

5. Anizotropní prostředí

5.1. Materiálové vztahy

5.2. Šíření světla v anizotropním prostředí

5.3. Fresnelovy rovnice

5.4. Geometrická konstrukce pro určení rychlostí a směrů kmitů

5.5. Šíření světla v jednoosých krystalech

5.6. Šíření světla ve dvouosých krystalech

5.7. Lom světla na rozhraní krystalu

5. Anizotropní prostředí

Základní rozdíl proti izotropnímu prostředí je ve skutečnosti, že světlo se šíří v různých směrech různě a tedy je nutné skalární veličiny (permitivita, index lomu) nahradit tenzory druhého řádu. To je samozřejmě zdrojem řady nových jevů, ale také formální komplikovanosti matematických vztahů. I z tohoto důvodu se omezíme na neabsorbující prostředí.

5.1. Materiálové vztahy

Maxwellovy rovnice zůstávají stejné, podobně je tomu i pro materiálové vztahy s tím, že skalární veličiny nahrazujeme tenzory. Pak platí

$$\mathbf{D}_k(\omega) = \epsilon_0 \sum_{l=1}^3 \epsilon_{kl}(\omega) \mathbf{E}_l(\omega) \quad (5.1.1)$$

Volíme takovou souřadnou soustavu, aby zůstaly pouze diagonální členy

$$\mathbf{D}_1(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_1(\omega) \mathbf{E}_1(\omega) \quad (5.1.2)$$

Pro úplný popis optického chování potřebujeme tři veličiny $\epsilon_x(\omega), \epsilon_y(\omega), \epsilon_z(\omega)$, tzv. hlavní permitivity, které jsou funkcemi ω , ale kde výběr souřadné soustavy může být rovněž funkcí frekvence ω .

Pro rovinné vlny platí analogicky

$$\mathbf{D}_1(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_1(\omega) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \quad (5.1.3)$$

Přirozená anizotropie úzce souvisí s krystalovou strukturou, přehled podává následující tabulka.

	ϵ	soustava	osy	a b c	$\alpha \beta \gamma$
izotropní	$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$	kubická	ω	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
jednoosá	$\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$	hexagonální	ω	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 120^\circ, \gamma = 90^\circ$

		tetragonální	ω	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$
		trigonální	ω	$a = b = c$	$\alpha, \beta, \gamma \neq 90^\circ$
dvouosá	$\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$	rombická	ω	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
	$\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$	monoklinická	$x(\omega), y(\omega), z$	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$
	$\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$	triklinická	$x(\omega), y(\omega), z(\omega)$	$a \neq b \neq c$	$\alpha, \beta, \gamma \neq 90^\circ$

Tab. 5.1.1 *Krystalografické soustavy, optické vlastnosti*

Protože uvažujeme pouze neabsorbující materiály platí $\epsilon = n^2$, u jednoosých materiálů je obvyklé značení $\epsilon_x = n_o^2, \epsilon_y = n_o^2, \epsilon_z = n_e^2$, kde n_o je tzv. řádný index lomu (ordinární) a n_e mimořádný (extraordinární). Názvy jednoosý a dvouosý se vztahují k elipsoidu o poloosách $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$. Optická osa je kolmice k centrálnímu kruhovému řezu tohoto elipsoidu. V obecném případě jsou možné dva kruhové řezy, tedy dvě optické osy. U rotačního elipsoidu oba řezy splynou, tedy jedna osa a v případě izotropních látek se jedná o kouli.

Mimo přirozenou anizotropii musíme uvažovat o umělé, tj. obvykle do izotropního prostředí je deformací zavedena anizotropie. Významným případem izotropních látek jsou amorfni materiály.

Elipsoid permitivity má obecně tvar

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1 \quad (5.1.4)$$

a podobně elipsoid indexů lomu pro dvouosý materiál

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (5.1.5)$$

Pro jednoosý se jedná o rotační elipsoid

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1 \quad (5.1.6)$$

Pro izotropní dostaneme kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 = n^2 \quad (5.1.7)$$

5.2. Šíření světla v anizotropním prostředí

Protože platí (5.1.3) a $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

použijeme Maxwellovy rovnice ve tvaru

$$\mathbf{kD} = 0 \quad (5.2.1)$$

$$\mathbf{kH} = 0 \quad (5.2.2)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = \omega \mathbf{D} \quad (5.2.3)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\omega \mu_0 \mathbf{H} \quad (5.2.4)$$

