Statistické metody v ochraně kulturního dědictví

Lubomír Prokeš

Data a práce s nimi

- 1) sběr a zpracování dat (tvorba databáze)
- 2) analýza dat (výběr a použití vhodné metody)
- 3) prezentace výsledků (špatná presentace dat může vést k chybným závěrům)
- 4) metaanalýza (srovnávání výsledků z různých publikací)

Pozor !!!

Nepoučený uživatel může často založit zásadní rozhodnutí na základě

1) volby nesprávné metody statistické analýzy, která poskytne nesmyslné výsledky

2) nesprávné interpretace správných výsledků

Statistika

= nauka o tom, jak získat informace z numerických dat.

- 1) ***Získávání dat***. Zahrnuje metody pro sběr dat, jež zodpoví předem danou otázku. Základní přístupy k výběru měřených objektů, návrhu experimentů (experimental design) a validaci instrumentů pro získávání dat.
- 2) ***Analýza dat***. Zahrnuje organizaci dat a jejich popis užitím grafů a numerických souhrnů (popisná statistika, průzkumová analýza dat (EDA)).
- 3) ***Statistické usuzování (inference).*** Usiluje o získání závěrů o širším univerzu jevů na základě analýzy dat, včetně zhodnocení spolehlivosti těchto závěrů, k čemuž využívá pravděpodobnostní pojmy (statistická inference, statistická indukce).

Statistický software

WYSIWYG: **MS Excel**, STATISTICA, SPSS, NCSS Kyplot, **PAST**, aj.

ne WYSIWYG: MATLAB, S+, **R**, SciPy

Typy dat

Kvalitativní (nominální):

lze sledovat jen identitu (=) a odlišnost (≠).

- ***alternativní (dichotomické)*** – znak má pouze dvě varianty (ano / ne).

- ***množné (polytomické)*** – znaky s větším počtem variant.

Typy dat

- ***Kvantitativní znaky***

- 1) ***pořadové (ordinální) znaky***.

  jejich varianty jsou uspořádané podle intenzity sledovaného znaku.

- ***porovnávací***: není předem daná pořadová stupnice, varianty se třídí podle míry zastoupení (intenzity) sledovaného znaku
- ***zařazovací***: předem se vymezí pořadí variant, tj. zadá se jejich „stupnice“.

Typy dat

- ***Kvantitativní znaky***

- ***2) číselné (kardinální) znaky.***

  Měřitelné znaky, jejichž varianty lze vyjádřit číselnou hodnotou.

- ***intervalové.-*** nemají smysluplnou nulu

- ***podílové (poměrové). -*** mají smysluplnou nulu

Typy dat

Kvantitativní data

Diskrétní: nabývají konečně mnoha hodnot (např. četnosti)

Spojitá: nabývají hodnot všech reálných čísel v daném intervalu (např. rozměry)

- Typ dat je nutno respektovat při výběru metod analýzy dat !!

Transformace dat

poměrové → intervalové → pořadové → nominální.

- „Dummy variables“:

- *Heavisidova funkce*:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x > 0 \\ 0 & \text{když } x \leq 0 \end{cases}$$

Transformace dat

- *Absolutní četnost* (n_i) = počet případů, v nichž se určitá hodnota x_i vyskytne ve statistickém souboru.

- *Relativní četnost* (f_i) = podíl případů z celkového rozsahu souboru, v nichž se hodnota x_i vyskytne ve statistickém souboru.

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

Transformace dat

- *Třídní (skupinové, intervalové) četnosti* = kvantitativní znaky rozdělíme na intervaly a všechna pozorování z téhož intervalu nahradíme jedinou hodnotou, nejčastěji průměrem z nejnižší a nejvyšší hodnoty v dané třídě.

Počet tříd má vliv na přesnost výpočtu ukazatelů a pracnost výpočtů. Čím je počet tříd menší, tím je délka intervalů větší a tím jsou výpočty méně přesné.

Transformace dat

- **Transformace do pořadí**: převádí hodnoty x_i podle velikosti do intervalu i = 1 až n. Stejným hodnotám přiřazujeme průměrné pořadí, které této skupince hodnot odpovídá.

Popisná statistika I.

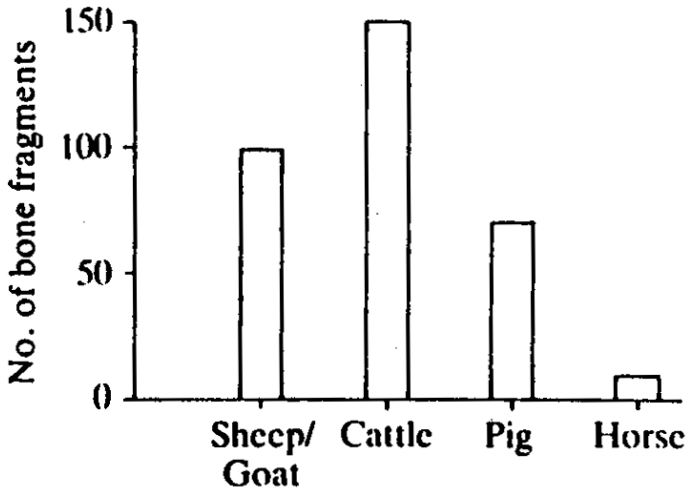
Popisná statistika

- 1) grafické metody
- 2) tabulky
- 3) číselné parametry

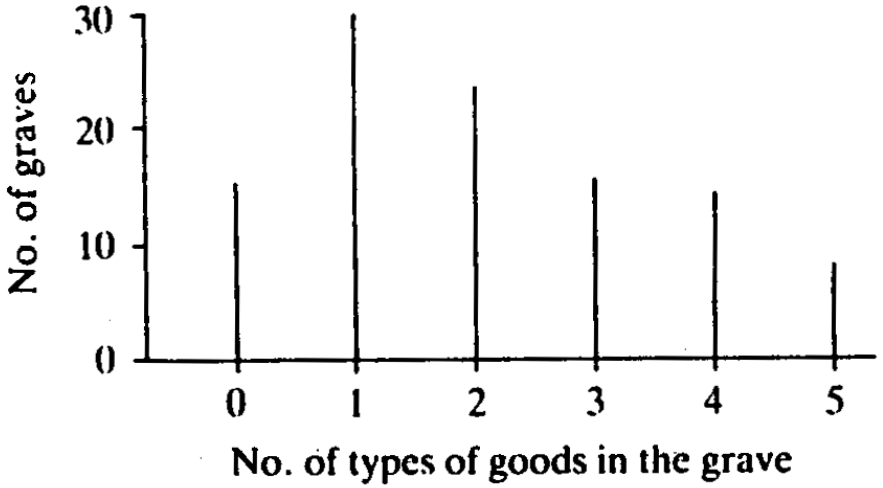
Sloupcový graf (bar chart)

Modus ($\hat{x}$)

nejčastěji se vyskytující hodnota v souboru.

