Kapitola 3

Základy kinetické teorie plazmatu

3.1 Úvod

Plazma je systém obsahující velké množství interagujících částic, takže je vhodné využít pro jeho analýzu statistický přístup.

3.2 Fázový prostor

V každém časovém okamžiku je částice plazmatu lokalizována pomocí polohového vektoru **r**

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}, \tag{3.1}$$

kde $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ a $\hat{\mathbf{z}}$ označuje jednotkové vektory ve směru os x, y a z. Rychlost těžiště částice je dána vektorem

$$\mathbf{v} = v_{\mathrm{x}}\hat{\mathbf{x}} + v_{\mathrm{y}}\hat{\mathbf{y}} + v_{\mathrm{z}}\hat{\mathbf{z}}, \tag{3.2}$$

kde $v_{\mathrm{x}} = dx/dt$, $v_{\mathrm{y}} = dy/dt$ a $v_{\mathrm{z}} = dz/dt$.

Analogicky ke konfigurační prostoru definovaném souřadnicemi poloh (x, y, z) zavedeme rychlostní prostor $(v_\mathrm{x}, v_\mathrm{y}, v_\mathrm{z})$.

3.2.1 Jednočásticový fázový prostor

Klasická mechanika - dynamický stav každé částice určen polohovým vektorem a vektorem rychlosti $\Rightarrow$ zvádíme fázový prostor $(x, y, z, v_\mathrm{x}, v_\mathrm{y}, v_\mathrm{z})$ (μ-prostor).

Dynamický stav každé částice reprezentován jedním bodem. Když se částice pohybuje, její reprezentativní bod opisuje trajektorii ve fázovém prostoru. Systém N částic je v každém okamžiku popsán N body fázového μ-prostoru.

3.2.2 Vícečásticový fázový prostor

Γ-prostor: systém N částic bez vnitřních stupňů volnosti reprezentován jedním bodem v $6N$-dim prostoru, $3N$ souřadnice poloh $(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, ..., \mathbf{r}_\mathrm{N})$ a $3N$ souřadnice rychlostí $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v}_\mathrm{N})$. Jeden bod v Γ-prostoru koresponduje s mikroskopickým stavem celého systému částic.

3.3 Objemové elementy

Malý objemový element v konfiguračním prostoru je dán jako $d^3r = dx\,dy\,dz$. Zde konečně velký objemový element obsahující dostatečné množství částic. Na druhou stranu dostatečně malý ve srovnání s charakteristickými rozměry prostorových změn fyzikálních veličin. Pokud v plynu obsahujícím 10^{18} molekul/m^3 vezmeme v úvahu např. $d^3r = 10^{-12}$ m^3 (bod), nachází se v objemu d^3r stále ještě 10^6

molekul.

Ve fázovém prostoru (μ-prostoru) je diferenciální objemový element zobrazen jako šestidimenzionální kostka:

$$d^3r\, d^3v = dx\, dy\, dz\, dv_{\mathrm{x}}\, dv_{\mathrm{y}}\, dv_{\mathrm{z}}, \tag{3.3}$$

Počet bodů uvnitř objemového elementu $d^3r\, d^3v$ je obecně funkcí času a polohy objemového elementu ve fázovém prostoru. Souřadnice $\mathbf{r}$ a $\mathbf{v}$ fázového prostoru jsou navzájem nezávislé, protože představují polohu individuálních objemových elementů ve fázovém prostoru.

3.4 Rozdělovací funkce

$d^6N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ počet částic typu α uvnitř objemového elementu $d^3r\, d^3v$ kolem souřadnic fázového prostoru ($\mathbf{r}$,$\mathbf{v}$) v čase t. Rozdělovací funkce ve fázovém prostoru je hustota bodů reprezentujících částice α

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{d^6N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{d^3r\, d^3v} \tag{3.4}$$

$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ je kontinuální, kladná a konečná funkce svých argumentů. Klesá k nule, když se rychlost blíží k nejonečnu.

Rozdělovací funkce je obecně funkcí polohového vektoru $\mathbf{r} \Rightarrow$ nehomogenní plazma.

V rychlostním prostoru může být rozdělovací funkce anizotropní, pokud závisí na orientaci vektoru rychlosti $\mathbf{v}$, nebo izotropní pokud nezávisí na orientaci $\mathbf{v}$, ale pouze na jeho velikosti, tj. na rychlosti částice $v = |\mathbf{v}|$.

