# Kapitola 11

# Boltzmannův a Fokker-Planckův srážkový člen

Odvodíme Boltzmannův srážkový člen pro *binární srážky*. Srážkový člen obsahuje integrály přes rychlosti částic, takže BKR je vlastně integro-diferenciální rovnice. Platnost omezená na slabě ionizované plazma. Coulombovské interakce můžeme ale započítat jako sérii po sobě následujících slabých binárních srážek a dostáváme Fokker-Planckův srážkový člen.

## 11.1 Boltzmannova rovnice

### 11.1.1 Odvození Boltzmannova srážkového integrálu

Srážk. člen $(\delta f_\alpha/\delta t)_{\mathrm{srazk}}$ představuje změnu rozděl. fce v důsledku srážek. Jde o bilanci částic $\Delta N_\alpha$ uvnitř objemového elementu $d^3r\, d^3v$ kolem $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ za čas $dt$

$$\Delta N_\alpha = \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{\mathrm{srazk}} d^3r d^3v dt. \tag{11.1}$$

Je výhodné separovat $\Delta N_\alpha$ do dvou částí

$$\Delta N_\alpha = \Delta N_\alpha^+ - \Delta N_\alpha^-, \tag{11.2}$$

kde $\Delta N_\alpha^+$ označuje přírůstek částic ležících v $d^3r$, které mají *po srážce* rychlost ležící v objemu $d^3v$ a $\Delta N_\alpha^-$ označuje úbytek částic ležících v $d^3r$, které mají *před srážkou* rychlost ležící v intervalu $d^3v$. Vyjádříme $\Delta N_\alpha^-$. Uvažujme částice ležící v $d^3r$ kolem $\mathbf{r}$, které mají rychlost ležící v $d^3v$ kolem $\mathbf{v}$. Tyto jsou rozptýleny srážkami s jinými částicemi (nemusí jít o částice $\alpha$) ležícími ve stejném prostorovém elementu a majícími rychlost z $d^3v_1$ kolem $\mathbf{v_1}$. Uvažujme, že jde o částice $\beta$ a jejich tok dopadající na částice $\alpha$ je

$$\Gamma_\beta = f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}, t) d^3v_1 |\mathbf{v_1} - \mathbf{v}| = f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}, t) d^3v_1 g. \tag{11.3}$$

Průměrný počet interakcí jedné částice $\alpha$ v čas. intervalu $dt$ je

$$\Gamma_\beta b\, db\, d\epsilon\, dt = f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}, t) d^3v_1 g\, b\, db\, d\epsilon\, dt, \tag{11.4}$$

kde záměrná vzdálenost leží v intervalu $b$ a $b+db$ a rovina srážky mezi úhly $\epsilon$ a $\epsilon+d\epsilon$. Předpokládáme, že čas $dt$ je velký ve srovnání s interakční dobou částic. Počet srážek částic $\beta$ se všemi částicemi $\alpha$ ležící v $d^3rd^3v$ kolem $(\mathbf{r},\ \mathbf{v})$ za čas $dt$ je dán součinem

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}, t) d^3v_1 g\, b\, db\, d\epsilon\, dt. \tag{11.5}$$

Zde jsme předpokládali, že počet srážek počet srážek těchto dvou druhů srážek je úměrný součinu $_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}, t)$. Takže zanedbáváme jakoukoliv korelaci $\Rightarrow$ *molekulární chaos*. Celkový počet částic, které jsou rozptýleny dostaneme integrací a sumací

$$\Delta N_\alpha^- = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v dt \sum_\beta \int_{v1} \int_b \int_\epsilon f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}, t) d^3v_1 g\, b\, db\, d\epsilon \tag{11.6}$$

Podobně vyjádříme $\Delta N_\alpha^+$. Uvažujeme *inverzní srážku* v prostorovém elementu $d^3r$ kolem $\mathbf{r}$, v níž se částice $\alpha$ s původní rychlostí v $d^3v'$ kolem $\mathbf{v'}$ sráží s částicemi $\beta$ majícími původní rychlost z $d^3v_1'$. Výsledek je rozptyl částic $\alpha$ do $d^3v$ kolem $\mathbf{v}$. Průměrný počet srážek mezi jednou částicí $\alpha$ a částicemi $\beta$ je

$$f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1'}, t) d^3v_1' g' \, b \, db \, d\epsilon \, dt. \tag{11.7}$$