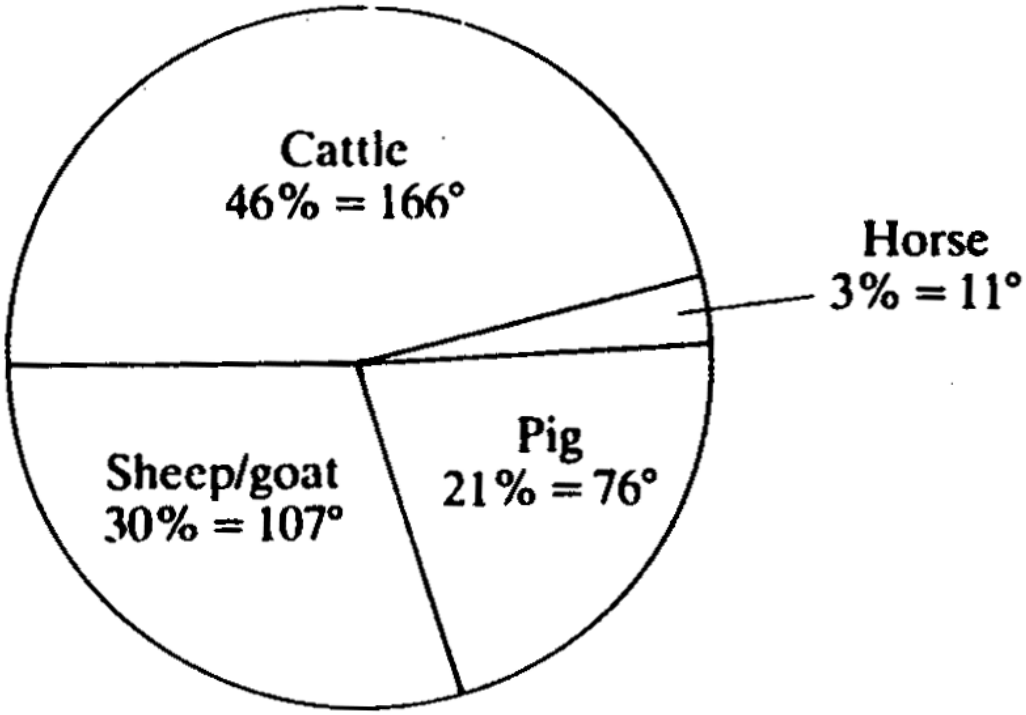


Bar chart of the number of bone fragments of different domestic animal species from a hypothetical British iron age site.



Bar chart of the number of graves containing different numbers of grave-good types for a hypothetical central European bronze age cemetery.

Koláčový graf (pie chart)



Pie chart of the relative proportions of bone fragments of different domestic species

Čárkovací metoda

Interval	Postupný zápis četností
961 – 965	𝍸
966 – 970	𝍸
971 – 975	𝍸
976 – 980	𝍸 𝍸 ///
981 – 985	𝍸 𝍸 𝍸 ///
986 – 990	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 //
991 – 995	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
996 – 1 000	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
1 001 – 1 005	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 //
1 006 – 1 010	𝍸 𝍸 𝍸 ///
1 011 – 1 015	𝍸 //
1 016 – 1 020	𝍸 //
1 021 – 1 025	////
1 026 – 1 030	/
1 031 – 1 035	//

Stem and leaf plot

2	5 7 8
3	0 4 5 8 8 8 9
4	0 0 0 2 3 3 3 4 5 7 7 7 8 8 8 8 8 9
5	0 0 3 7 7 8
6	6

Stem-and-leaf diagram of the Mount Pleasant post-hole diameters

2	
2	5 7 8
3	0 4
3	5 8 8 8 9
4	0 0 0 2 3 3 3 4
4	5 7 7 7 8 8 8 8 8 9
5	0 0 3
5	7 7 8
6	
6	6

Stem-and-leaf diagram of the Mount Pleasant post-hole diameters with stem intervals 5 units wide instead of 10.

Variační rozpětí:

$$R = x_{max} - x_{min}$$

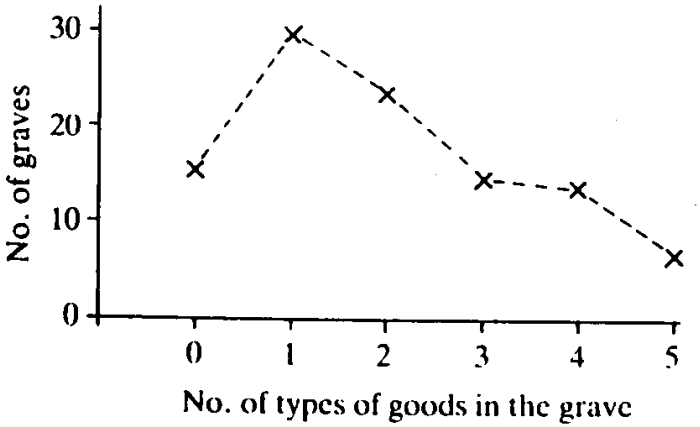
Histogram a frekvenční polygon

$0{,}05R < k < 0{,}12R$

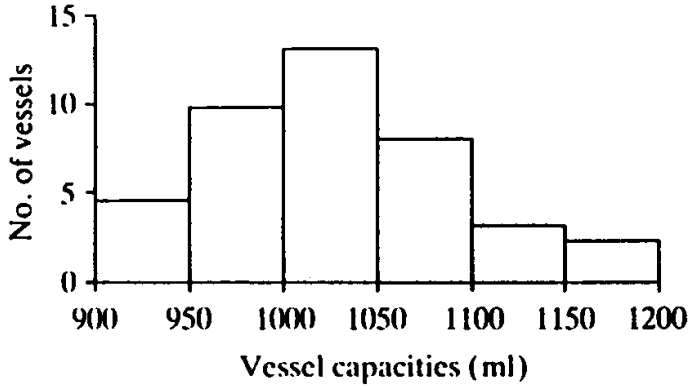
$k \approx 1 + \log2(2n) = 1 + 3{,}3\log n$
(Sturgesovo pravidlo)
$k \approx 5\log n$

$k = \text{int}(2{,}46(n - 1)0{,}4)$

modus



Frequency polygon



Bar chart of the distribution of vessel capacities for a group of 40 bell beakers.

Kvantily a percentily

Rozdělují soubor na danou percentuální část.
Nejvýznamnější kvantily:

Medián: 2. kvartil (50% percentil)

Q_I: Dolní kvartil (1. kvartil, 25% percentil)

Q_{III}: Horní kvartil (3. kvartil, 75% percentil)

- *Medián* ($\tilde{x}$) rozděluje uspořádané (podle velikosti) zjištěné hodnoty na dvě stejně početné části.

Pro výpočet mediánu a ostatních kvantilů platí:

Je-li n liché

- $\tilde{x} = x_k$ kde $k = (n + 1)/2$

Je-li n sudé $\tilde{x} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$

- kde k = n/2

Výhodou mediánu je, že bezprostředně nezávisí na extrémních hodnotách.

Od mediánu se odvozují i některé parametry rozptýlení:

Mediánová odchylka

$$MD = \frac{\sum_i (x_i - \tilde{x})}{n}$$

Absolutní mediánová odchylka

$$MAD = med(X_i - med)$$

Interkvartilové rozpětí

$$Q = Q_{III} - Q_I$$

Kvartilový koeficient šikmosti

$$KS = \frac{Q_{III} + Q_I - 2\tilde{x}}{Q_{III} - Q_I}$$

Pearsonův koeficient šikmosti

$$SK = \frac{3(\bar{x} - \tilde{x})}{s}$$

Momentové charakteristiky

Aritmetický průměr ($\bar{x}$)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Geometrický průměr

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\log \bar{x}_g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

Momentové charakteristiky

Rozptyl

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$$

resp.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$$

Kladná druhá odmocnina z rozptylu se nazývá *směrodatná odchylka*.