Plazma v termodynamické rovnováze je popsáno homogenní, izotropní a časově nezávislou rozdělovací funkcí.

Jeden ze základních problémů kinetické teorie je určení rozdělovací funkce daného systému.

3.5 Hustota a průměrná rychlost

Hustota $n_\alpha(\mathbf{r}, t)$

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{d^3r} \int_v d^6 N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \tag{3.5}$$

nebo za použití definice (3.4)

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int_v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \tag{3.6}$$

Průměrná (driftová) rychlost $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ je definovaná jako makroskopická rychlost toku částic α v okolí bodu s polohým vektorem $\mathbf{r}$ v čase t

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r}, t) d^3r} \int_v \mathbf{v} d^6 N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \tag{3.7}$$

Použijeme-li definici rozdělovací funkce (3.4) dostáváme

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int_v \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \tag{3.8}$$

Tento vztah reprezentuje obvyklý statistický postup pro vyjadřování průměrných hodnot veličin.

$n_\alpha(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ jsou makroskopické proměnné, které závisí pouze na souřadnicích ($\mathbf{r}$ a t.

3.6 Boltzmannova kinetická rovnice

Závislost rozdělovací funkce na nezávislých proměnných ($\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$) a t se řídí tzv. Boltzmannovou kinetickou rovnicí (BKR). Zde odvodíme bezsrážkovou BKR i obecnou podobu BKR zahrnující vliv interakcí mezi částicemi, aniž bychom explicitně odvodili konkrétní výraz pro srážkový člen.

3.6.1 Bezsrážková BKR

Připomeneme si, že

$$d^6 N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 r \, d^3 v \tag{3.9}$$

Předpokládejme, že na každou částici působí vnější síla $\mathbf{F}$. Bez interakcí bude částice za čas dt v bodě:

$$\mathbf{r}'(t + dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v} dt \tag{3.10}$$

$$\mathbf{v}'(t + dt) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a} dt, \tag{3.11}$$

kde $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m_\alpha$ je zrychlení částice a m_α její hmotnost. $\Rightarrow$ částice α nacházející se v čase t v okolí ($\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$) uvnitř $d^3 r \, d^3 v$ budou za čas dt zaujímat objem $d^3 r' \, d^3 v'$ v okolí bodu ($\mathbf{r}'$, $\mathbf{v}'$). Jde o stále stejné částice a neuvažujeme žádné srážky:

$$f_\alpha(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + dt) d^3 r' \, d^3 v' = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 r \, d^3 v. \tag{3.12}$$

Objemový element $d^3 r \, d^3 v$ může mít zdeformovaný tvar v důsledku pohybu částic:

$$d^3 r' \, d^3 v' = \mid J \mid d^3 r \, d^3 v, \tag{3.13}$$

kde J označuje Jakobián transformace z $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ na $(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$. Platí $\mid J \mid = 1$, takže

$$d^3r'\, d^3v' = d^3r\, d^3v \tag{3.14}$$

a z rovnice (3.12) dostáváme

$$[f_\alpha(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t+dt) - f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)]d^3r\, d^3v = 0. \tag{3.15}$$

První člen na levé straně rovnice (3.15) rozvineme do Taylorovy řady okolo $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$:

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, \mathbf{v} + \mathbf{a}dt, t + dt) = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + [\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (v_\mathrm{x}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + v_\mathrm{y}\frac{\partial f_\alpha}{\partial y} + \\ v_\mathrm{z}\frac{\partial f_\alpha}{\partial z}) + (a_\mathrm{x}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\mathrm{x}} + a_\mathrm{y}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\mathrm{y}} + a_\mathrm{z}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\mathrm{z}})]dt, \end{aligned} \tag{3.16}$$

přičemž zanedbáváme členy řádu $(dt)^2$ a vyšší. Použijeme-li operátor nabla

$$\nabla = \boldsymbol{x}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{y}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.17}$$

a podobně definujeme nabla operator v rychlostním prostoru

$$\nabla_v = \boldsymbol{x}\frac{\partial}{\partial v_\mathrm{x}} + \boldsymbol{y}\frac{\partial}{\partial v_\mathrm{y}} + \boldsymbol{z}\frac{\partial}{\partial v_\mathrm{z}}, \tag{3.18}$$

dostáváme z (3.16)

$$f_\alpha(\mathbf{r} + vdt, \mathbf{v} + adt, t + dt) = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \left[\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{a}\cdot\nabla_v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\right]dt. \tag{3.19}$$

Po dosazení do vztahu (3.15) máme

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) + \mathbf{a}\cdot\nabla_v f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = 0, \tag{3.20}$$

což je Boltzmannova kinetická rovnice v bezsrážkovém případě.

Tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\mathcal{D} f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\mathcal{D}t} = 0, \tag{3.21}$$

kde operátor

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla + \mathbf{a}\cdot\nabla_v \tag{3.22}$$

představuje úplnou derivaci vzhledem k času, ve fázovém prostoru. $\Rightarrow$ zákon zachování hustoty bodů ve fázovém prostoru, tzv. *Liouvillův teorém* - srážky stejně jako radiační ztráty a procesy vzniku a zániku částic nepovažujeme za důležité.

3.6.2 Jakobián transformace ve fázovém prostoru

3.6.3 Vliv interakcí mezi částicemi

Vliv interakcí mezi částicemi? $\Rightarrow$ modifikace vztahu (3.20). Díky srážkám mohou během času dt některé částice α, které byly původně v $d^3r\,d^3v$, z tohoto elementu zmizet a obráceně jiné částice, které byly mimo tento objemový element, se v něm mohou objevit. Čistý zisk nebo úbytek částic α z $d^3r\,d^3v$ způsobený srážkami v průběhu časového intervalu dt označíme

$$\left(\frac{\delta f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\delta t}\right)_{srazk} d^3r\,d^3v\,dt, \tag{3.23}$$

kde $(\delta f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)/\delta t)_{srazk}$ představuje rychlost změny $f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ díky srážkám. Pokud tedy uvažujeme srážky, musíme vztah (**??**) přepsat jako

$$[f_\alpha(\mathbf{r}',\mathbf{v}',t+dt) - f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)]d^3r\,d^3v = \left(\frac{\delta f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\delta t}\right)_{srazk} d^3r\,d^3v\,dt \tag{3.24}$$

a Boltzmannova rovnice modifikována pro tento případ má tvar

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) + \mathbf{a}\cdot\nabla_v f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \left(\frac{\delta f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\delta t}\right)_{srazk}. \tag{3.25}$$

Za použití operátoru úplného diferenciálu podle času definovaného vztahem (3.22) můžeme tento vztah přepsat do kompaktní podoby

$$\frac{\mathcal{D} f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\mathcal{D} t} = \left(\frac{\delta f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\delta t}\right)_{srazk}. \tag{3.26}$$

Přesná podoba srážkového členu není známa.

3.7 Relaxační model pro srážkový člen

Uvažujeme velmi jednoduché vyjádření srážkového členu, tzv. Krookův model nebo relaxační model. Existuje i mnohem propracovanější vyjádření, např. Boltzmannův srážkový integrál nebo Fokker-Planckův srážkový člen.

Předpokládá se, že srážky obnovují lokální rovnováhu (lokálně rovnovážná rozdělovací fce $f_{\alpha 0}(\mathbf{r},\mathbf{v})$). Pokud nepůsobí externí síly, systém, který původně není v rovnováze a je popsán rozdělovací funkcí

$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, dosáhne v průběhu času díky srážkám lokální rovnováhy podle exponenciálního zákona. Doba charakteristická pro tento proces je tzv. relaxační doba τ. Relaxační doba řádově odpovídá době mezi dvěma srážkami a může být rovněž vyjádřena jako ν^{-1}, kde ν je relaxační srážková frekvence. Model byl původně vyvinut Krookem:

$$\left(\frac{\delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\delta t}\right)_{srazk} = -\frac{(f_\alpha - f_{\alpha 0})}{\tau}. \tag{3.27}$$

Podle tohoto vztahu pro srážkový člen platí, že když $f_\alpha = f_{\alpha 0}$ máme $(\delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)/\delta t)_{srazk} = 0$, takže ve stavu lokální rovnováhy se rozdělovací funkce díky srážkám nemění.