Potom

$$\Delta N_\alpha^+ = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d^3r d^3v' dt \sum_\beta \int_{v_1'} \int_b \int_\epsilon f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1'}, t) d^3v_1' g' \, b \, db \, d\epsilon. \tag{11.8}$$

Víme, že $g' = g = |\mathbf{v_1} - \mathbf{v}|$ a z teorie Jakobiánu

$$d^3v' d^3v_1' = |J| d^3v d^3v_1. \tag{11.9}$$

V následující podkapitole ukážeme, že $|J| = 1$, takže

$$d^3v' d^3v_1' = d^3v d^3v_1. \tag{11.10}$$

Vztah (11.11) můžeme tedy zapsat jako

$$\Delta N_\alpha^+ = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d^3r d^3v dt \sum_\beta \int_{v_1} \int_b \int_\epsilon f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1'}, t) d^3v_1 g \, b \, db \, d\epsilon. \tag{11.11}$$

Nyní zkombinujeme výrazy pro $\Delta N_\alpha^-$ a $\Delta N_\alpha^+$ a výraz $b \, db \, d\epsilon$ nahradíme výrazem $\sigma(\Omega) d\Omega$, takže dostáváme výraz pro Boltzmannův srážkový integrál

$$\left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{\text{srazk}} = \left(\frac{\Delta N_\alpha^+ - \Delta N_\alpha^-}{d^3r d^3v dt}\right) = \tag{11.12}$$

$$= \sum_\beta \int_{v_1} \int_\Omega (f'_\alpha f'_{\beta 1} - f_\alpha f_{\beta 1}) d^3 v_1 g\sigma(\Omega) d\Omega,$$

kde jsme použili označení

$$\begin{aligned} f'_\alpha &= f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) && (11.13)\\ f'_{\beta 1} &= f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}', t) && (11.14)\\ f_\alpha &= f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) && (11.15)\\ f_{\beta 1} &= f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}, t) && (11.16)\\ & && (11.17) \end{aligned}$$

Explicitně tedy můžeme BKR zapsat jako

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha = \sum_\beta \int_{v_1} \int_\Omega (f'_\alpha f'_{\beta 1} - f_\alpha f_{\beta 1}) d^3 v_1 g\sigma(\Omega) d\Omega, \tag{11.18}$$

takže jde o *integro-diferenciální rovnici*

### 11.1.2 Jakobián transformace

Transformace použitá v předchozí podkapitole je

$$d^3 v' \, d^3 v'_1 = |J| \, d^3 v \, dv_1, \tag{11.19}$$

kde

$$J = \frac{\partial(\mathbf{v}', \mathbf{v_1'})}{\partial(\mathbf{v}, \mathbf{v_1})} = \frac{\partial(v'_x, v'_y, v'_z, v'_{1x}, v'_{1y}, v'_{1z})}{\partial(v_x, v_y, v_z, v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})}, \tag{11.20}$$

což můžeme vyjádřit jako

$$(J) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v'_x}{\partial v_x} & \frac{\partial v'_y}{\partial v_x} & \dots & \frac{\partial v'_{1z}}{\partial v_x} \\ \frac{\partial v'_x}{\partial v_y} & \frac{\partial v'_y}{\partial v_y} & \dots & \frac{\partial v'_{1z}}{\partial v_y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial v'_x}{\partial v_{1z}} & \frac{\partial v'_y}{\partial v_{1z}} & \dots & \frac{\partial v'_{1z}}{\partial v_{1z}} \end{pmatrix}. \tag{11.21}$$