Variační koeficient

$$s_r = \frac{s}{\bar{x}}$$

Momentové charakteristiky

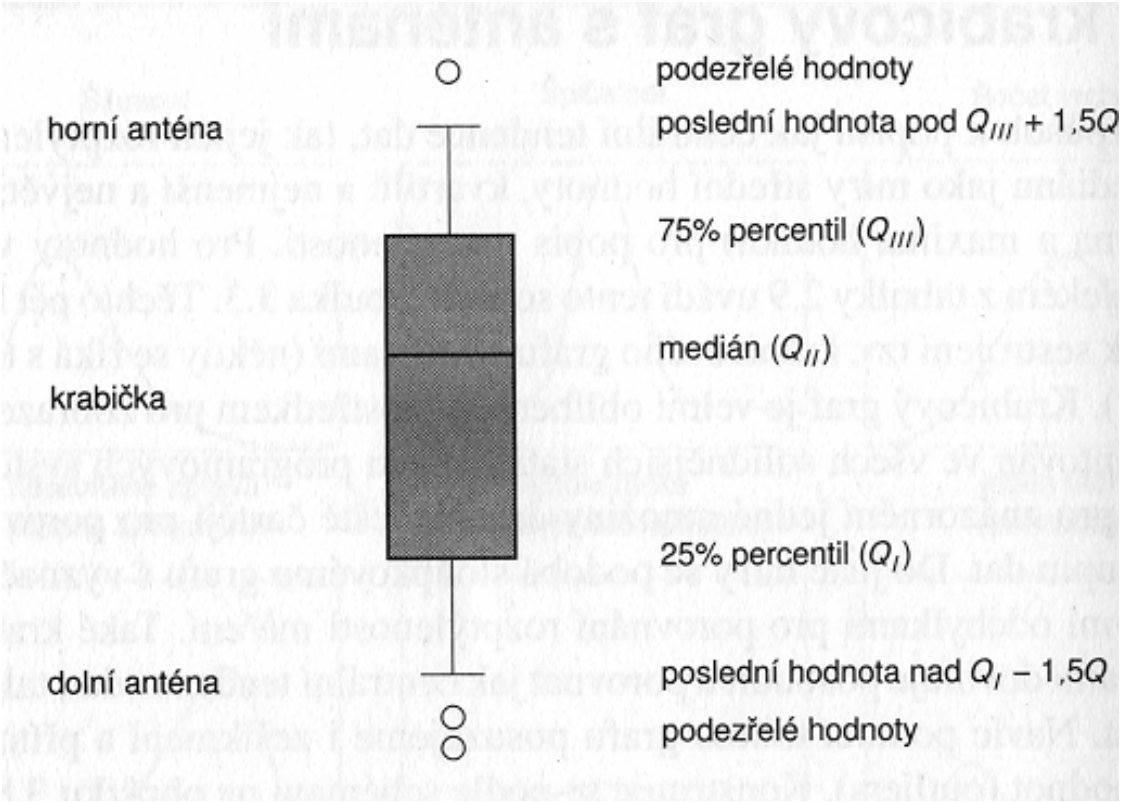
- $m_k = \frac{(x_i - \bar{x})^k}{n}$

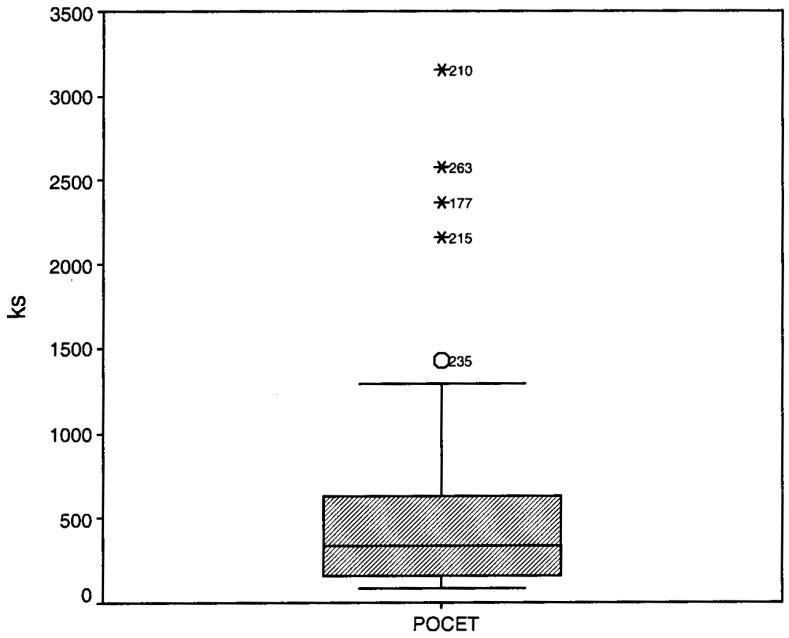
- Šikmost: měří asymetrii dat $S_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$

- Špičatost:

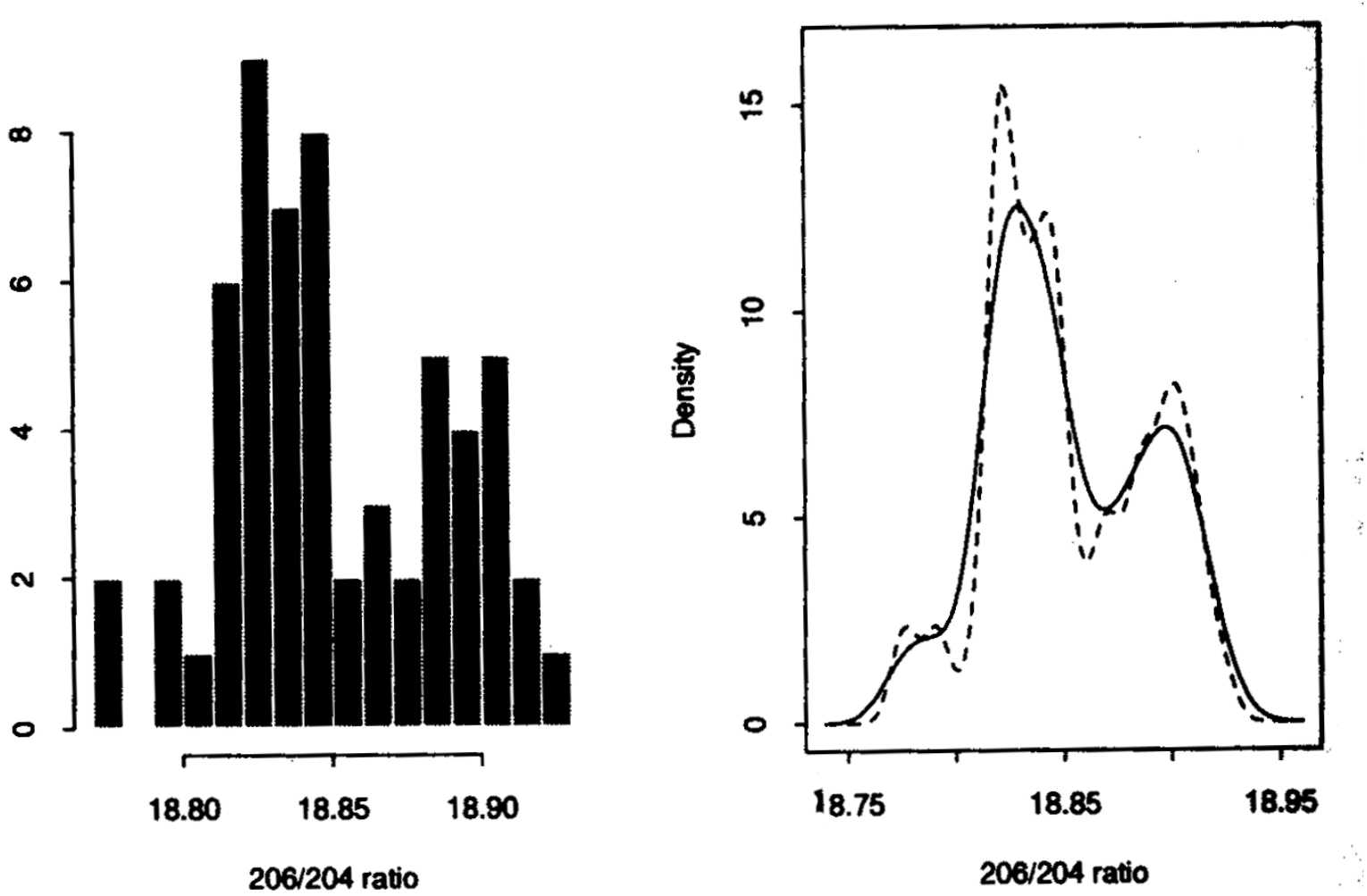
$$S_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$$

Box and whisker plot





Jádrové odhady (KDE)



A histogram (left panel) and KDEs (right panel) for the Lavrion $^{206}Pb/^{204}Pb$ lead isotope ratio data from Stos-Gale et al. (1996). The solid KDE uses a smoothing parameter, h, determined by the method of Sheather and Jones (1991); the dashed KDE uses a subjectively determined h.

