Kapitola 7

Makroskopické transportní rovnice

7.1 Momenty Boltzmannovy rovnice

Pokud známe rozdělovací fci $\Rightarrow$ makroskopické veličiny jako hustota, střední rychlost, teplota apod. V termodynamické rovnováze $\Rightarrow$ Maxwell-Boltzmannova rozd. fce. V jiném případě musíme řešit komplikovanější BKR.
ALE rovnice pro časové a prostorové změny makroskopických proměnných mohou být odvozeny z BKR bez jejího řešení $\Rightarrow$ *makroskopické transportní rovnice*

Makroskopické veličiny souvisí s *momenty rozdělovací fce* a trasportní rovnice pro tyto proměnné získáme z *momentů Boltzmannovy rovnice*. První tři momenty: vynásobením rovnice výrazy m_α, $m_\alpha \mathbf{v}$ a $m_\alpha v^2/2$ a integrací přes rychlostní prostor $\Rightarrow$ zákon zach. hmotnosti, hybnosti a energie. Vždy se nám ale objeví nějaká neznámá makrskop. veličina navíc, takže abychom mohli soustavu vyřešit, musíme udělat nějaké vhodné předpoklady o nejvyšším momentu rozděl. fce.

Pro každý typ částic vlastní transportní rovnice.

Existuje mnoho možností vytvoření soustavy transportních rovnic podle zjednodušujících předpokladů, např. *model studeného* nebo *teplého plazmatu*.

7.2 Obecná transportní rovnice

Uvažujme fyzikální vlastnost částic v plazmatu $\chi(\mathbf{v})$ a vezměme obecnou BKR:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha = \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{\text{sraz}} \cdot \tag{7.1}$$

Každý člen BKR vynásobíme $\chi(\mathbf{v})$ a z analogie výpočtu střední hodnoty $\chi(\mathbf{v})$ uděláme totéž s celou BKR

$$\int_v \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v + \int_v \chi \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v + \int_v \chi \mathbf{a} \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_v \chi \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{\text{sraz}} d^3v \cdot \tag{7.2}$$

Dále upravíme každý člen rovnice zvlášť.

První člen:

$$\int_v \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_v \chi f_\alpha d^3v\right) - \int_v f_\alpha \frac{\partial \chi}{\partial t} d^3v \tag{7.3}$$

Poslední člen je nula a z definice střední hodnoty:

$$\int_v \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha \langle \chi \rangle) \tag{7.4}$$

Druhý člen:

$$\int_v \chi \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot (\int_v \mathbf{v} \chi f_\alpha d^3v) - \int_v f_\alpha \mathbf{v} \nabla \chi d^3v - \int_v f_\alpha \chi \nabla \cdot \mathbf{v} d^3v \tag{7.5}$$

Člen $\nabla \cdot \mathbf{v}$ a $\nabla \chi$ jsou nula:

$$\int_v \chi \mathbf{v} \cdot \nabla v_\alpha d^3v = \nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha) \tag{7.6}$$

Třetí člen:

$$\int_v \chi \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_v \nabla_v \cdot \mathbf{a} \chi f_\alpha d^3v - \int_v f_\alpha \mathbf{a} \cdot \nabla_v \chi d^3v - \int_v f_\alpha \chi \nabla_v \cdot \mathbf{a} d^3v \tag{7.7}$$

Poslední integrál vymizí pokud

$$\nabla_v \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{m_\alpha} \nabla_v \cdot \mathbf{F} = 0, \tag{7.8}$$

složka vektoru síly F_i nezávisí na příslušné složce rychlosti v_i, kde $i = x,\ y\ z$. Toto omezení nevylučuje mg. sílu $\mathbf{F}_\alpha = q_\alpha \mathbf{v} \times \mathbf{B}$:

$$F_x = q_\alpha (v_y B_z - v_z B_y) \tag{7.9}$$

První integrál na pravé straně rovnice (**??**) je součtem tří trojných integrálů:

$$\int_v \nabla_v \cdot (\mathbf{a} \chi f_\alpha) d^3v = \sum_i \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial v_i} (a_i \chi f_\alpha) dv_x dv_y dv_z. \tag{7.10}$$