Pomocí vztahů zavedených v kapitole o interakcích částic můžeme $d^3v\, d^3v_1$ vyjádřit pomocí tepelné $V_0$ a vzájemné $g$ rychlosti před srážkou

$$d^3v\, d^3v_1 = |J_c| d^3V_0\, d^3g, \tag{11.22}$$

kde $J_c$ je Jakobián transformace. Uvažujme nejprve pouze $x$-komponentu v (11.22):

$$dv_x\, dv_{1x} = |\frac{\partial(v_x, v_{1x})}{\partial(V_{0x}, g_x)}| dV_{0x}\, dg_x. \tag{11.23}$$

Vypočítáme determinant naznačené matice 2x2

$$dv_x\, dv_{1x} = (\frac{\mu}{m_1} + \frac{\mu}{m})\, dV_{0x}\, dg_x = dV_{0x}\, dg_x. \tag{11.24}$$

Součin všech tří komponent odpovídajících $x$, $y$ a $z$ složkám dává

$$d^3v\, d^3v_1 = d^3V_0\, d^3g. \tag{11.25}$$

Podobně

$$d^3v'\, d^3v'_1 = d^3V'_0\, d^3g'. \tag{11.26}$$

Viděli jsme, že $V_0 = V_0'$. Vektory $\mathbf{g}$ a $\mathbf{g}'$ se liší pouze směrem, ale mají stejnou velikost, takže $d^3g = d^3g'$. V důsledku tedy

$$d^3v\, d^3v_1 = d^3v'\, d^3v_1' \tag{11.27}$$

### 11.1.3 Rychlost změny fyzikální veličiny v důsledku srážek

Rychlost změny fyzikální veličiny $\chi(\mathbf{v})$ na jednotkový objem v důsledku srážek vyjádříme jako

$$\left[\frac{\delta(n_\alpha\langle\chi\rangle_\alpha)}{\delta t}\right]_{\text{srazk}} = \int_v \chi(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t})_{\text{srazk}}\, d^3v. \tag{11.28}$$

Za použití Boltzmannova srážk. integrálu dostáváme

$$\left[\frac{\delta(n_\alpha\langle\chi\rangle_\alpha)}{\delta t}\right]_{\text{srazk}} = \sum_\beta \int_\Omega \int_{v_1} \int_v (f_\alpha' f_{\beta 1}' - f_\alpha f_{\beta 1})\chi\, g\sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v. \tag{11.29}$$

Uvědomíme si, že ke každé srážce existuje srážka inverzní se stejným účinným průřezem. Takže

$$\begin{aligned}\sum_\beta \int_\Omega \int_{v_1} \int_v f_\alpha' f_{\beta 1}' \chi\, g\sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v = \\ = \sum_\beta \int_\Omega \int_{v_1} \int_v f_\alpha f_{\beta 1} \chi'\, g\sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v,\end{aligned} \tag{11.30}$$

kde jsme použili $d^3v_1'\, d^3v' = d^3v_1\, d^3v$ a $\chi' = \chi(\mathbf{v}')$. Použijeme-li vztah (11.30) dostáváme alternativní vyjádření pro změnu veličiny $\chi$ v důsledku srážek.

$$\left[\frac{\delta(n_\alpha\langle\chi\rangle_\alpha)}{\delta t}\right]_{\text{srazk}} = \sum_\beta \int_\Omega \int_{v_1} \int_v f_\alpha f_{\beta 1}(\chi' - \chi) g\sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v. \tag{11.31}$$

## 11.2 Boltzmannův srážkový člen ve slabě ionizovaném plazmatu

Předp., že

- rozděl. fce neutrálních částic je homogenní a izotropní
- vnější síly působící na elektrony jsou malé, takže elektrony nejsou příliš vzdáleny od rovnovážného stavu $\Rightarrow$ jejich rozděl. fce není příliš prostorově nehomogenní a anizotropní
- za rovnovážného stavu elektrony nevykazují žádnou driftovou rychlost a jejich rozděl. fce je homogenní a izotropní