Kde jako obvykle

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{ns} = \frac{\omega}{c} \mathbf{ns} \quad (5.2.5)$$

Dosadíme M.r.3 do M.r.4

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{\omega^2 \mu_0} [\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})] = -\frac{n^2}{c^2 \mu_0} [\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{E})] = \frac{n^2}{c^2 \mu_0} [\mathbf{s}^2 \mathbf{E} - \mathbf{s}(\mathbf{sE})] = \frac{n^2}{c^2 \mu_0} \mathbf{E}_\perp \quad (5.2.6)$$

kde jsme využili skutečnosti, že $s=1$ a

$$\mathbf{s}(\mathbf{sE}) = \mathbf{E}_{//} \quad \text{a} \quad \mathbf{E} - \mathbf{E}_{//} = \mathbf{E}_{\perp} \quad (5.2.7)$$

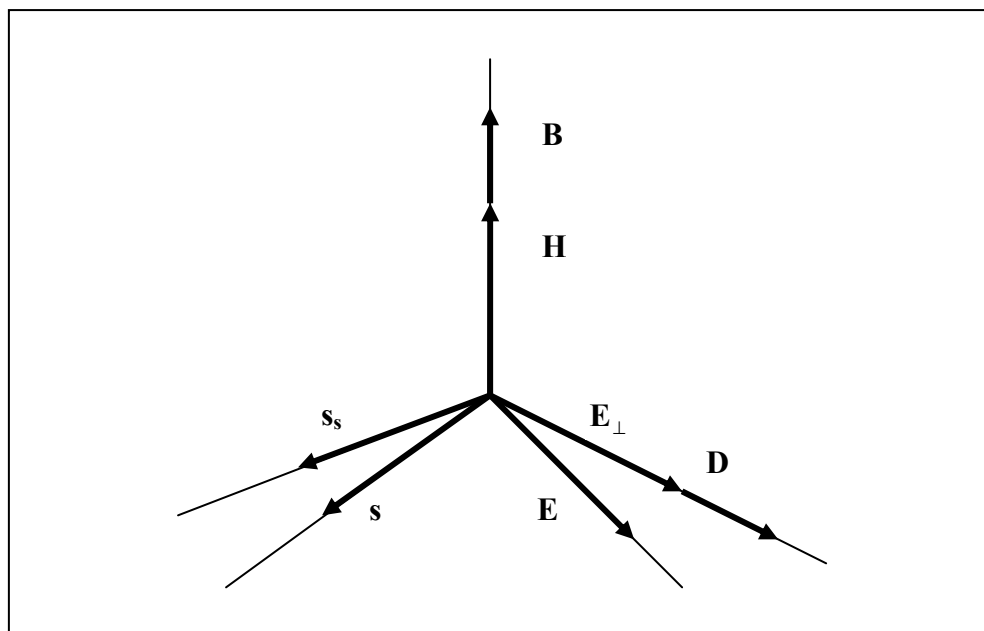
Viz také obr.5.2.1. Pak platí

$$\mathbf{H} \perp \mathbf{s}, \mathbf{B} \perp \mathbf{s}, \mathbf{D} \perp \mathbf{s}, \mathbf{E} \perp \mathbf{H}, \mathbf{E}_{\perp} \perp \mathbf{s}, \mathbf{E} \perp \mathbf{s} \quad (5.2.8)$$

Označíme \mathbf{s}_s jednotkový vektor ve směru toku energie, pak

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_s S, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{s}_s, \quad \mathbf{H} \perp \mathbf{s}_s \quad (5.2.9)$$

Vektory \mathbf{s} a \mathbf{s}_s nejsou rovnoběžné, tedy směr toku energie je jiný než směr šíření vlny.



Obr. 5.2.1 Orientace vektorů elmag. pole pro anizotropní prostředí.