Pro každý z těchto tří integrálů ($i = x,\ y,\ z$) máme

$$\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial v_x}(a_x \chi f_\alpha) dv_x dv_y dv_z = \int\int_{-\infty}^{+\infty} dv_y dv_z (a_x \chi f_\alpha|_{-\infty}^{+\infty}) = 0, \tag{7.11}$$

protože $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \to 0$ pro $v_i \to \pm\infty$. Protože první a poslední integrál vztahu (7.7) je roven nule, máme

$$\int_v \chi \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = -n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha \tag{7.12}$$

Kombinací předchozích výsledků dostáváme *obecnou transportní rovnici*

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t}(n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) \right]_{\text{sraz}}, \tag{7.13}$$

kde člen na pravé straně označuje rychlost změny veličiny χ na jednotku objemu v důsledku srážek:

$$\left[\frac{\delta}{\delta t}(n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) \right]_{\text{sraz}} = \int_v \chi \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{\text{sraz}} d^3v \tag{7.14}$$

7.3 Zákon zachování hmotnosti

7.3.1 Odvození rovnice kontinuity z BKR

Rovnici (7.13) zde využijeme pro $\chi = m_\alpha$. Vyjádříme

$$\begin{aligned} \langle \chi \rangle_\alpha &= m_\alpha \\ \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha &= m_\alpha \langle \mathbf{v} \rangle_\alpha = m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \\ \nabla_v \chi &= \nabla_v m_\alpha = 0 \end{aligned} \tag{7.15}$$

a dostaneme *rovnici kontinuity*

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha, \tag{7.16}$$

kde $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$ a srážkový člen

$$S_\alpha = m_\alpha \int_v (\frac{\delta f_\alpha}{\delta t})_{\mathrm{sraz}} d^3 v = \left(\frac{\delta \rho m_\alpha}{\delta t} \right)_{\mathrm{sraz}} \tag{7.17}$$

vyjadřuje rychlost produkce nebo ztráty částic α na jednotku objemu v důsledku interakcí. Pokud k nim nedochází

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = 0 \tag{7.18}$$

neboli

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0 \tag{7.19}$$

Rovnici *zákona zachování náboje* odtud dostaneme násobením nábojem q_α:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha = 0, \tag{7.20}$$

kde $\rho_\alpha = n_\alpha q_\alpha$ je hustota náboje a $\mathbf{J}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ je hustota el. proudu.

7.3.2 Odvození pomocí dynamiky tekutin

Uvažujme objem tekutiny V uzavřený plochou S s elementem plochy $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$. Střední počet částic opouštějící objem V skrz $d\mathbf{S}$ za jednotku času je

$$n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot d\mathbf{S} \tag{7.21}$$

$\Rightarrow$ počet částic opouštějící celý objem:

$$\oint_S n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot d\mathbf{S}. \tag{7.22}$$

Celkový počet částic v objemu:

$$\int_V n_\alpha d^3 r. \tag{7.23}$$

Pokud nedochází k produkci nebo ztrátě částic v objemu, musí platit

$$\oint_S n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V n_\alpha d^3 r \tag{7.24}$$

a za použití Gaussova teorému divergence

$$\oint_S n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) d^3 r \tag{7.25}$$

dostaneme

$$\int_V \left[\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) \right] d^3 r = 0, \tag{7.26}$$

což musí platit pro libovolný objem V, takže dostáváme rovnici kontinuity (7.19).