### 11.2.1 Rozvoj rozdělovací funkce ve sférickou harmonickou řadu

Označíme $(v, \phi, \theta)$ sférické souřadnice v rychlostním prostoru. Podle předpokladů je závislost $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ na $\phi$ a $\theta$ velmi malá, takže je možné rozvinout $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ v řadu podle úhlových rychlostních souřadnic $\phi$ a $\theta$ a vzít pouze prvních pár členů tohoto rozvoje. Provedeme tedy rovoj do *sférické harmonické řady* pomocí *Fourierovského rozvoje* v $\phi$ a *asociovaných Legendrových polynomů* $P_n^m(\cos\theta)$ v $\theta$:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^m(\cos\theta) \cdot [f_{mn}(\mathbf{r}, v, t) \cos(m\phi) + g_{mn}(\mathbf{r}, v, t) \sin(m\phi)], \tag{11.32}$$

kde funkce $f_{mn}$ a $g_{mn}$ jsou koeficienty rozvoje.

- První člen v (11.32) odpovídá $m = 0$ a $n = 0$, a protože $P_0^0(\cos\theta) = 1$, je roven $f_{00}(\mathbf{r}, v, t)$. Toto je izotropní rozdělovací fce odpovídající rovnovážnému stavu.

- Člen s $m = 1$ a $n = 0$ se rovná nule, protože $P_0^1(\cos\theta) = 0$
- Další vyšší člen je pro $m = 0$ a $n = 1$, přičemž $P_1^0(\cos\theta) = \cos\theta$, takže je to $f_{01}(\mathbf{r}, v, t)\cos\theta$

Vezmeme-li tedy do úvahy pouze první dva nenulové členy rozvoje

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{00}(\mathbf{r}, v, t) + \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z}}{v} f_{01}(\mathbf{r}, v, t), \tag{11.33}$$

kde jsme $\cos\theta$ nahradili výrazem $(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z})/v$

### 11.2.2 Aproximativní vyjádření Boltzmannova srážkového členu

Boltzmannův srážkový člen je dán vztahem (11.12) a pro binární srážky elektronů s neutrály jej můžeme zapsat jako

$$\left(\frac{\delta f_e}{\delta t}\right)_{\text{srazk}} = \int_b \int_\epsilon \int_{v1} (f'_e f'_{n1} - f_e f_{n1})\, g\, b\, db\, d\epsilon\, d^3 v_1, \tag{11.34}$$

kde jsme $\sigma(\Omega) d\Omega$ nahradili $b\, db\, d\epsilon$. Zde $f_e$ reprezentuje nerovnovážnou rozděl. fci elektronů a $f_n$ je izotropní rovnovážná rozděl. fce neutrálních částic. V první aproximaci předp., že neutrální částice jsou v klidu a nejsou ovlivněny srážkami s elektrony. Tedy

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{v'_1} = 0 \tag{11.35}$$

$$f_{n1} = f'_{n1} \tag{11.36}$$

a rovnici (11.34) přepíšeme jako

$$\left(\frac{\delta f_e}{\delta t}\right)_{\text{srazk}} = \int_{v1} f_{n1} d^3 v_1 \int_0^{2\pi} d\epsilon \int_0^\infty (f'_e - f_e)\, g\, b\, db. \tag{11.37}$$

Protože hustota neutrálních částic je

$$n_n = \int_{v1} f_{n1}\, d^3 v_1 \tag{11.38}$$

dále upravíme

$$(\frac{\delta f_e}{\delta t})_{\text{srazk}} = n_n \int_0^{2\pi} d\epsilon \int_0^{\infty} (f'_e - f_e)\, g\, b\, db. \tag{11.39}$$

Rozdělovací fce pro elektrony před srážkou je

$$f_e = f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{00}(\mathbf{r}, v, t) + \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z}}{v} f_{01}(\mathbf{r}, v, t) \tag{11.40}$$

a po srážce

$$\begin{aligned} f'_e = f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) = f_{00}(\mathbf{r}, v', t) + \frac{\mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z}}{v'} f_{01}(\mathbf{r}, v', t) = \\ = f_{00}(\mathbf{r}, v, t) + \frac{\mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z}}{v} f_{01}(\mathbf{r}, v, t). \end{aligned} \tag{11.41}$$