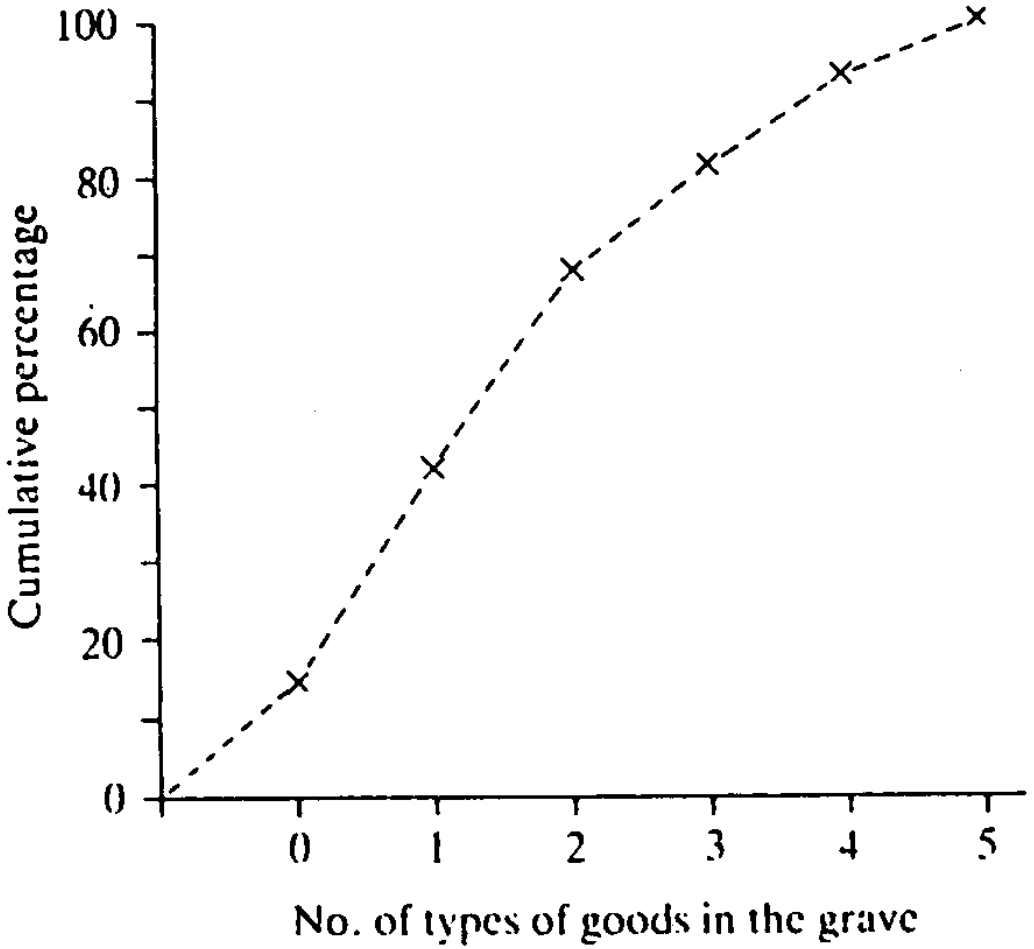
Jádrové odhady (KDE)

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left[\frac{x - x_i}{h} \right]$$

kde K(x) je funkce symetrická kolem nuly, šířka pásu h určuje stupeň vyhlazení:

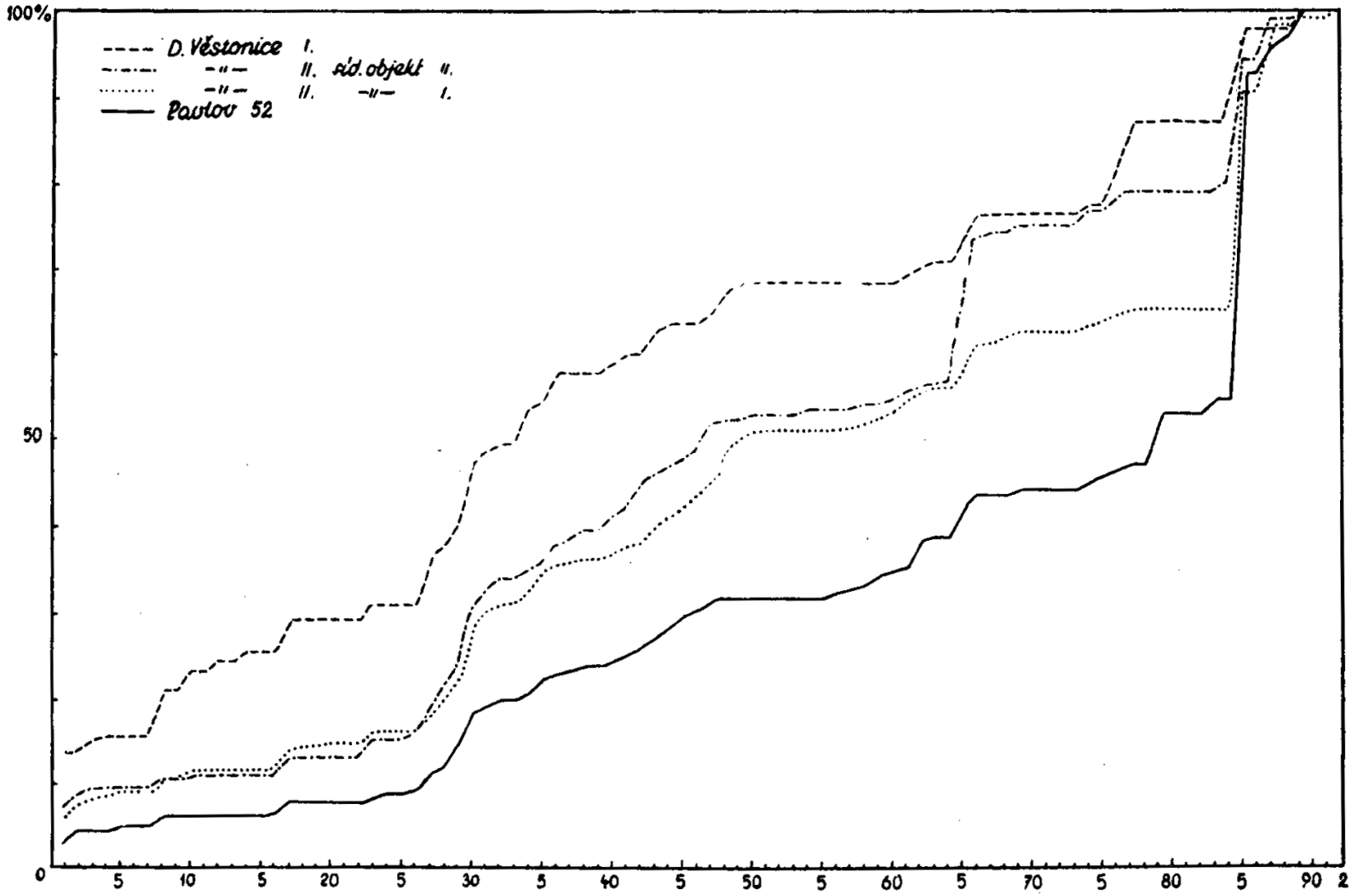
$$h_{opt} = 2{,}34\sigma n^{-0{,}2}$$

Kumulativní graf



Cumulative curve of the data on numbers of grave-good types

Kumulativní graf



Hromadný graf kamenných industrií z jednotlivých sídlištních celků paleolitických stanic pod Pavlovskými vrchy.

- Při posuzování grafů je třeba sledovat:

- 1) zhuštění dat (místo či místa s největší četností)
- 2) shluky dat
- 3) mezery v datech (intervaly bez hodnot)
- 4) odlehlé hodnoty (přítomnost údajů odlišných od zbytku dat)
- 5) tvar rozdělení (např. z histogramu)

Základní soubor a výběr

- ***Základní populace*** (základní soubor) je množina všech teoreticky možných objektů (jedinců) v uvažované situaci. V mnoha případech má pouze hypotetický význam.

- ***Výběr (vzorek)*** je podmnožinou základní populace (velmi často totiž nelze podrobit výzkumu celou základní populaci). Počet prvků (objektů) *n* ve výběru se nazývá rozsah výběru.

- ***Populační parametr*** dané proměnné je číselná hodnota, která tuto proměnnou charakterizuje v základní populaci (např. aritmetický průměr). Má nějakou fixní číselnou hodnotu, kterou v praxi zpravidla neznáme (pokud neprovedeme úplné šetření); odhadujeme ji na základě výběrových statistik.