7.3.3 Srážkový člen

Procesy spojené se změnou počtu částic $\Rightarrow$ obvykle nepružné srážky (ionizace, rekombinace, zachycení náboje). Jak je můžeme reprezentovat v rci kontinuity:

- efekt *ionizace* - rychlostní koeficient pro ionizaci K_i, tj. počet párů elektron/iont produkovaných za jednotku času je $K_\mathrm{i} n_\mathrm{e} n_\mathrm{g}$, kde n_g je hustota neutrálního plynu. Ve slabě ionizovaném plazmatu je možné považovat n_g za konstantní a počet vzniklých párů zapsat pomocí srážkové frekvence $\nu_\mathrm{i} n_\mathrm{e}$

- efekt *rekombinace* - rychlostní koeficient pro rekombinaci K_r, tj. úbytek párů elektron/iont za jednotku času, za předpokl. jednoho druhu iontů ($n_\mathrm{i} = n_\mathrm{e}$) je $K_\mathrm{r} n_\mathrm{e}^2$
- efekt *záchytu záporného náboje* - rychlost úbytku elektronů $K_\mathrm{a} n_\mathrm{e} n_\mathrm{g}$ neboli podobně jako pro ionizaci $\nu_\mathrm{a} n_\mathrm{e}$

$\Longrightarrow$

$$S_\mathrm{e} = m_e(\nu_\mathrm{i} n_\mathrm{e} - K_\mathrm{r} n_\mathrm{e}^2 - \nu_\mathrm{a} n_\mathrm{e}) \tag{7.27}$$

7.4 Zákon zachování hybnosti

7.4.1 Odvození pohybové rovnice

Nahradíme $\chi(\mathbf{v})$ výrazem $m_\alpha \mathbf{v}$ v (7.13). Vezmeme-li v úvahu, že $\mathbf{v} = \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha$ a $\langle \mathbf{V}_\alpha \rangle = 0$, můžeme členy transportní rovnice upravit takto:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{v}\rangle_\alpha) = \rho_{m\alpha}\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} \tag{7.28}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{v}\mathbf{v}\rangle_\alpha) = \nabla \cdot [\rho_{m\alpha}(\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha\langle \mathbf{V}_\alpha\rangle + \langle \mathbf{V}_\alpha\rangle\mathbf{u}_\alpha + \\ +\langle \mathbf{V}_\alpha\mathbf{V}_\alpha\rangle)] = \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha + \rho m_\alpha\langle \mathbf{V}_\alpha\mathbf{V}_\alpha\rangle)\end{aligned} \tag{7.29}$$

$$\begin{aligned}-n_\alpha\langle \mathbf{F}\cdot\nabla_v \mathbf{v}\rangle_\alpha = -n_\alpha\langle (F_x\frac{\partial}{\partial v_x} + F_y\frac{\partial}{\partial v_y} + F_z\frac{\partial}{\partial v_z})\mathbf{v}\rangle_\alpha = \\ -n_\alpha\langle F_x\boldsymbol{x} + F_y\boldsymbol{y} + F_z\boldsymbol{z}\rangle_\alpha = -n_\alpha\langle \mathbf{F}\rangle_\alpha\end{aligned} \tag{7.30}$$

A dosadíme-li do (7.13), dostaneme rovnici zachování hybnosti

$$\rho_{m\alpha}\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha) + \nabla\cdot(\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{V}_\alpha\mathbf{V}_\alpha\rangle) - n_\alpha\langle \mathbf{F}\rangle_\alpha = \mathbf{A}_\alpha, \tag{7.31}$$

kde $\mathbf{A}_\alpha$ označuje srážkový člen

$$\mathbf{A}_\alpha = m_\alpha \int_v \mathbf{v}(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t})_{\text{sraz}}\, d^3v = \left[\frac{\delta(\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)}{\delta t}\right]_{\text{sraz}} \tag{7.32}$$

Výraz $\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle$ je *tenzor kinetického tlaku* $\mathcal{P}_\alpha$:

$$\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle) = \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha \tag{7.33}$$