5.3. Fresnelovy rovnice

Odvodíme Fresnelovy rovnice, které dovolují výpočet fázové rychlosti nebo indexu lomu v libovolném směru. Ze vztahu (5.2.6) dostaneme s využitím $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

$$\epsilon_k \mathbf{E}_k = n^2 [\mathbf{E}_k - \mathbf{s}_k (\mathbf{sE})] \quad k=x,y,z \quad (5.3.1)$$

To jsou tři homogenní rovnice pro tři složky \mathbf{E} , determinant má hodnotu 0. Vypočítáme

$$\mathbf{E}_k = \frac{n^2}{n^2 - \epsilon_k} \mathbf{s}_k (\mathbf{sE}) \quad (5.3.2)$$

Tyto tři rovnice vynásobíme \mathbf{s}_k a sečteme

$$\frac{\mathbf{s}_x^2}{n^2 - \epsilon_x} + \frac{\mathbf{s}_y^2}{n^2 - \epsilon_y} + \frac{\mathbf{s}_z^2}{n^2 - \epsilon_z} = \frac{1}{n^2} \quad (5.3.3)$$

Nebo

$$\frac{\mathbf{s}_x^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_x}} + \frac{\mathbf{s}_y^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_y}} + \frac{\mathbf{s}_z^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_z}} = 0 \quad (5.3.4)$$

Nebo pro $v_k = c/\sqrt{\epsilon_k}$ a $v_p = c/n$

$$\mathbf{E}_k = \frac{v_k^2}{v_k^2 - v_p^2} \mathbf{s}_k (\mathbf{sE}) \quad (5.3.5)$$

a stejným postupem

$$\frac{\mathbf{s}_x^2}{v_p^2 - v_x^2} + \frac{\mathbf{s}_y^2}{v_p^2 - v_y^2} + \frac{\mathbf{s}_z^2}{v_p^2 - v_z^2} = 0 \quad (5.3.6)$$

Všechny tři rovnice (5.3.3), (5.3.4), (5.3.6) jsou ekvivalentní a nazývají se Fresnelovy rovnice. Jsou to kvadratické rovnice pro n nebo v_p . Pro daný směr \mathbf{s} máme dva indexy lomu (n', n'') respektive dvě fázové rychlosti (v_p', v_p''). Z rovnice (5.3.2) nebo (5.3.5) můžeme vypočítat odpovídající dva poměry $\mathbf{E}_x: \mathbf{E}_y: \mathbf{E}_z$ případně $\mathbf{D}_x: \mathbf{D}_y: \mathbf{D}_z$.

Velmi důležitý výsledek: v anizotropním prostředí se v daném směru se šíří pouze dvě monochromatické lineárně polarizované vlny různými rychlostmi. Dále ukážeme, že se jedná o navzájem kolmé polarizace.

5.4. Geometrická konstrukce pro určení rychlostí a směrů kmitů

Pro hustotu elektrické energie platí

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{DE} \quad (5.4.1)$$

Což lze napsat

$$\frac{\mathbf{D}_x^2}{\epsilon_x} + \frac{\mathbf{D}_y^2}{\epsilon_y} + \frac{\mathbf{D}_z^2}{\epsilon_z} = K \quad (5.4.2)$$

kde $K = 2U$, dále označíme

$$x = D_x / \sqrt{K}, y = D_y / \sqrt{K}, z = D_z / \sqrt{K} \quad (5.4.3)$$

pak

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1 \quad (5.4.4)$$

je tzv. elipsoid vlnových normál.

Dokážeme, že řezem tohoto elipsoidu, který je kolmý k \mathbf{s} a prochází středem je elipsa s poloosami úměrnými příslušnému n (respektive v_p^{-1}) a směry poloos jsou směry povoleného vektoru \mathbf{D} .

Elipsoid je určen rovnicí (5.4.4), podmínka kolmosti $\mathbf{sD}=0$ má tvar

$$xs_x + ys_y + zs_z = 0 \quad (5.4.5)$$

a pro průvodič r elipsy platí

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5.4.6)$$

Hledáme extrémy r , tedy poloosy, Lagrangeovou metodou. Zavedeme dva parametry $2\lambda_1, \lambda_2$ a hledáme extrémy funkce

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda_1(xs_x + ys_y + zs_z) + \lambda_2\left(\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} - 1\right) \quad (5.4.7)$$

Postupně rovnici derivujeme podle x, y, z

$$x + \lambda_1 s_x + \lambda_2 \frac{x}{\epsilon_x} = 0 \quad y + \lambda_1 s_y + \lambda_2 \frac{y}{\epsilon_y} = 0 \quad z + \lambda_1 s_z + \lambda_2 \frac{z}{\epsilon_z} = 0 \quad (5.4.8)$$