V posledním vztahu jsme předpokládali, že $v' = v$, neboť elektrony neztrácejí energii, protože neutrály jsou mnohem těžší a jsou v klidu. Výsledně tedy píšeme

$$f'_e - f_e = \frac{(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z}}{v} f_{01}(\mathbf{r}, v, t). \tag{11.42}$$

Beze ztráty na obecnosti můžeme zvolit osu $v_z$ paralelně s původní vzájemnou rychlostí $g$ elektronu, takže

$$(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z} = (\mathbf{g}' - \mathbf{g}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_z = g(\cos\chi - 1) = v(\cos\chi - 1), \tag{11.43}$$

kde $\chi$ je rozptylový úhel (úhel mezi $\mathbf{g}$ a $\mathbf{g}'$). Dosazením (11.43) do (11.42) dostáváme

$$f_e' - f_e = -(1-\cos\chi) f_{01}(\mathbf{r}, v, t), \tag{11.44}$$

takže srážkový člen můžeme zapsat jako

$$(\frac{\delta f_e}{\delta t})_{\mathrm{srazk}} = -n_n\, g\, f_{01}(\mathbf{r}, v, t) \int_0^{2\pi} d\epsilon \int_0^{\infty} (1-\cos\chi)\, b\, db. \tag{11.45}$$

Protože účinný průřez pro přenos hybnosti mezi elektrony a neutrály je definován jako

$$\sigma_m = \int_\Omega (1-\cos\chi)\sigma(\Omega)\, d\Omega = \int_0^{2\pi} d\epsilon \int_0^{\infty} (1-\cos\chi)\, b\, db \tag{11.46}$$

můžeme (11.45) psát takto

$$(\frac{\delta f_e}{\delta t})_{coll} = -n_n\, g\, \sigma_m f_{01}(\mathbf{r}, v, t). \tag{11.47}$$

Pokud substituujeme $f_{01}(\mathbf{r}, v, t)$ v (11.47) pomocí (11.41) a uvědomíme si, že v použité aproximaci stacionárních iontů $(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{z}})/v = (\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{z}})/g = 1$, pak

$$(\frac{\delta f_e}{\delta t})_{coll} = -n_n\, v\, \sigma_m (f_e - f_{e0}) = -\nu_r(v)(f_e - f_{e0}), \tag{11.48}$$

kde jsme zavedli rychlostně závislou srážkovou frekvenci pro přenos hybnosti $\nu_r(v) = n_n v \sigma_m$ a $f_{00}$ byla nahrazena symbolem $f_{e0}$, tak jak jsme to používali dříve. Vyjádření srážkového členu (11.48) je podobné relaxačnímu Krookovu modelu až na fakt, že srážková frekvence je závislá na rychlosti.

### 11.2.3 Rychlost změny hybnosti v důsledku srážek

Podle definice srážkového členu $\mathbf{A}_e$ v transportní pohybové rovnici máme

$$\mathbf{A_e} = [\frac{\delta(\rho_{me}\mathbf{u_e})}{\delta t}]_{coll} = m_e \int_v \mathbf{v}(\frac{\delta f_e}{\delta t})_{coll}\, d^3v. \tag{11.49}$$

Dosadíme (11.48) a dostáváme

$$\mathbf{A_e} = -m_e \int_v \nu_r(v)\mathbf{v} f_e d^3v + m_e \int_v \nu_r(v)\mathbf{v} f_{e0} d^3v. \tag{11.50}$$

Pokud bychom předpokládali, že srážková frekvence $\nu_r$ nezávisí a rychlosti a pokud el. plyn nemá žádnou driftovou rychlost v rovnovážném stavu, tj.

$$\mathbf{u_{e0}} = \frac{1}{n_e}\int_v \mathbf{v} f_{e0}\, d^3v = 0, \tag{11.51}$$

máme

$$A_e = -n_e m_e \nu_r \mathbf{u_e} = -\rho_{me}\nu_r \mathbf{u_e}, \tag{11.52}$$

kde $\mathbf{u}_e$ je průměrná rychlost elektronů v nerovnovážném stavu. Tato rovnice odpovídá vztahu, který jsme použili v Langevinově rovnici.

