r_0 = 1$ - je to vlastně hodnota korelačního koeficientu.

Základní pojmy

Rozptyl (variance) – míra variability (proměnlivosti) statistického znaku *x*

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

Kovariance – absolutní míra vzájemné variability dvou statistických znaků *x; y*

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n-1}$$

Korelace - relativní míra vzájemné variability dvou statistických znaků *x; y*

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

Základní vztahy

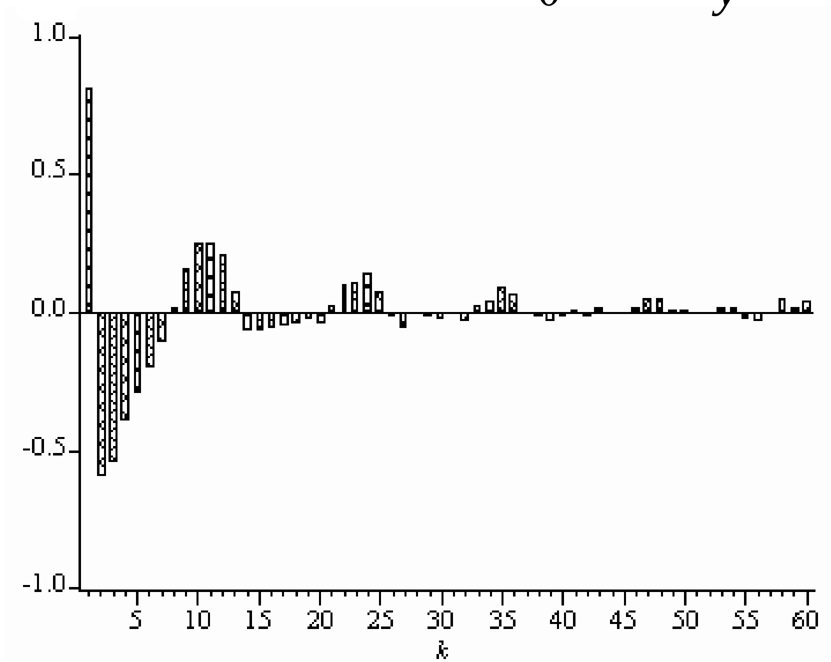
Autokovariance – absolutní míra proměnlivosti členů časové řady *y* posunutých o určitou hodnotu *k*.

$$c_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k}(y_i - \bar{y})(y_{i+k} - \bar{y})}{n-k-1}$$

Autokorelace – relativní míra proměnlivosti členů časové řady *y* posunutých o určitou hodnotu *k*.

$$r_y(k) = \frac{c_k}{c_0} = \frac{c_k}{s_y^2}$$

Autokorelační funkce – hodnoty $r_y(k)$ pro $k=1,2,\ldots M$, kde $M < N/2$, N – délka řady



Autokorelační funkce

Autokorelační funkce (ACF) je potom závislost mezi hodnotami autokorelačního koeficientu a hodnotami posunu k.

Vyjadřuje se formou grafu – tzv. **korelogramu** (viz. obrázek). Na ose x jsou hodnoty lag (k), na ose y hodnoty autokorelačního koeficientu.

Hodnoty autokorelační funkce se pohybují v intervalu –1,1.

ACF je vhodným nástrojem k posouzení, zda časová řada obsahuje cyklickou či periodickou složku a také zda je či není řadou náhodných čísel – tedy do jaké míry je možné ji extrapolovat (předpovídat).