Vynásobíme x, y, z a rovnice sečteme

$$r^2 + \lambda_2 = 0 \quad (5.4.9)$$

Podobně tyto tři rovnice vynásobíme s_x, s_y, s_z , opět sečteme

$$\lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{x s_x}{\epsilon_x} + \frac{y s_y}{\epsilon_y} + \frac{z s_z}{\epsilon_z} \right) = 0 \quad (5.4.10)$$

Odtud vypočítáme λ_1, λ_2 , dosadíme do rovnic (5.4.8)

$$x \left(1 - \frac{r^2}{\epsilon_x} \right) + s_x r^2 \left(\frac{x s_x}{\epsilon_x} + \frac{y s_y}{\epsilon_y} + \frac{z s_z}{\epsilon_z} \right) = 0 \quad (5.4.11)$$

$$y \left(1 - \frac{r^2}{\epsilon_y} \right) + s_y r^2 \left(\frac{x s_x}{\epsilon_x} + \frac{y s_y}{\epsilon_y} + \frac{z s_z}{\epsilon_z} \right) = 0 \quad (5.4.12)$$

$$z \left(1 - \frac{r^2}{\epsilon_z} \right) + s_z r^2 \left(\frac{x s_x}{\epsilon_x} + \frac{y s_y}{\epsilon_y} + \frac{z s_z}{\epsilon_z} \right) = 0 \quad (5.4.13)$$

Pro dané s máme tři homogenní rovnice pro x, y, z určující poloosy, determinant má hodnotu 0 což je podmínka pro r^2 ve směru poloos. Řešení označíme r' a r'' . Do vztahu (5.4.6) dosadíme již použitou substituci (5.4.3) a $K = 2U$, pak

$$r^2 = \frac{\mathbf{D}^2}{2U} = \frac{\mathbf{D}^2}{\mathbf{E}\mathbf{D}} \quad (5.4.14)$$

Ze vztahu (5.2.6) snadno dostaneme

$$\epsilon_0 n^2 = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}_\perp} = \frac{\mathbf{D}^2}{\mathbf{E}_\perp \mathbf{D}} = \frac{\mathbf{D}^2}{\mathbf{E}\mathbf{D}} \quad (5.4.15)$$

Porovnáním (5.4.14) a (5.4.15) dostaneme

$$r^2 = \epsilon_0 n^2 \quad (5.4.16)$$

Délka poloos je úměrná indexu lomu nebo převrácené hodnotě fázové rychlosti pro vlny šířící se ve směru s .

Z rovnic (5.4.11-13) máme tedy dvě trojice $x:y:z$, které určují poloosy řezu (r', r'') a z (5.4.3) dvě trojice $D_x:D_y:D_z$, které určují dva navzájem kolmé vektory $\mathbf{D}', \mathbf{D}''$. Anizotropním prostředím se tedy v daném směru šíří dvě vlny navzájem kolmo polarizované.

Pozn.:

Analogicky k elipsoidu vlnových normál (5.4.3) se zavádí elipsoid paprsků. Platí

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{D}\mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}\mathbf{E} \quad (5.4.17)$$

nebo

$$\epsilon_x E_x^2 + \epsilon_y E_y^2 + \epsilon_z E_z^2 = K' \quad (5.4.18)$$

kde

$$K' = 2U\epsilon_0^{-1} \quad (5.4.19)$$

Opět označíme

$$x = E_x / \sqrt{K'}, y = E_y / \sqrt{K'}, z = E_z / \sqrt{K'} \quad (5.4.20)$$

a elipsoid paprsků má tvar

$$\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = 1 \quad (5.4.21)$$

Podobně lze dokázat, že kolmo na směr s_s je elipsa s poloosami úměrnými fázovým rychlostem v_r' a v_r'' a tím jsou současně určeny dva navzájem kolmé vektory \mathbf{E}' a \mathbf{E}'' .

Je užitečné definovat plochu normál tak, že z počátku ve směru \mathbf{s} vyneseme obě fázové rychlosti v_p' a v_p'' . Dostaneme dvě plochy (plocha je 6. stupně). Současně je možné určit příslušné indexy lomu n' , n'' .

Analogicky se definuje plocha paprsků tak, že vyneseme ve směru \mathbf{s}_s fázové rychlosti v_r' a v_r'' . Rovněž dostaneme dvě plochy (plocha 4. stupně).