Třetí člen na levé straně rovnice (7.31) můžeme rozepsat takto

$$\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{m\alpha} u_{\alpha x}\mathbf{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_{m\alpha} u_{\alpha y}\mathbf{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_{m\alpha} u_{\alpha z} bf u_\alpha) = \tag{7.34}$$

$$= \rho_{m\alpha}(u_{\alpha x}\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial x} + u_{\alpha y}\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial y} + u_{\alpha z}\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial z} + \mathbf{u}_\alpha[\frac{\partial(\rho_{m\alpha} u_{\alpha x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{m\alpha} u_{\alpha y})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_{m\alpha} u_{\alpha z})}{\partial z}] =$$

$$\rho_{m\alpha}(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha[\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)]$$

Dosazením (7.33) a (7.34) do (7.31) a za použití rovnice kontinuity (7.16) dostáváme

$$\rho_{m\alpha}[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha] + \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha - n_\alpha \langle \mathbf{F} \rangle_\alpha = \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha. \tag{7.35}$$

Člen v hranaté závorce můžeme zapsat pomocí totálního diferenciálu:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla, \tag{7.36}$$

což odpovídá časové změně pozorované ze souřadného systému pohybujícího se střední rychlostí $\mathbf{u}_\alpha$.

Jestliže uvažujeme elektromg. Lorentzovu sílu a gravitační sílu, je poslední člen rce (7.35)

$$-n_\alpha \langle \mathbf{F} \rangle_\alpha = -n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) - n_\alpha m_\alpha \mathbf{g}, \tag{7.37}$$

kde pole $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ představují vyhlazené makroskopické pole. Pohybová rovnice je tedy

$$\rho_{m\alpha}\frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha}\mathbf{g} - \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha + \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \tag{7.38}$$

Fyzikální význam: časová změna hybnosti v každém elementu kapaliny je způsobena externími silami, třením (viskozitou) a tlakovými silami samotné kapaliny a dále vnitřními silami, které odpovídají interakcím $\Rightarrow$ z.z. hybnosti

Často můžeme viskozitu zanedbat, tj. neuvažujeme nediagonální členy $\mathcal{P}_\alpha$. Pokud je navíc rozdělovací funkce izotropní, jsou diagonální členy $\mathcal{P}_\alpha$ stejné a rovné skalárnímu kinetickému tlaku p_α. Zanedbáme-li dále člen vedoucí k tvorbě nebo zániku částic, máme

$$\rho_{m\alpha}\frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha}\mathbf{g} - \nabla p_\alpha + \mathbf{A}_\alpha \tag{7.39}$$

7.4.2 Srážkový člen

Člen $\mathbf{A}_\alpha$ označuje rychlost změny střední hodnoty hybnosti na jednotku objemu způsobenou srážkami. Důsledek zachování celkové hybnosti při elastických srážkách stejných částic $\Rightarrow$ $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{0}$. ALE pro kapalinu složenou z různých částic $\mathbf{A}_\alpha \neq \mathbf{0}$.

Často používaný vztah pro přenos hybnosti srážkami (nemusí platit vždy, předp. Maxwell. r. fce a relatině malý rozdíl středních rychlostí částic):

$$\mathbf{A}_\alpha = -\rho_{m\alpha}\sum_\beta \nu_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta), \tag{7.40}$$

kde konstanta úměrnosti $\nu_{\alpha\beta}$ je *srážková frekvence pro přenos hybnosti* mezi částicemi α a β. Protože během srážky se musí zachovávat celková hybnost

$$\rho_{m\alpha}\nu_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta) + \rho_{m\beta}\nu_{\beta\alpha}(\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha) = 0. \tag{7.41}$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{m\alpha}\nu_{\alpha\beta} = \rho_{m\beta}\nu_{\beta\alpha} \tag{7.42}$$

