Příklady z Fyziky plazmatu

1 Úvod

1.1 Příklad (2b.)

Uvažujme, že na počátku máme rovnoměrné plazma, ve kterém je hustota elektronů i iontů stejná a rovna n_0 (plasma je elektricky neutrální). Nyní předpokládejme, že se elektrony na ploše y, z nějakým vnějším vlivem ze svých rovnovovážných poloh posunuly o malou hodnotu s ve směru osy x.
(a) Použitím Gaussova zákona ukažte, že elektrické pole, které vznikne mezi náboji je dáno vztahem

$$E_x = \left(\frac{n_0 e}{\epsilon_0}\right) s \ .$$

(b) Ukažte, že pohybová rovnice pro každý elektron pod vlivem tohoto elektrického pole je

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{n_0 e^2}{m_\mathrm{e}\epsilon_0}\right) s = 0 \ .$$

Dokažte, že toto je rovnice harmonického oscilátoru s frekvencí

$$\omega_\mathrm{pe} = \left(\frac{n_0 e^2}{m_\mathrm{e}\epsilon_0}\right)^{1/2} \ .$$

1.2 Příklad (2b.)

(a) Odhadněte teplotu plazmatu, v němž se v kouli o poloměru 1 mm liší hustota elektronů od hustoty iontů o 1 %. Hustota nabitých částic je 10^{20} m^{-3}. (Vyjděte z předpokladu rovnosti kinetické (tepelné) a potenciální energie, vyplývající z Coulombovských sil.)
(b) Dosaďte zadané hodnoty a vypočtenou teplotu do vzorce pro výpočet Debyeovy délky λ_D a ukažte, jaké musí být fyzikální rozměry plazmatu L.

1.3 Příklad (2b.)

Mějme raketu, která je mimo působení gravitačního pole Země.
Označme:

v… konstantní rychlost plynů vyfukovaných z rakety vzhledem k raketě

$u(t)$… okamžitá rychlost rakety

$M(t)$… okamžitá hmotnost celé rakety

$-\mathrm{d}M(t)/\mathrm{d}t$… konstantní časová změna hmotnosti rakety, daná hmotou plynů vyvržených z rakety

(a) Dokažte, že pohybová rovnice rakety je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[M(t)u(t)\right] = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\left[u(t) - v\right] \ .$$

a ukažte, že okamžité zrychlení rakety je

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{M(t)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \ .$$

(b) Zintegrujte pohybovou rovnici a ukažte, že

$$u(t) = u(t_0) + v \ln[M(t_0)/M(t)] \ .$$

(c) Pokud raketa hoří po časový interval $\delta t = t - t_0$ a pokud $M(t) \ll M(t_0)$, ukažte, že počáteční zrychlení rakety je

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} = \frac{v}{M(t_0)} \frac{M(t_0) - M(t)}{\delta t} \simeq \frac{v}{\delta t} \ .$$

(d) Dosaďte do vztahů pro $(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)_{t_0}$ a $u(t)$ pro chemickou raketu $v = 10^3$ m/s a $\delta t = 10$ s; a také pro plazmový pohon s $v = 10^4$ m/s a $\delta t = 100$ dní. Pro spočítání $u(t)$ uvažujte $u_{t_0} = 0$ a $M(t_0) = 10M(t)$.

1.4 Příklad (1b.)

Z Maxwellových rovnic odvoďte rovnici pro zachování náboje

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \ .$$

Tento výsledek ukazuje to, že zachování elektrického náboje přímo vyplývá z Maxwellových rovnic.

1.5 Příklad (2b.)

Z Maxwellových rovnic odvoďte následující zákon zachování energie v elektromagnetických polích, který je známý jako *Poyntingův teorém*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) \mathrm{d}^3 r + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = - \int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) \mathrm{d}^3 r \ ,$$

pro lineární izotropické médium, pro které platí $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ a $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$. Fyzikálně interpretujte každý člen této rovnice. Jaký je fyzikální rozměr těchto členů?