## 11.3 Fokker-Planckova rovnice

Uvažujeme Coloumbovské interakce. Vychýlení nabitých částic s velkým deflekčním úhlem v důsledku Coulombovských interakcí nahradíme řadou po sobě následujících slabých binárních srážek, tj. srážek s malým úhlem rozptylu. Fokker-Planckův srážkový člen může být tedy přímo odvozen z Boltzmannova srážk. členu. Uvažujeme srážky mezi částicemi $\alpha$ a $\beta$.

### 11.3.1 Odvození Fokker-Planckova srážkového členu

Veličina $\chi(\mathbf{v})$ je libovolná funkce rychlosti asociovaná s částicemi $\alpha$. Změna této veličiny na jednotkový objem v důsledku srážek je

$$\int_v \chi(\mathbf{v})(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t})_{\text{srazk}}\, d^3v = \int_\Omega \int_{v_1} \int_v (f'_\alpha f'_{\beta 1} - f_\alpha f_{\beta 1})\chi g\sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v = \int_\Omega \int_{v_1} \int_v f_\alpha f_{\beta 1}(\chi' - \chi) g\sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v \tag{11.53}$$

, kde $\chi' = \chi(\mathbf{v}')$ je jediná funkce rychlosti po srážce. Pro slabé srážky můžeme psát

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}, \tag{11.54}$$

kde $\Delta\mathbf{v}$ je malá veličina. Protože

$$\chi' = \chi(\mathbf{v}') = \chi(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}), \tag{11.55}$$

můžeme rozvinout $\chi'$ do Taylorovy řady

$$\chi(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) = \chi(\mathbf{v}) + \sum_i \frac{\partial \chi}{\partial v_i}\Delta v_i + \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial^2 \chi}{\partial v_i \partial v_j}\Delta v_i \Delta v_j + \cdots \tag{11.56}$$

Dosazením (11.56) do (11.53) dostáváme

$$\int_v \chi(\frac{\delta f_\alpha}{\partial t})_{\text{srazk}}\, d^3v = \int_\Omega \int_{v_1} \int_v f_\alpha f_{\beta 1}(\sum_i \frac{\partial \chi}{\partial v_i}\Delta v_i + + \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial^2 \chi}{\partial v_i \partial v_j}\Delta v_i \Delta v_j) g\, \sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v, \tag{11.57}$$

kde jsme zanedbali vyšší členy rozvoje. Nyní se musíme snažit vyloučit libovolnou fci $\chi$. Integrujeme jedenkrát per partes první skupinu integrálů obsahující $\partial\chi/\partial v_i$ a dvakrát per partes druhou skupinu obsahující $\partial^2\chi/(\partial v_i \partial v_j)$. Pro $x$-komponentu první skupiny integrálů obsahujících $\partial\chi/\partial v_i$ máme

$$\int_\Omega \int_{v_1} \int_v \frac{\partial\chi(\mathbf{v})}{\partial v_x} \Delta v_x f_\alpha(\mathbf{v}) f_{\beta 1}(\mathbf{v_1})\, g\, \sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v = \tag{11.58}$$

$$\int_\Omega \int_{v_1} [\int_v dv_y dv_z \frac{\partial\chi(\mathbf{v})}{\partial v_x}\, dv_x (v_x' - v_x).f_\alpha(\mathbf{v}) g\sigma(\Omega)\, d\Omega] f_\beta(\mathbf{v_1})\, d^3v_1.$$