- ***Výběrová statistika*** charakterizuje vzorek, získaný výběrem ze základní populace (výběrové šetření); má číselnou hodnotu, jež charakterizuje výběr (např. výběrový průměr). Co je parametr pro populaci, to je výběrová statistika pro výběr.

Distribuční funkce

Pro distribuční funkci platí: je neklesající, spojitá zleva, $0 \leq F(x) \leq 1$ pro všechna reálná $-\infty < x < \infty$

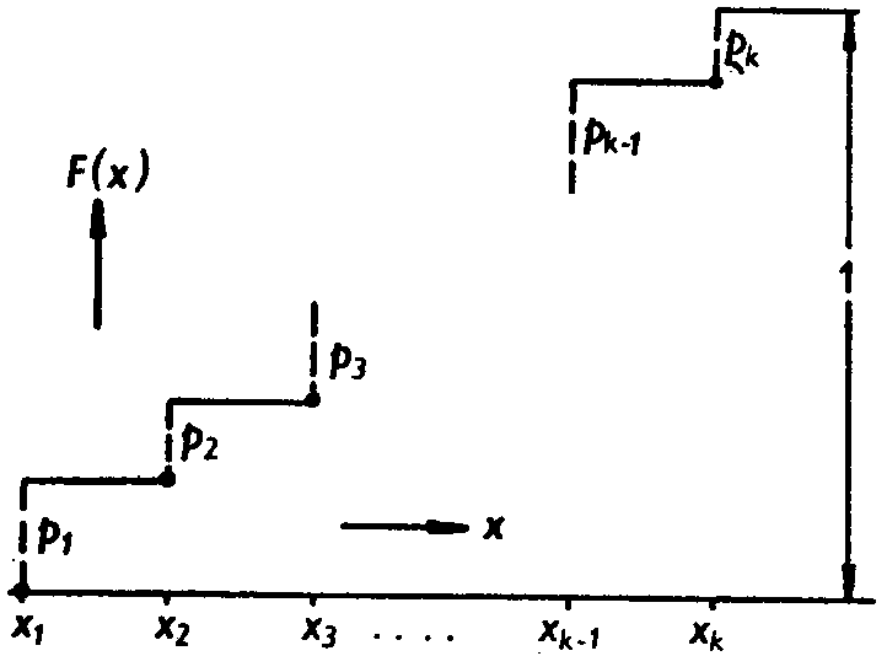
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

a $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$ pro libovolná $a < b$.

Distribuční funkce

- Distribuční funkce *diskrétní náhodné veličiny* je schodovitá funkce s body skoku x_1, x_2, ..., x_k.

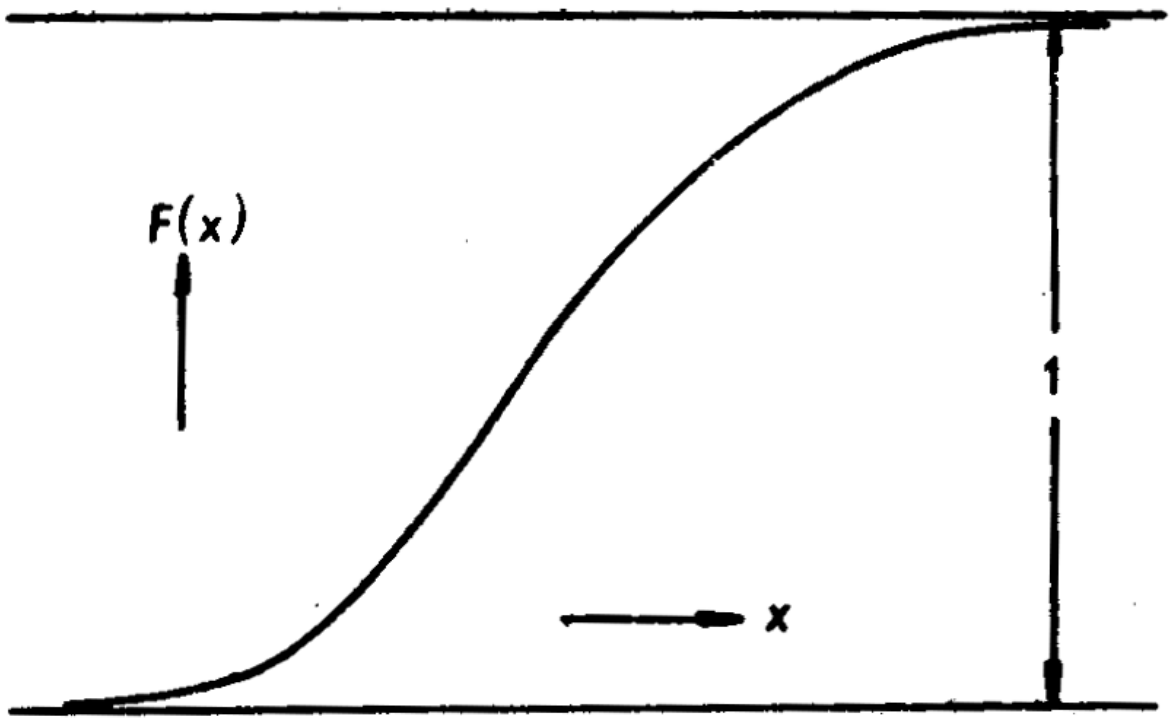
$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$



Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny.

Distribuční funkce

- Pro *spojitou náhodnou veličinu* má distribuční funkce tvar
-



Distribuční funkce spojité náhodné veličiny.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

kde f(x) je hustota pravděpodobnosti distribuční funkce.

Charakteristiky náhodné veličiny

umožňují shrnutí informace o náhodné veličině do několika číselných hodnot.

Momentová metoda

- k-tý obecný moment: $m_{ok} = E(X^k)$
- k-tý centrální moment: $m_{ck} = E\{[X - E(X)]^k\}$

Metoda maximální věrohodnosti

- mnohem složitější výpočty

Parametr polohy (střední hodnota)

- diskrétní:

$$E(X) = \sum_{x_j} x_j p_j$$

- spojité:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Parametr polohy (střední hodnota)

- $E(kx) = kE(x)$

  kde k je konstanta.

- $E(x_1 + x_2 + ...+ x_n) = E(x_1) + E(x_2) + ... + E(x_n)$

- $E(x_1.x_2. ... x_n) = E(x_1).E(x_2). ... E(x_n)$

- $E(k_1x_1 + k_2x_2 + ...+ k_nx_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i E(x_i)$

  kde k_1, k_2, ..., kn jsou konstanty.

Parametr disperze (rozptyl)

- diskrétní:

$$D^2(X) = \sum_{x_j} [X - E(X)]^2 \, p_j$$

- spojité:

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [X - E(X)]^2 \, f(x) dx$$

Parametr disperze (rozptyl)

- $D^2(kx) = k^2D^2(x)$ kde k je konstanta.

- $D^2 (x_1 + x_2 + ...+ x_n) = D^2 (x_1) + D^2 (x_2) + ...$
- $+ D^2 (x_n)$

- $D^2(k_1x_1 + k_2x_2 + ...+ k_nx_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 D^2(x_i)$

  kde $k_1, k_2, ..., k_n$ jsou konstanty.