5.5. Šíření světla v jednoosých krystalech

Upravíme Fresnelovu rovnici (5.3.6)

$$s_x^2(v_p^2 - v_y^2)(v_p^2 - v_z^2) + s_y^2(v_p^2 - v_x^2)(v_p^2 - v_z^2) + s_z^2(v_p^2 - v_y^2)(v_p^2 - v_x^2) = 0 \quad (5.5.1)$$

Předpokládáme, že optickou osou je osa z a označíme

$$v_x = v_y = v_o, \quad v_z = v_e \quad (5.5.2)$$

Pak

$$(v_p^2 - v_o^2)[(s_x^2 + s_y^2)(v_p^2 - v_e^2) + s_z^2(v_p^2 - v_o^2)] = 0 \quad (5.5.3)$$

Označíme ϑ úhel, který svírá vektor \mathbf{s} s osou z, pak platí

$$s_x^2 + s_y^2 = \sin^2 \vartheta \quad s_z^2 = \cos^2 \vartheta \quad (5.5.4)$$

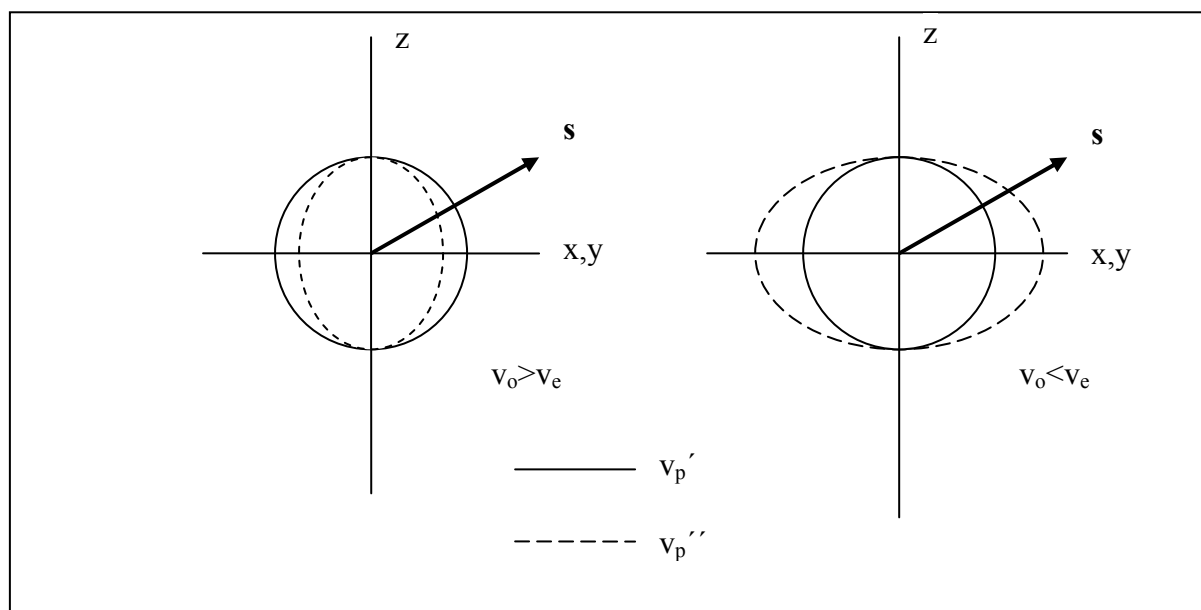
Dosadíme do (5.5.3)

$$(v_p^2 - v_o^2)[(v_p^2 - v_e^2) \sin^2 \vartheta + (v_p^2 - v_o^2) \cos^2 \vartheta] = 0 \quad (5.5.5)$$

Řešení pro v_p' a v_p''

$$v_p'^2 = v_o^2 \quad v_p''^2 = v_o^2 \cos^2 \vartheta + v_e^2 \sin^2 \vartheta \quad (5.5.6)$$

Pro v_p' se jedná o kouli a pro v_p'' ovaloid – viz obr. 5.5.1.



Obr.5.5.1 Řezy plochou normál pro jednoosý krystal

Stejný výsledek dostaneme užitím substituce

$$v_p s_x = x \quad v_p s_y = y \quad v_p s_z = z \quad (5.5.7)$$

do vztahu (5.5.3), pak

$$x^2 + y^2 + z^2 = v_o^2 \quad (x^2 + y^2)(v_p''^2 - v_e^2) + z^2(v_p''^2 - v_o^2) = 0 \quad (5.5.8)$$

Směry kmitů \mathbf{D} , tedy polarizaci, určíme jako dříve.