7.5 Zákon zachování energie

7.5.1 Odvození rovnice pro transport energie

Nahradíme $\chi(\mathbf{v})$ výrazem $m_\alpha v^2/2$ v (7.13). Platí

$$n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha = \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_\alpha^2\rangle + \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2 = \frac{1}{2}(3p_\alpha + \rho_{m\alpha}u_\alpha^2) \tag{7.43}$$

$$\nabla_v \chi = \frac{1}{2}m_\alpha \nabla_v(\mathbf{v}.\mathbf{v}) = m_\alpha(\mathbf{v}\cdot\nabla_v)\mathbf{v} = m_\alpha \mathbf{v} \tag{7.44}$$

Členy na levé straně obecné transportní rovnice (7.13) jsou tedy

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha\langle\chi\rangle_\alpha) = \frac{3}{2}\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2) \tag{7.45}$$

$$\nabla\cdot(n_\alpha\langle\chi\mathbf{v}\rangle_\alpha) = \nabla\cdot[\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}\rangle_\alpha] \tag{7.46}$$

$$-n_\alpha\langle(\mathbf{F}/m_\alpha)\cdot\nabla_v\chi\rangle_\alpha = -n_\alpha\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha \tag{7.47}$$

Součtem těchto členů získáme *rovnici zachování energie*

$$\frac{3}{2}\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2) + \nabla\cdot[\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}\rangle_\alpha] - n_\alpha\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha = M_\alpha, \tag{7.48}$$

kde M_α je rychlost změny hustoty energie v důsledku srážek

$$M_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha\int_v v^2(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t})_{\mathrm{sraz}}\,d^3v = \left[\frac{\delta(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle v^2\rangle_\alpha)}{\delta t}\right]_{\mathrm{sraz}} \tag{7.49}$$

Alternativně se může rovnice také zapsat jinak, viz dále. Vezměme nejprve část třetího členu (7.48) a $\mathbf{v} = \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha$:

$$\begin{aligned}\langle[(\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha)\cdot(\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha)](\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha)\rangle &= \\ = \langle(u_\alpha^2 + 2\mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{V}_\alpha + V_\alpha^2)(\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha)\rangle &= \\ = u_\alpha^2\mathbf{u}_\alpha + \langle V_\alpha^2\rangle\mathbf{u}_\alpha + 2\langle\mathbf{V}_\alpha\mathbf{V}_\alpha\rangle\cdot\mathbf{u}_\alpha + \langle V_\alpha^2\mathbf{V}_\alpha\rangle&.\end{aligned} \tag{7.50}$$

Člen $\rho_{m\alpha}\langle\mathbf{V}_\alpha\mathbf{V}_\alpha\rangle$ představuje *tenzor kinetického tlaku* $\mathcal{P}_\alpha$ a $\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_\alpha^2\mathbf{V}_\alpha\rangle$ je *vektor toku tepla* $\mathbf{q}_\alpha$. Ukázali jsme, že $\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_\alpha^2\rangle = 3p_\alpha/2$. Proto

$$\begin{aligned}\nabla\cdot[\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}\rangle_\alpha] = \nabla\cdot[\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2\mathbf{u}_\alpha + \frac{1}{2}(3p_\alpha)\mathbf{u}_\alpha + \mathcal{P}_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{q}_\alpha] = \\ = \nabla\cdot(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2\mathbf{u}_\alpha) + \frac{1}{2}(3p_\alpha)(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla)(3p_\alpha) + \nabla\cdot(P_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha) + \nabla\cdot\mathbf{q}_\alpha\end{aligned} \tag{7.51}$$

Dosazením do (7.48) a za použití označení D/Dt pro úplný diferenciál, máme

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}(\frac{3p_\alpha}{2}) + (\frac{3p_\alpha}{2})\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2) + \nabla\cdot(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2\mathbf{u}_\alpha) + \\ \nabla\cdot(P_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha) + \nabla\cdot\mathbf{q}_\alpha - n_\alpha\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha = M_\alpha\end{aligned} \tag{7.52}$$