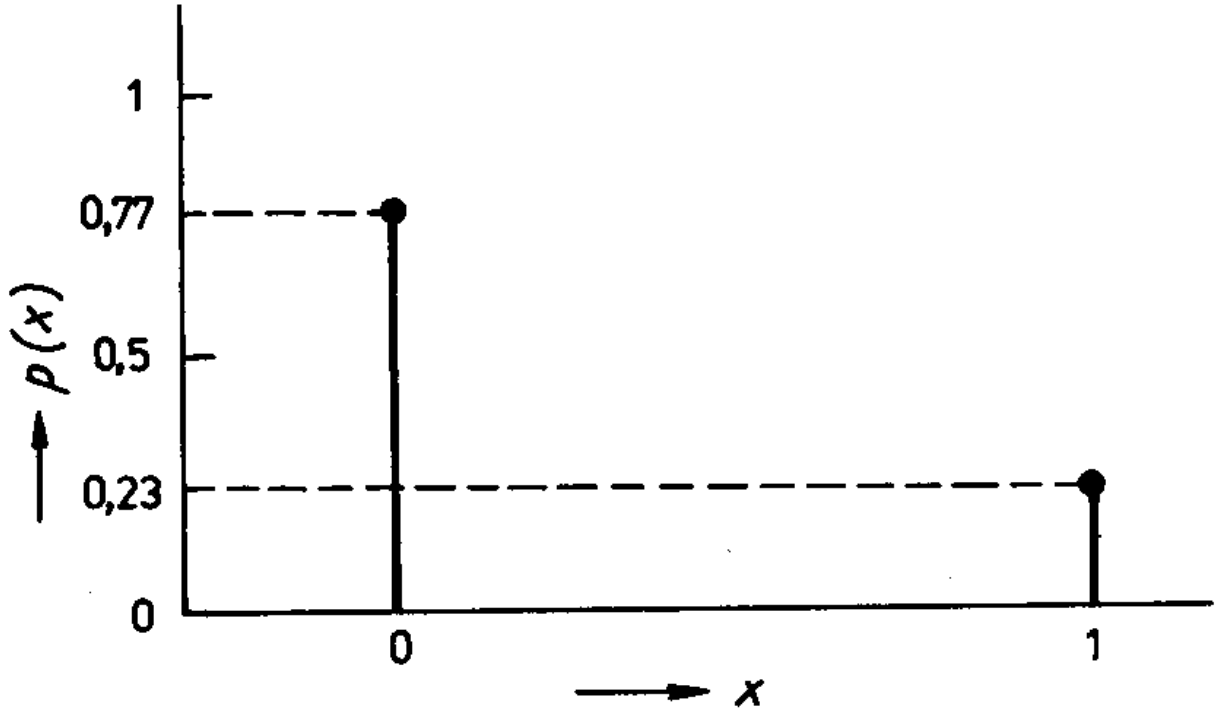
- $D^2(x_1 - x_2) = D^2(x_1) + D^2(x_2)$

Alternativní rozdělení

- veličina může nabývat hodnot 0 nebo 1 (přítomnost či nepřítomnost určitého znaku).

$p(x) = 1 - p$ pro $x = 0$

$p(x) = p$ pro $x = 1$



Alternativní rozdělení

- F(x) = $\begin{cases} 0 \text{ pro } x \leq 0 \\ p \text{ pro } 0 < x \leq 1 \\ 1 \text{ pro } x < 1 \end{cases}$

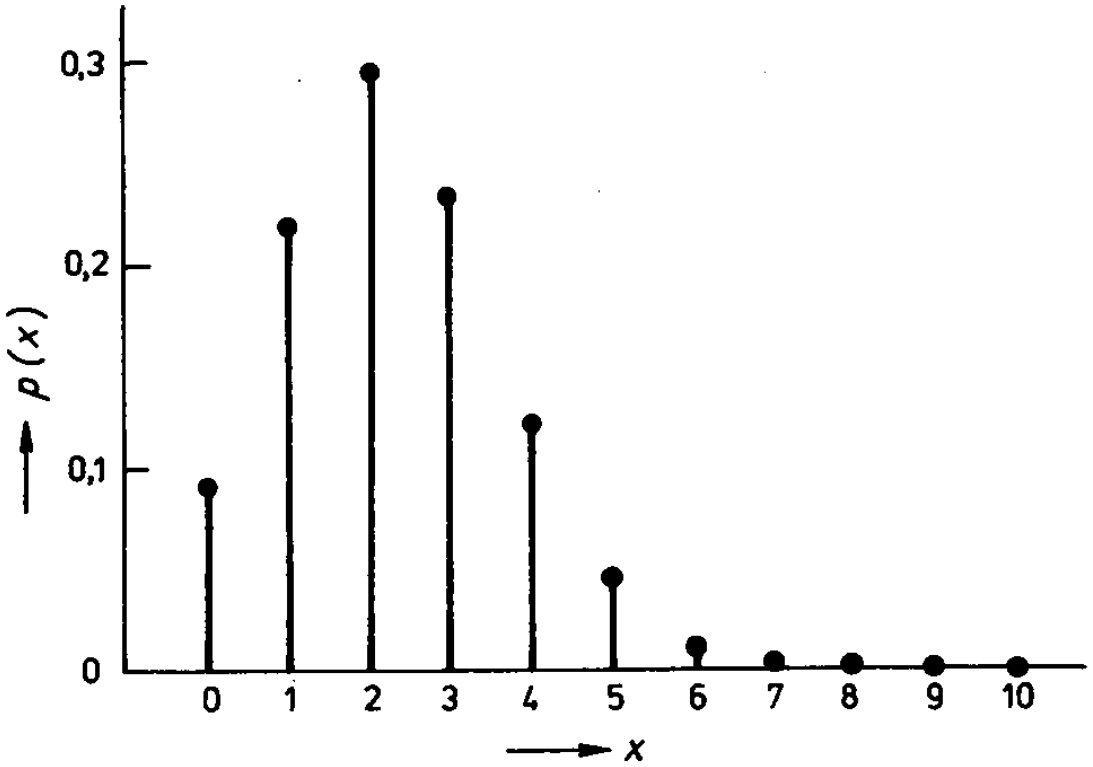
- střední hodnota: $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = p$

- rozptyl: $\mathrm{D}^2(\mathrm{X}) = p(1 - p)$

Binomické rozdělení

- náhodná veličina nabývá pouze hodnot 0, 1, 2, ..., n (= počet kladných výsledků z n nezávislých pokusů).

$$p_{\mathrm{k}} = \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k}$$



Binomické rozdělení

- F(x) = 0 pro x < 0
- $F(x) = \sum_{x=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ pro 0 ≤ x ≤ n
- F(x) = 1 pro x > n

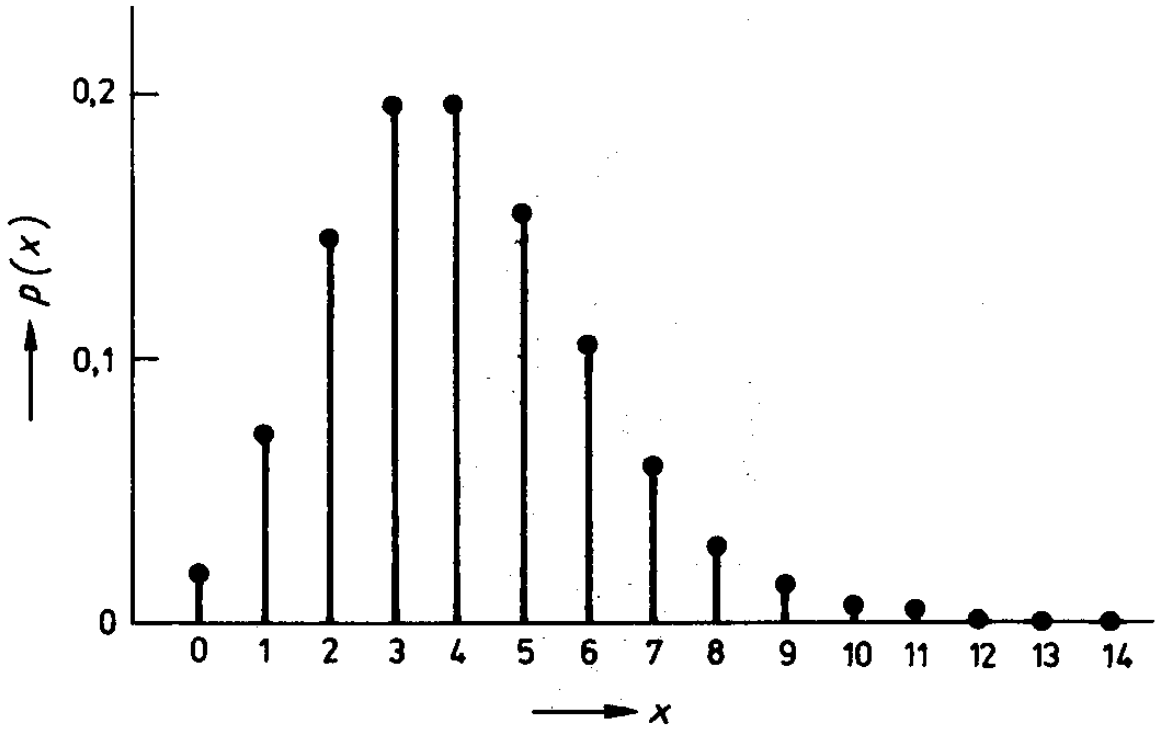
Střední hodnota: $\mathrm{E(X)} = \mathrm{n}p$