Ve členu v hranaté závorce můžeme substituovat

$$dV = \frac{\partial\chi(\mathbf{v})}{\partial v_x} dv_x \tag{11.59}$$

a

$$U = (v_x' - v_x) f_\alpha(\mathbf{v}) g\sigma(\Omega)\, d\Omega \tag{11.60}$$

a integrovat přes $v_x$ per partes, takže dostáváme

$$\int_{v_x} \frac{\partial\chi(\mathbf{v})}{\partial v_x}\, dv_x (v_x' - v_x) f_\alpha(\mathbf{v}) g\sigma(\Omega)\, d\Omega = \tag{11.61}$$

$$= - \int_{v_x} \chi(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_x} [(v_x' - v_x) f_\alpha(\mathbf{v}) g\sigma(\Omega)\, d\Omega]\, dv_x,$$

kde integrovaný člen je roven nule, protože $f$ musí jít k nule pro $\pm\infty$. Takže integrál (11.58) je

$$\int_\Omega \int_{v_1} \int_v \frac{\partial\chi(\mathbf{v})}{\partial v_x} \Delta v_x f_\alpha(\mathbf{v}) f_{\beta 1}(\mathbf{v_1}) g\sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v = \tag{11.62}$$

$$= - \int_\Omega \int_{v_1} \int_v \chi(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_x} [\Delta v_x f_\alpha(\mathbf{v}) g\sigma(\Omega)\, d\Omega] f_\beta(\mathbf{v_1})\, d^3v_1\, d^3v.$$

Podobným způsobem integrujeme per partes ostatní integrály v (11.57) a dostaneme srážkový člen v tomto tvaru

$$\int_v \chi(\frac{\delta f_\alpha}{\partial t})_{\text{srazk}}\, d^3v == -\int_\Omega \int_{v_1} \int_v \chi \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i}[\Delta v_i f_\alpha g\sigma(\Omega)\, d\Omega] f_{\beta 1}\, d^3v_1\, d^3v + \tag{11.63}$$

$$+\int_\Omega \int_{v_1} \int_v \frac{1}{2}\chi \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}[\Delta v_i \Delta v_j f_\alpha g\sigma(\Omega)\, d\Omega] f_{\beta 1}\, d^3v_1 d^3v =$$

$$= \int_v \chi[\sum_i \frac{\partial}{\partial v_i}(f_\alpha \int_\Omega \int_{v_1} \Delta v_i g\sigma(\Omega)\, d\Omega f_{\beta 1}\, d^3v_1] d^3v +$$

$$+\int_v \chi[\frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}(f_\alpha \int_\Omega \int_{v_1} \Delta v_i \Delta v_j f_\alpha g\sigma(\Omega)\, d\Omega f_{\beta 1}\, d^3v_1)] d^3v.$$

Definujeme veličiny

$$\langle \Delta v_i \rangle_{av} = \int_\Omega \int_{v_1} \Delta v_i g\sigma(\Omega)\, d\Omega f_{\beta 1}\, d^3v_1 \tag{11.64}$$

a

$$\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_{av} = \int_\Omega \int_{v_1} \Delta v_i \Delta v_j g\sigma(\Omega)\, d\Omega f_{\beta 1}\, d^3v_1, \tag{11.65}$$

což jsou vlastně modifikované střední hodnoty přes úhel rozptylu a rozděl. fce narážejících částic. Pomocí těchto veličin dostáváme

$$\int_v \chi(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t})_{\text{srazk}}\, d^3v = -\int_v \chi[\sum_i \frac{\partial}{\partial v_i}(f_\alpha \langle \Delta v_i \rangle_{av}) + \tag{11.66}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}(f_\alpha \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_{av})]d^3v.$$

Protože tato rovnice platí pro libovolnou fci $\chi$, pro $\chi = 1$ platí

$$(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t})_{\mathrm{srazk}} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial v_i}(f_\alpha \langle \Delta v_i \rangle_{av}) + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}(f_\alpha \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_{av}). \tag{11.67}$$

Toto je srážkový člen *Fokker-Planckovy rovnice*. Střední hodnoty $\langle \Delta v_i \rangle_{av}$ a $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_{av}$ jsou tzv. Fokker-Planckovy koeficienty *dynamického tření* a *difuze v rychlostním prostoru*. Vyjadřují střední rychlost změny $\Delta v_i$ a $\Delta v_i \Delta v_j$ v důsledku mnoha po sobě následujících Coulombovských srážek.