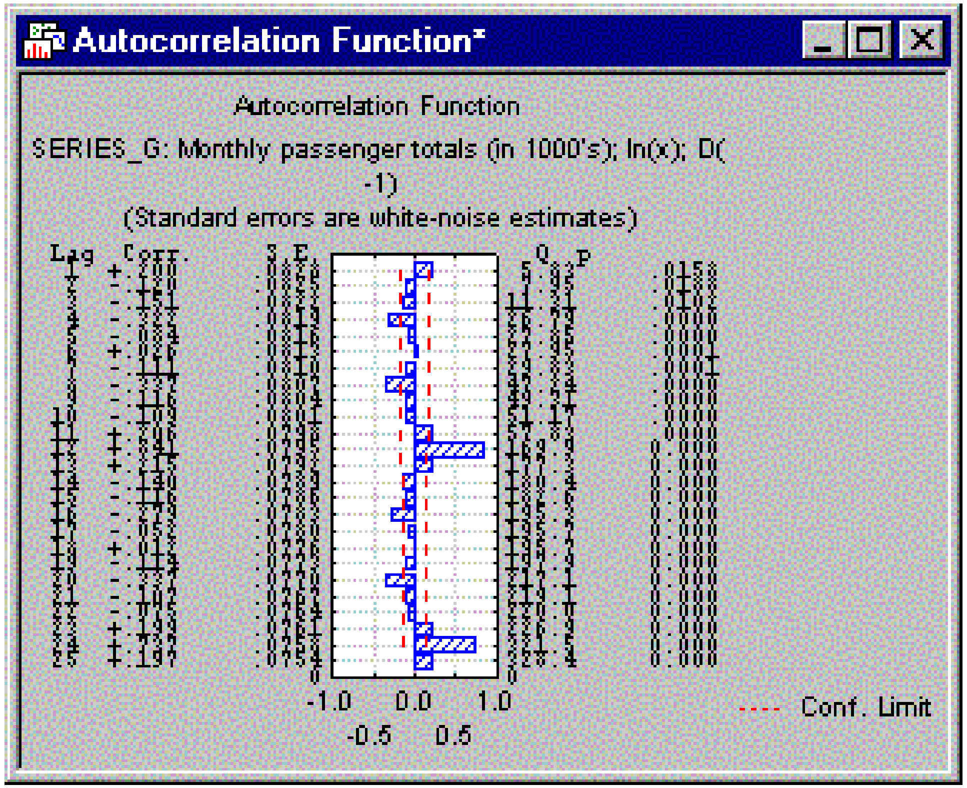
Interpretace ACF I

Korelogram bývá doplňován intervaly spolehlivosti, kterými lze hodnotit statistickou významnost autokorelačních koeficientů.

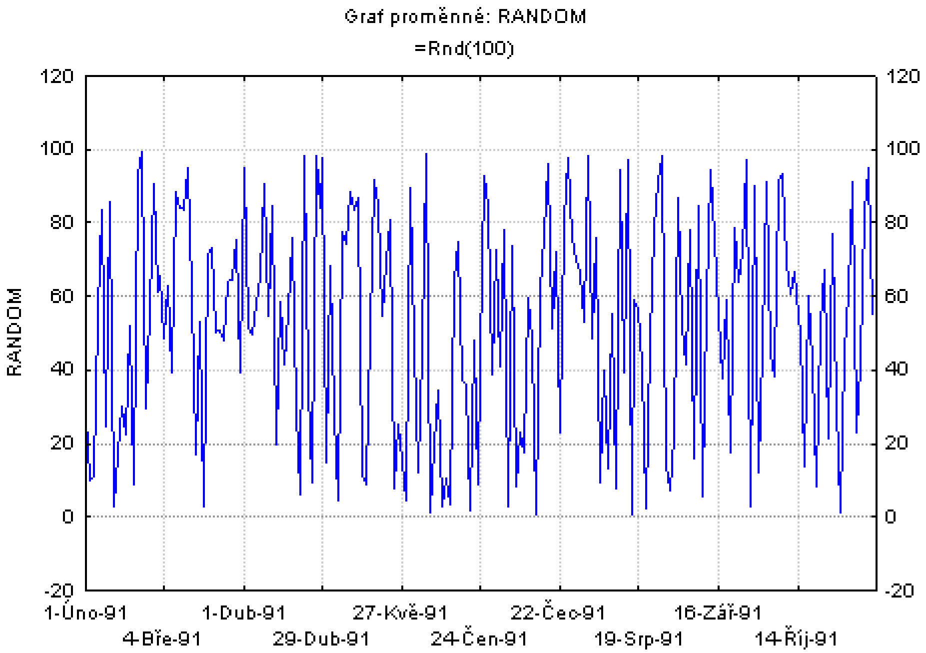
95 % interval spolehlivosti ACF lze z dostatečnou přesností zkonstruovat ze vztahu:

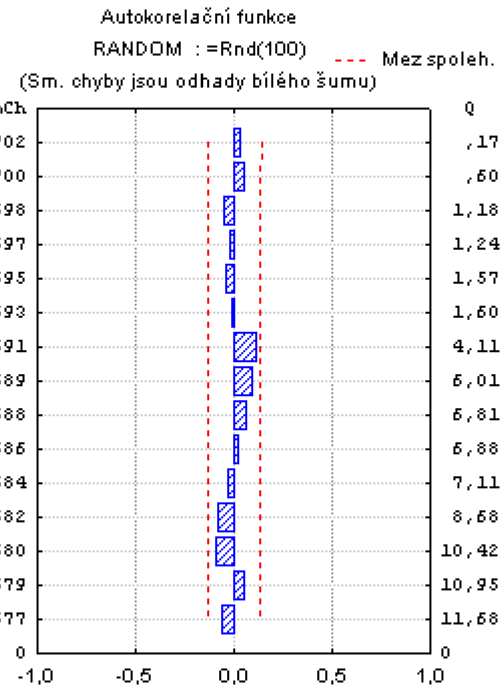
$$\pm 2 / \sqrt{N}$$

***N* – délka časové řady**



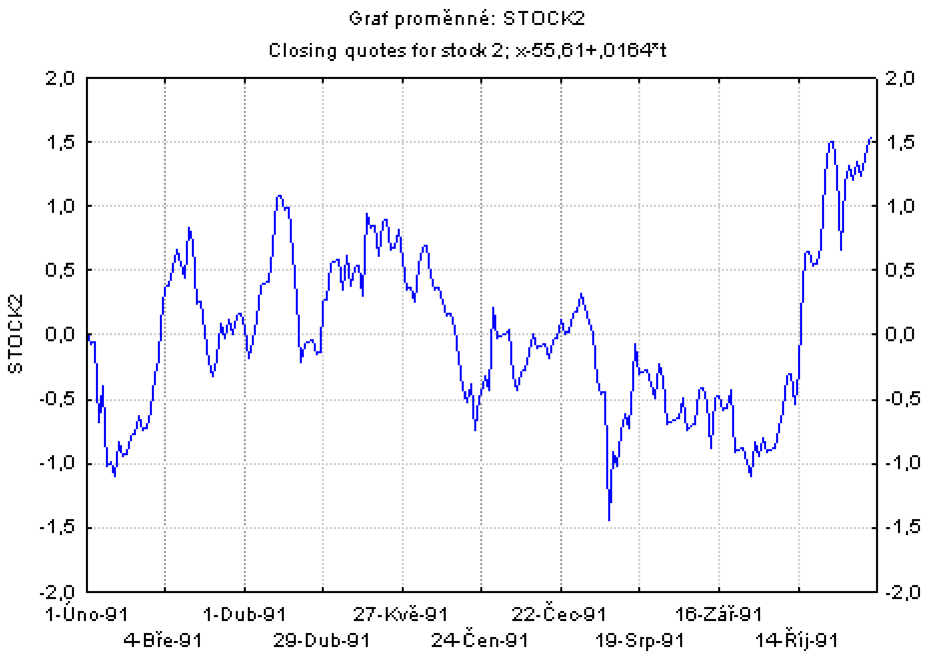
Časová řada náhodných čísel (bílý šum) a její autokorelační funkce

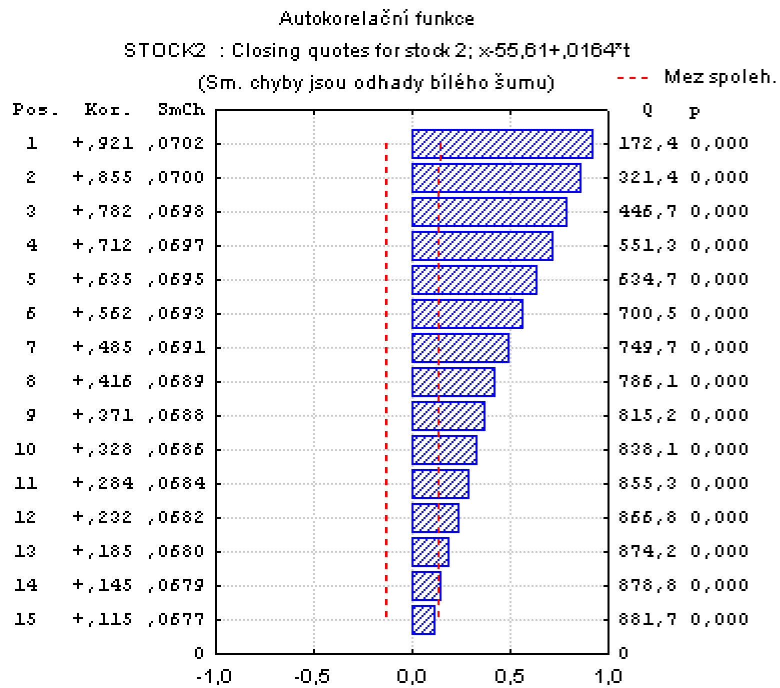




Pos.	Kor.	SmCh	Q	p
1	+,029	,0702	,17	,6786
2	+,046	,0700	,60	,7409
3	-,053	,0698	1,18	,7584
4	-,017	,0697	1,24	,8717
5	-,040	,0695	1,57	,9050
6	-,011	,0693	1,60	,9529
7	+,110	,0691	4,11	,7669
8	+,095	,0689	6,01	,6459
9	+,061	,0688	6,81	,6568
10	+,018	,0686	6,88	,7368
11	-,033	,0684	7,11	,7897
12	-,085	,0682	8,68	,7301
13	-,090	,0680	10,42	,6597
14	+,049	,0679	10,95	,6902
15	-,058	,0677	11,68	,7034

Časová řada bez periodické složky se silnou autokorelací a její autokorelační funkce





Časová řada obsahující výraznou sezónní složku a její autokorelační funkce