5.6. Šíření světla ve dvouosých krystalech

Platí Fresnelovy rovnice, ale obecné řešení je složité. Omezíme se pouze na řezy pro $x=0$, $y=0$, $z=0$ a pro určitost zvolíme

$$\epsilon_x < \epsilon_z < \epsilon_y \quad (5.6.1)$$

Z Fresnelovy rovnice (5.5.1) pro $s_x=0$ dostaneme

$$v_p'^2 = v_x^2 \quad v_p''^2 = v_x^2 s_y^2 + v_y^2 s_z^2 \quad (5.6.2)$$

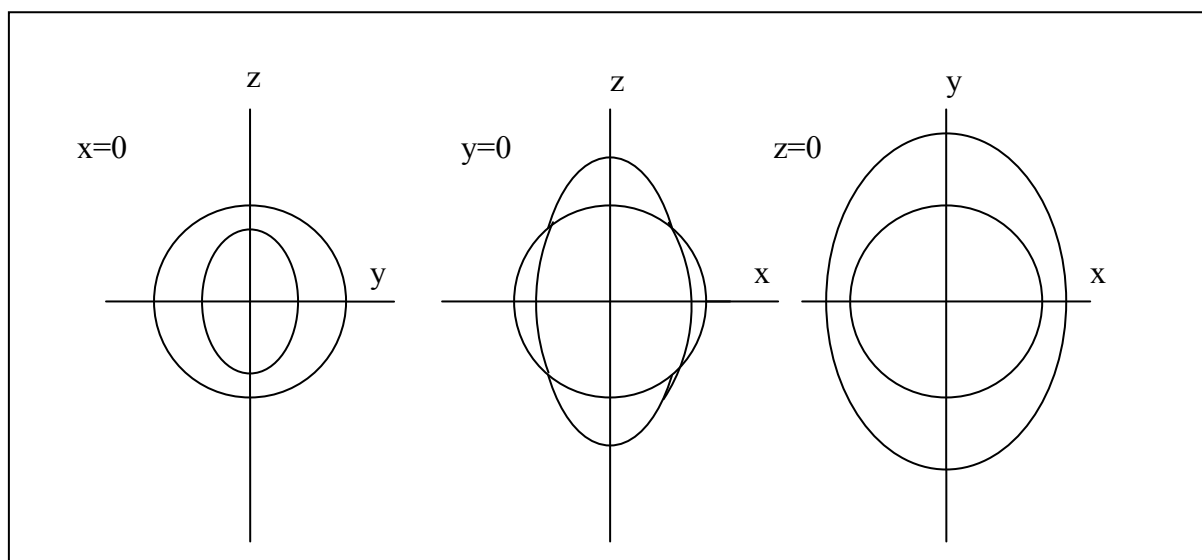
Po substituci

$$v_p s_y = y \quad v_p s_z = z \quad v_p^2 = z^2 + y^2 \quad (5.6.3)$$

dostaneme

$$y^2 + z^2 = v_x^2 \quad (y^2 + z^2)^2 = v_x^2 y^2 + v_y^2 z^2 \quad (5.6.4)$$

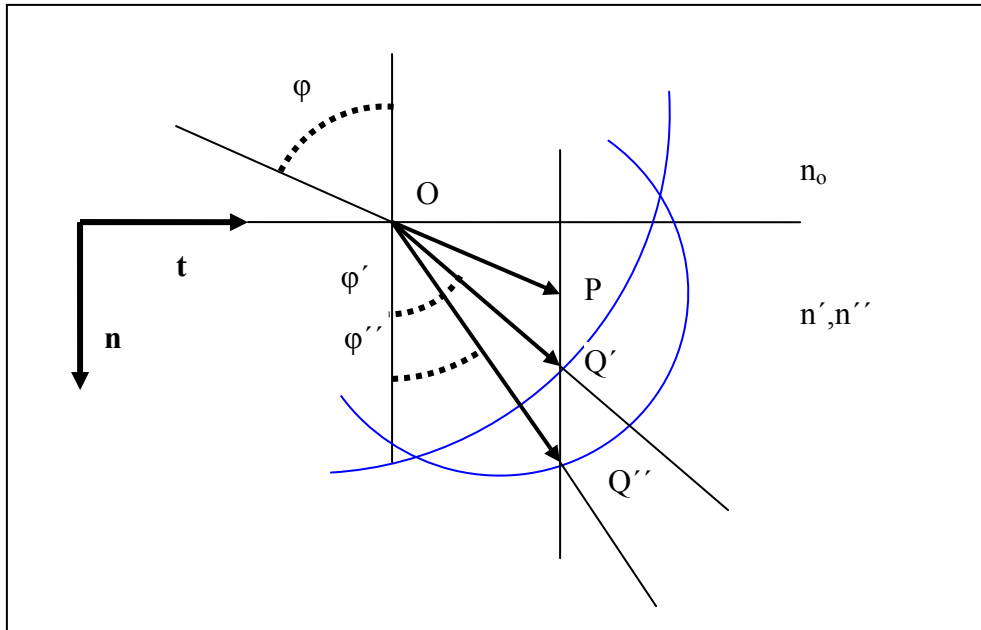
Máme tedy rovnici kružnice a oválu. Podobně lze postupovat pro další řezy - viz obr.5.6.1.



Obr. 5.6.1 Řezy ploch normál pro dvouosý krystal

5.7. Lom světla na rozhraní krystalu

Předpokládáme, že rovinná vlna dopadá z izotropního prostředí s indexem lomu n_0 (rychlostí v_0) na rovinné rozhraní krystalu. Budeme hledat pouze směry lomených paprsků. Vztahy pro amplitudy se odvozují podobně jako pro izotropní prostředí, ale jsou relativně komplikované – viz lit.



Obr. 5.7.1 Snellův zákon lomu pro anizotropní prostředí

Podmínka rovnosti fází pro dopadající paprsek (\mathbf{s}_d) a lomený (\mathbf{s}_t) má tvar

$$\mathbf{r}(n\mathbf{s}_t - n_0\mathbf{s}_d) = 0 \quad \text{nebo} \quad \mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{s}_t}{v} - \frac{\mathbf{s}_d}{v_0}\right) = 0 \quad (5.7.1)$$