Třetí a čtvrtý člen na levé straně můžeme psát jako

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha) + \nabla\cdot[(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}(\mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha)\mathbf{u}_\alpha] = \\ \frac{1}{2}u_\alpha^2\frac{\partial\rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\cdot\frac{\partial\mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2}u_\alpha^2\nabla\cdot(\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha + \rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\cdot[(\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla)\mathbf{u}_\alpha] = \\ \frac{1}{2}u_\alpha^2[\frac{\partial\rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)] + \rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\cdot\frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt}\end{aligned} \tag{7.53}$$

Za použití rovnice kontinuity (7.16) a pohybové rovnice (7.38) můžeme poslední vztah přepsat jako

$$\frac{1}{2}u_\alpha^2 S_\alpha + n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{F} \rangle_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot (\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha) + \mathbf{u}_\alpha \cdot A_\alpha - \mathbf{u}_\alpha^2 S_\alpha. \tag{7.54}$$

Dosazením zpět do (7.52)

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\frac{3p_\alpha}{2}) + \frac{3p_\alpha}{2}\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot (P_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha) - \mathbf{u}_\alpha \cdot (\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha) - \\ n_\alpha \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rangle_\alpha + n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{F} \rangle_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha = \\ = M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2}u_\alpha^2 S_\alpha. \end{aligned} \tag{7.55}$$

Třetí a čtvrtý člen můžeme kombinovat jako

$$\nabla \cdot (\mathcal{P}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha) - \mathbf{u}_\alpha \cdot (\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha) = (\mathcal{P}_\alpha \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_\alpha \tag{7.56}$$

a podobně pátý a šestý:

$$-n_\alpha \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rangle_\alpha + n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{F} \rangle_\alpha = -n_\alpha \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_\alpha \rangle, \tag{7.57}$$

protože

$$\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rangle_\alpha = \langle \mathbf{F} \cdot (\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha) \rangle = \langle \mathbf{F} \rangle_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha + \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_\alpha \rangle. \tag{7.58}$$

V případě síly nezávislé na rychlosti je výraz (7.57) roven nule:

$$\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_\alpha \rangle = \mathbf{F} \cdot \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle = 0 \tag{7.59}$$

V případě mg. síly zjistíme totéž:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_\alpha \rangle = q_\alpha \langle (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{V}_\alpha \rangle = \\ = q_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) \cdot \langle V_\alpha \rangle + q_\alpha \langle (\mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{V}_\alpha \rangle = 0, \end{aligned} \tag{7.60}$$

kde oba členy jsou rovny nule, protože $\langle \mathbf{V}_\alpha \rangle = \mathbf{0}$ a $(\mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B})$ je kolmé na $\mathbf{V}_\alpha$. Dostáváme tedy tu *alternativní formu* rovnice *zachování energie*

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{3p_\alpha}{2}\right) + \frac{3p_\alpha}{2}\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + (P_\alpha \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha = \tag{7.61}$$
$$= M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2}u_\alpha^2 S_\alpha$$

7.5.2 Fyzikální interpretace

- První člen levé strany rce (7.61) - celková změna hustoty tepelné energie v objemovém elementu pohybujícím se driftovou rychlostí $\mathbf{u}_\alpha$: $3p_\alpha/2 = \rho_{m\alpha}\langle V_\alpha^2 \rangle/2$.
- Druhý člen LS - změna hustoty tep. energie díky vstupu částic o střední rychlosti $\mathbf{u}_\alpha$ do objemového elementu.
- Třetí člen LS - práce vykonaná na jednotkovém objemu díky tenzoru tlaku, který působí na povrch tohoto objemu
- Čtvrtý člen LS - změna hustoty tepelné energie díky toku tepla
- Pravá strana - změna hustoty tepelné energie díky srážkám (pro pouze jeden druh částic je člen roven nule)