Rozptyl: $\mathrm{D}^2\mathrm{(X)} = \mathrm{n}p(1 - p)$

Poissonovo rozdělení

je limitou binomického rozdělení, je to „rozdělení vzácných jevů“.

$$p_{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$



Poissonovo rozdělení

- F(x) = 0 pro x < 0
- $F(x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i}}{i!}$ pro x ≥ 0

Střední hodnota a rozptyl:

$$E(X) = D^{2}(X) = \lambda$$

Rovnoměrné rozdělení

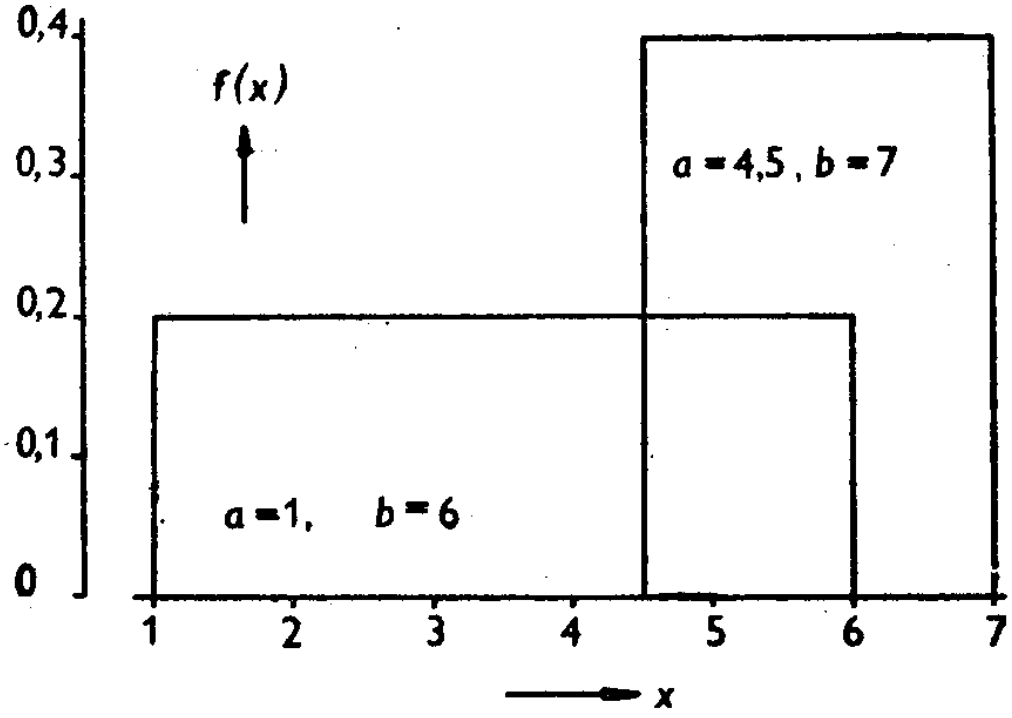
Hustota pravděpodobnosti v intervalu (a, b) má tvar:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$x \in (a,b)$$

$$f(x) = 0$$

ostatní



Rovnoměrné rozdělení

Distribuční funkce je

- F(x) = 0, pro $x < a$
- $F(x) = \frac{x - a}{b - a}$ pro $a \leq x \leq b$
- F(x) = 1, pro $x \geq b$

- Střední hodnota: $E(X) = \frac{a + b}{2}$
- Rozptyl: $D^2(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$

Normální (Gaussovo) rozdělení

- Hustota pravděpodobnosti

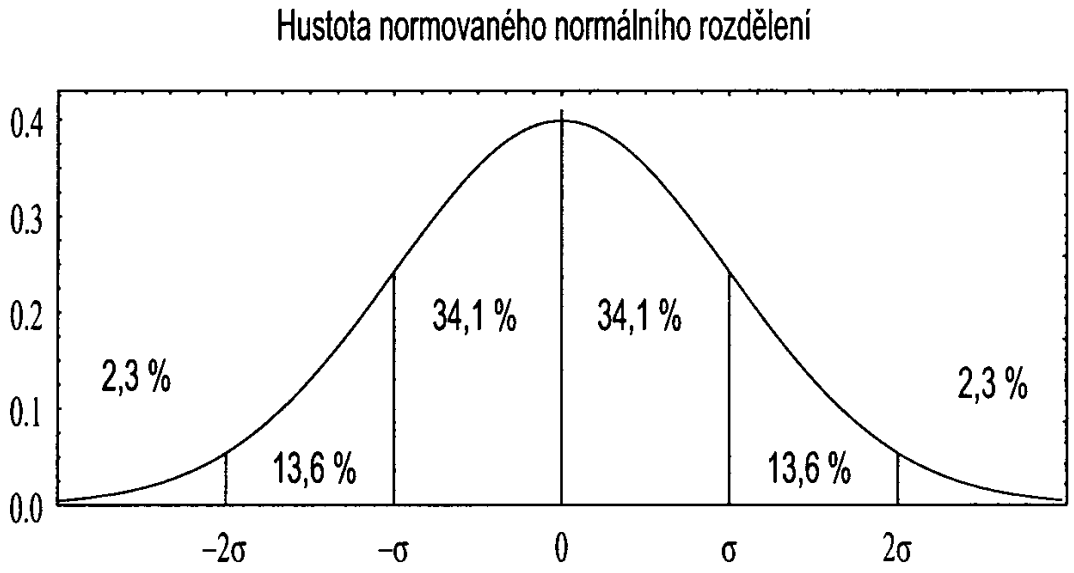
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[(x-\mu)/\sigma]^2/2}$$

- Distribuční funkce

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-[(y-\mu)/\sigma]^2/2} dy$$

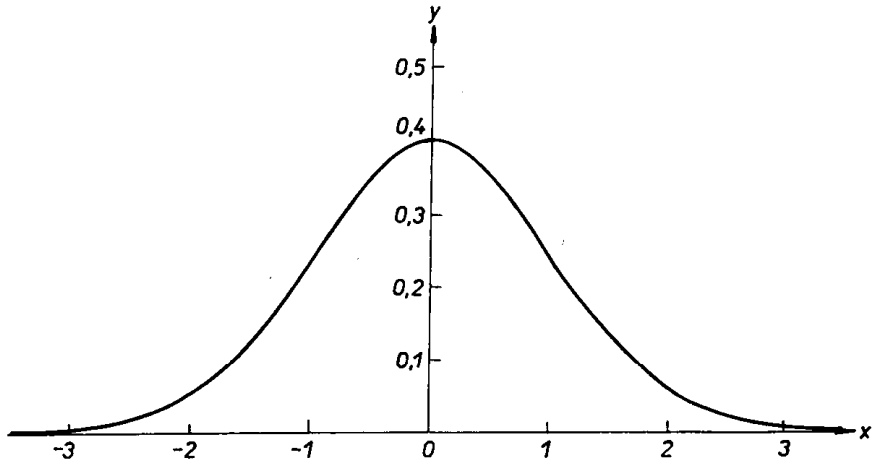
Střední hodnota: $E(x) = \mu$,

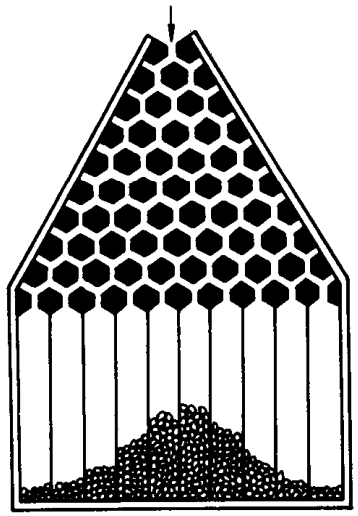
Rozptyl: $D^2(x) = \sigma^2$



Normální rozdělení

Centrální limitní věta:
průměr „velmi velkého“ náhodného výběru je náhodnou veličinou s přibližně normálním rozdělením, i když má základní soubor rozdělení jiné než normální.