Což je zobecněný Snellův zákon. Protože \mathbf{r} leží v rozhraní je vektor $(n\mathbf{s}_t - n_0\mathbf{s}_d)$ nebo $\left(\frac{\mathbf{s}_t}{v} - \frac{\mathbf{s}_d}{v_0}\right)$ kolmý na rozhraní. Této skutečnosti využijeme pro geometrickou konstrukci viz

obr. 5.7.1. V počátku O vyneseme ve všech směrech \mathbf{s}_t délku n' a n'' (případně v'^{-1} , v''^{-1}), kterou vypočítáme z Fresnelovy rovnice a získáme tak dvě plochy. Bod P je koncový bod vektoru $n_0\mathbf{s}_d$. Kolmice k rozhraní a procházející bodem P protne obě plochy v bodech Q' a Q'', což jsou koncové body $n'\mathbf{s}'$ a $n''\mathbf{s}''$. Spojnice O a Q', Q'' určují směr dvou paprsků respektive směr dvou rovinných vln. To je známý jev – dvojlom.

Pro $z=0$ platí $\mathbf{r} \approx \mathbf{t}$, pak

$$n'\mathbf{t}\mathbf{s}'_t = n_0\mathbf{t}\mathbf{s}_d \quad n''\mathbf{t}\mathbf{s}''_t = n_0\mathbf{t}\mathbf{s}_d \quad (5.7.2)$$

nebo

$$n'\mathbf{s}'_t \times \mathbf{n} = n_0\mathbf{s}_d \times \mathbf{n} \quad n''\mathbf{s}''_t \times \mathbf{n} = n_0\mathbf{s}_d \times \mathbf{n} \quad (5.7.3)$$

A ve shodě s obr. 5.7.1 platí

$$n' \sin \varphi' = n_0 \sin \varphi \quad n'' \sin \varphi'' = n_0 \sin \varphi \quad (5.7.4)$$

Což je přesná analogie obvyklého Snellova zákona s tím rozdílem, že dostaneme dva lomené paprsky. Podobně můžeme postupovat v případě rozhraní dvou anizotropních prostředí, ale musíme být obezřetní pro případ odraženého paprsku.