První dva členy můžeme ještě zkombinovat pomocí rce kontinuity (7.16), kde rozepíšeme člen $\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla\right)\rho_{m\alpha} + \rho_{m\alpha}\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha = S_\alpha, \tag{7.62}$$

takže

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha = -\frac{1}{\rho_{m\alpha}}(\frac{D\rho_{m\alpha}}{Dt} - S_\alpha). \tag{7.63}$$

Dosazením (7.63) do (7.61) a použitím rovností $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$, $p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha$, dostaneme další alternativní tvar rovnice energie vyjádřené pomocí teploty T_α

$$\frac{3}{2} n_\alpha k \frac{DT_\alpha}{Dt} + (P_\alpha \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot q_\alpha = M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha . \mathbf{A}_\alpha + (\frac{1}{2} u_\alpha^2 - \frac{3}{2} \frac{kT_\alpha}{m_\alpha}) S_\alpha \tag{7.64}$$

7.5.3 Zjednodušující předpoklady

Podle okolností můžeme uplatnit různé zjednodušující předpoklady

- srážkový člen je nula nebo zanedbatelný; driftová rychlost $\mathbf{u}_\alpha$ je nula; vezmeme vektoru toku tepla

$$\mathbf{q}_\alpha = -K \nabla T_\alpha \tag{7.65}$$

$\Rightarrow$ rce (7.64) se redukuje na *difuzní* rovnici pro T_α

$$\frac{3}{2} n_\alpha k \frac{DT_\alpha}{Dt} = \nabla \cdot (K \nabla T_\alpha), \tag{7.66}$$

kde K je koeficient tepelné vodivosti (souvisí s koeficientem viskozity)

- srážkový člen je nula nebo zanedbatelný; neviskózní kapalina, tj. tenzor tlaku se redukuje na skalární tlak; neuvažujeme tepelnou vodivost ($\mathbf{q}_\alpha = 0$); vztah (7.61) $\Rightarrow$

$$\frac{D}{Dt}(\frac{3p_\alpha}{2}) + \frac{3p_\alpha}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + p_\alpha(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) = 0. \tag{7.67}$$

Dosazením (7.63) za $\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha$ pro $S_\alpha = 0$ dává

$$\frac{D}{Dt}(\frac{3p_\alpha}{2}) - \frac{5p_\alpha}{2\rho_{m\alpha}}\frac{D\rho_{m\alpha}}{Dt} = 0 \tag{7.68}$$

tedy

$$\frac{Dp_\alpha}{p_\alpha} = \frac{5}{3}\frac{D\rho_{m\alpha}}{\rho_{m\alpha}} \tag{7.69}$$

a po integraci

$$\frac{p_\alpha}{p_0} = (\frac{\rho_{m\alpha}}{\rho_{m0}})^{\frac{5}{3}}, \tag{7.70}$$

kde p_0 a ρ_{m0} jsou konstanty, takže

$$p_\alpha \rho_{m\alpha}^{-5/3} = \text{ konst.} \tag{7.71}$$

Toto je *adiabatická rovnice energie* pro plyn, v němž je poměr specifických tepel při konst. tlaku a konst. objemu $\gamma = 5/3$.

Parametr γ fcí počtu stupňů volnosti N

$$\gamma = (2 + N)/N. \tag{7.72}$$

Pro částice, které nemají vnitřní stupně volnosti (jednoatomový plyn), je $N = 3$. *Adiabatická rovnice energie* používaná v termodynamice je obecně ve tvaru

$$p\rho_m^{-\gamma} = \text{ konst.} \tag{7.73}$$

Derivováním

$$\rho_m^{-\gamma} dp - \gamma p \rho_m^{-(\gamma+1)} d\rho_m = 0 \tag{7.74}$$

nebo

$$dp = (\frac{\gamma p}{\rho_m})\, d\rho_m = V_s^2\, d\rho_m, \tag{7.75}$$

kde jsme definovali

$$V_s = (\gamma p/\rho_m)^{1/2} = (\gamma kT/m)^{1/2}, \tag{7.76}$$

což je *adiabatická rychlost zvuku* v kapalině.