Normované normální rozdělení

Distribuční funkce normálního rozdělení závisí na μ a σ^2 .
Proto se tabeluje Normované normální rozdělení, tj. normální rozdělení veličiny *z (z-skór)*

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2} dy$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Střední hodnota:

$E(z) = 0$

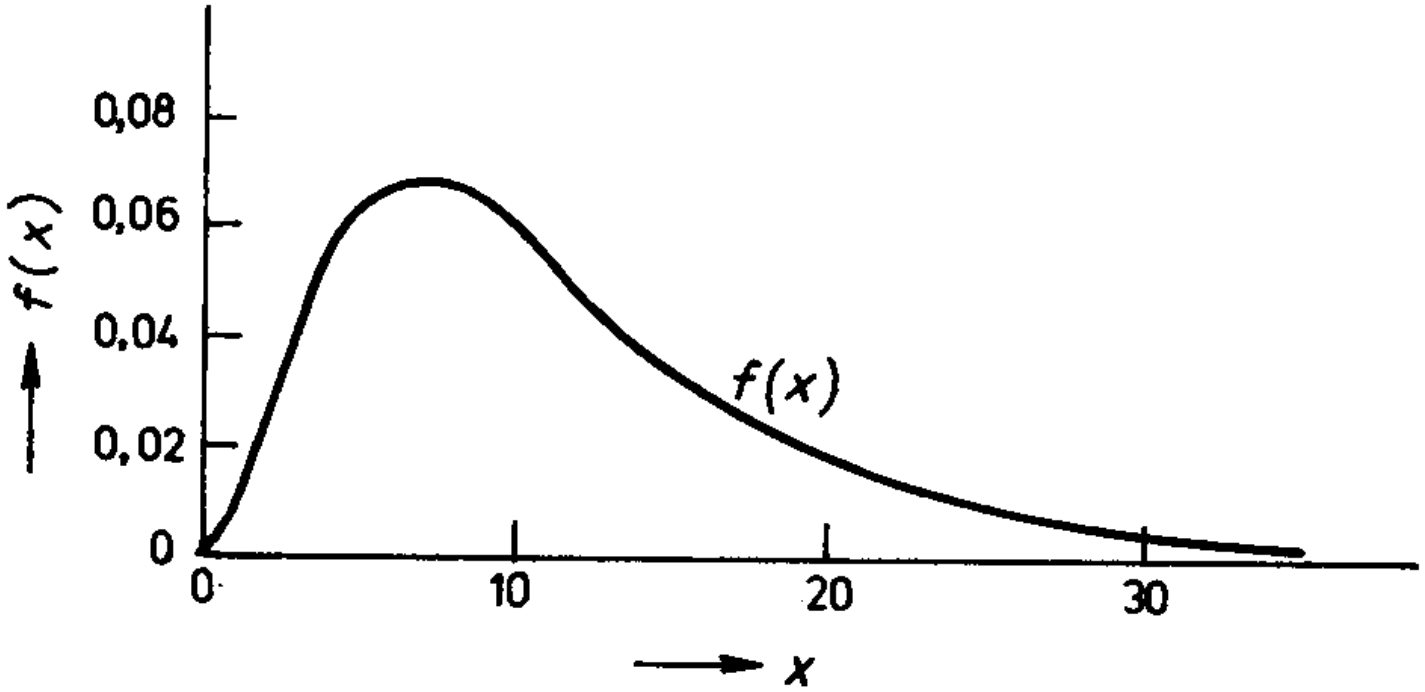
Rozptyl:

$D^2(z) = 1$

Logaritmicko-normální rozdělení

Hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{0{,}4343}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(\log x - \mu)^2 / 2\sigma^2}$$



Logaritmicko-normální rozdělení

Distribuční funkce

$$F(x) = \frac{0{,}4343}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-(\log y - \mu)^2 / 2\sigma^2} \, dy$$

Střední hodnota:

$$E(x) = e^{\mu / 0{,}4343 + \sigma^2 / 2.(0{,}4343)^2}$$

Rozptyl:

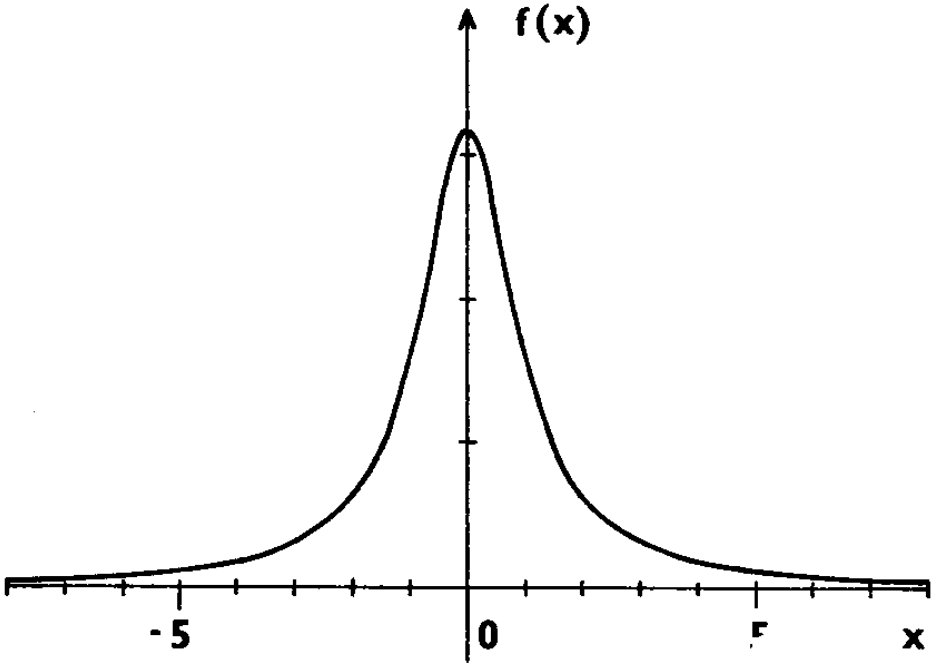
$$D^2(x) = e^{\mu / 0{,}4343 + \sigma^2 / 2.(0{,}4343)^2} \left[e^{\sigma^2 / (0{,}4343)^2} - 1 \right]$$

Cauchyovo rozdělení

- *Hustota pravděpodobnosti*

$$f(x) = \frac{\beta}{\pi\left[\beta^2 + (x - \alpha^2\right]} \qquad , -\infty < x < \infty$$

kde pro parametry platí
$-\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$.



Cauchyovo rozdělení

Distribuční funkce

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \qquad , -\infty < x < \infty$$

Střední hodnota: E(x) není definována,

Rozptyl: $D^2(x) = \infty$.

Rozdělení na kružnici

Normální rozdělení na kružnici (von Misesovo rozdělení)

Např. úhly, hodiny během dne, dny během roku, orientace vůči světovým stranám, apod.

Jiná rozdělení spojité náhodné veličiny

- ***Smíšené rozdělení***. Náhodná veličina je pozorována za různých podmínek a pozorované hodnoty pocházejí ze dvou nebo více různých základních souborů a to s různými pravděpodobnostmi.

- ***Cenzurované rozdělení***. Známe pouze jednu část hodnot náhodné veličiny, hodnoty z druhé části neznáme, ale registrujeme jejich výskyt (např. hodnoty koncentrací pod mezí stanovitelnosti).

- ***Useknuté rozdělení***. Nelze pozorovat všechny hodnoty náhodné veličiny, ale jen hodnoty z určitého intervalu.