Fyzikální smysl relaxačního modelu? Uvažujme BKR se srážkovým členem bez vnějších sil a prostorových gradientů, $f_{\alpha 0}$ a τ jsou na čase nezávislé:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = -\frac{(f_\alpha - f_\alpha 0)}{\tau}, \tag{3.28}$$

což můžeme přepsat jako

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{f_\alpha}{\tau} = \frac{f_\alpha 0}{\tau}. \tag{3.29}$$

Řešení této jednoduché nehomogenní diferenciální rovnice dostaneme pomocí řešení příslušné homogenní rovnice, tj. $C\, e^{t/\tau}$ (C je konstanta). Kompletní řešení rovnice je tedy

$$f_\alpha(\mathbf{v}, t) = f_{\alpha 0} + [f_\alpha(\mathbf{v}, 0) - f_{\alpha 0}]e^{-t/\tau}. \tag{3.30}$$

Tedy, rozdíl mezi f_α a $f_{\alpha 0}$ exponencielně klesá v čase rychlostí, která odpovídá relaxační srážkové frekvenci $\nu = 1/\tau$.

Užitečný srážkový model, v mnoha případech vede k výsledků téměř identickým s těmi, které získáme pomocí Boltzmannova srážkového integrálu. Především vhodný pro slabě ionizované plazma (pouze srážky iontů s neutrály). Ale relaxační model se dá použít pouze pro srážky částic přibližně stejných hmotností.

3.8 Vlasovova rovnice

Aproximace - pohyb částic plazmatu je řízen jednak vnějšími silovými poli a jednak makroskopicky vystředovanými

Vlasovova rovnice je parciální diferenciální rovnice, která popisuje časový vývoj rozdělovací funkce ve fázovém prostoru a která přímo využívá makroskopicky vystředovaných elektromagnetických polí. Tuto rovnici můžeme získat z Boltzmannovy rovnice (3.20), když zahrneme do silového členu makroskopická pole

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \left[\mathbf{F}_{ext} + q_\alpha(\mathbf{E}_{int} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{int})\right] \cdot \nabla_v f_\alpha = 0. \tag{3.31}$$

Zde $\mathbf{F}_{ext}$ představuje vnější síly včetně síly Lorentzovi odpovídající externě přiloženým elektrickým a magnetickým polím a $\mathbf{E}_{int}$, $\mathbf{B}_{int}$ jsou vystředované vnitřní elektrické a magnetické pole vznikající v důsledku přítomnosti a pohybu všech nabitých částic uvnitř plazmatu. Aby byly vnitřní makroskopické elmag pole $\mathbf{E}_{int}$ a $\mathbf{B}_{int}$ konzistentní s makroskopickým nábojem a proudy existující v plazmatu, musí splňovat Maxwellovy rovnice

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{int} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.32}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{int} = 0 \tag{3.33}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_{int} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{int}}{\partial t} \tag{3.34}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_{int} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{int}}{\partial t} \right), \tag{3.35}$$

kde hustota náboje v plazmatu ρ a hustota proudu v plazmatu $\mathbf{J}$ jsou dány výrazy

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int_v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \tag{3.36}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int_v \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v, \tag{3.37}$$

kde sumace probíhá přes různé nabité částice v plazmatu a $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ je makroskopická průměrná rychlost pro částice typu α daná vztahem (3.8).

Rovnice (3.31 až (3.35) představují kompletní soustavu self-konzistentních rovnic, které se musí řešit zároveň. Takže např. v iterativní postupu začneme s nějakými přibližnými hodnotami $\mathbf{E}_{int}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{B}_{int}(\mathbf{r}, t)$. Vyřešíme rovnici (3.31 a získáme $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ pro různé typy částic. Z rovnic (3.36) a (3.37) pak za použití vypočítaných rozdělovacích funkcí f_α dostáváme hustotu náboje a proudu (ρ a J) v plazmatu. Jejich velikosti pak substitujeme do Maxwellových rovnic, které řešíme pro $\mathbf{E}_{int}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{B}_{int}(\mathbf{r}, t)$. Nyní hodnoty vystředovaných makroskopických elmag polí opět dosadíme do Vlasovovy rovnice a pokračujeme v postupu znovu dokola, abychom získali self-konzistentní řešení pro rozdělovací funkce jednotlivých typů částic.

Ačkoliv Vlasovova rovnice explicitně nezahrnuje srážkový člen na pravé straně, tj. nebere v úvahu krátkodosahové srážky, není až tak v tomto směru restriktivní, jak by se mohlo zdát, protože část efektů spojených s interakcí částic je už zahrnuta v Lorentzově síle přes vnitřní self-konzistetní vystředované elmag pole.