- ideální plyn; konstantní teplota kapalin $\Rightarrow$ *izotermální rovnice energie*. Vezmeme stavovou rovnici pro ideální plyn $p = nkT$ a pro $T =$ konst

$$dp = kT\, dn = (p/\rho_m)\, d\rho_m = V_T^2\, d\rho_m, \tag{7.77}$$

kde *izotermální rychlost zvuku* je

$$V_T = (p/\rho_m)^{1/2} = (kT/m)^{1/2} \tag{7.78}$$

7.5.4 Model studeného plazmatu

- 1. moment BKR $\Rightarrow$ *rce kontinuity* $\Rightarrow$ hustota částic n_α (nebo hustota hmotnosti ρ_α) ve vztahu s driftovou rychlostí $\mathbf{u}_\alpha$ $\Rightarrow$ 2 makroskopické veličiny $\Rightarrow$ potřebujeme 2 makroskopické transportní rce

- 2. moment BKR $\Rightarrow$ *pohybová rce* (rce zachování hybnosti) $\Rightarrow$ driftová rychlost $\mathbf{u}_\alpha$ ve vztahu s hustotou částic n_α a tenzorem kinetického tlaku $\mathcal{P}_\alpha$ $\Rightarrow$ 3 makroskopické veličiny $\Rightarrow$ potřebujeme 3 makroskopické transportní rce

- 3. moment BKR $\Rightarrow$ *rce energie* $\Rightarrow$ neznámé veličiny n_α, $\mathbf{u}_\alpha$, $\mathcal{P}_\alpha$ a vektoru toku tepla $\mathbf{q}_\alpha$

$\Longrightarrow$ Žádný konečný systém transportních rovnic nemůže tvořit uzavřený systém, takže musíme zavést nějaké aproximace. Nejjednodušší model je *model studeného plazmatu*. Model používá pouze rovnici kontinuity a hybnosti. Tenzor tlaku se položí roven nule, tj. zanedbává se vliv tepelného pohybu částic a síla způsobená změnou tlaku. Máme tedy dvě transportní rce:

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha \tag{7.79}$$

$$\rho_{m\alpha} \frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha} \mathbf{g} + \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \tag{7.80}$$

Pokud můžeme navíc zanedbat vznik a ztrátu částic $\alpha \Rightarrow S_\alpha = 0$. Vztah používaný pro srážkový člen pro přenos hybnosti $\mathbf{A}_\alpha$ je dán vztahem (7.40).

Model vlastně předpokládá, že teplota plazmatu je nulová, takže rozdělovací fce je *Diracova delta fce* $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta|\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|$.

7.5.5 Model teplého plazmatu

Zde se uvažují tři transportní rovnice a ve třetí rci se zanedbává člen s vektorem toku tepla $\nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha = 0$. Tato aproximace se nazývá *adiabatická aproximace*. Protože tepelná vodivost je nula, není plazma viskózní a nediagonální členy tenzoru tlaku jsou nula. Dále s předpokládá, že diagonální členy jsou stejné, a tedy $\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha = \nabla \cdot p_\alpha$.
V *modelu teplého plazmatu* tedy máme tyto tři transportní rce

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha \tag{7.81}$$

$$\rho_{m\alpha}\frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha}\mathbf{g} - \nabla p_\alpha + \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \tag{7.82}$$

$$\frac{D}{Dt}(\frac{3p_\alpha}{2}) + \frac{5p_\alpha}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) = M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2}u_\alpha^2 S_\alpha. \tag{7.83}$$

Pokud navíc předpokládáme, že změna energie v důsledku srážek je zanedbatelná, redukuje se rovnice (7.83) na *adiabatickou rovnici*

$$p_\alpha \rho_{m\alpha}^{-\gamma} = \text{konst.} \tag{7.84}$$