Kapitola 8

Makroskopické rovnice pro vodivou kapalinu

8.1 Makroskopické proměnné pro plazma jako vodivou kapalinu

Uvažujme plazma jako *celek* a *celkové* makroskopické veličiny. Hustota hmotnosti:

$$\rho_m = \sum_\alpha \rho_{m\alpha} = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha, \tag{8.1}$$

hustota náboje:

$$\rho = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha, \tag{8.2}$$

střední rychlost kapaliny $\mathbf{u}$:

$$\rho_m \mathbf{u} = \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha. \tag{8.3}$$

Střední rychlost každého typu částic uvažovaná vzhledem k celkové střední rychlosti plazmatu $\mathbf{u}$ je *difuzní rychlost* $\mathbf{w}_\alpha$

$$\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha - \frac{1}{\rho_m} \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \tag{8.4}$$

Hustota toku hmotnosti neboli hmotnostní tok

$$\mathbf{J_m} = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \rho_m \mathbf{u} \tag{8.5}$$

a hustota el. proudu neboli tok náboje

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \rho \mathbf{u} + \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{w}_\alpha \tag{8.6}$$

Tenzor kinetického tlaku jednotlivých komponent plazmatu jsme definovali jako

$$\mathcal{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} \langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle, \tag{8.7}$$

kde $\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha$ je náhodná rychlost. Jde vlastně o přenos hybnosti částicemi skrze povrchový element pohybující se driftovou rychlostí. Pro celé plazma definujeme alternativní náhodnou rychlost $\mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}}$ pro částice α vzhledem k celkové střední rychlosti plazmatu $\mathbf{u}$

$$\mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}} = \mathbf{v} - \mathbf{u}. \tag{8.8}$$

Celkový tlak je tedy definován jako rychlost přenosu hybnosti všemi částicemi plazmatu skrze element povrchu pohybující se celkovou střední rychlostí $\mathbf{u}$. Tenzor celkového kineticého tlaku $\mathcal{P}$ je tedy

$$\mathcal{P} = \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \langle \mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}} \mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}} \rangle. \tag{8.9}$$

Platí

$$\mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}} = \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha \tag{8.10}$$

a tedy

$$\mathcal{P} = \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \langle (\mathbf{V}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha)(\mathbf{V}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha) \rangle, \tag{8.11}$$

což roznásobíme jako

$$\mathcal{P} = \sum_\alpha \rho_{m\alpha} (\langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle + \langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle + \langle \mathbf{w}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle + \langle \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle). \tag{8.12}$$

Z definice $\mathbf{w}_\alpha$ vidíme, že $\langle \mathbf{w}_\alpha \rangle = \mathbf{w}_\alpha$, a proto

$$\mathcal{P} = \sum_\alpha \mathcal{P}_\alpha + \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha. \tag{8.13}$$

Celkový skalární kinetický tlak p je

$$p = \frac{1}{3} \sum_i P_{ii} = \frac{1}{3} \sum_i \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \langle V_{\alpha 0 i} V_{\alpha 0 i} \rangle = \frac{1}{3} \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \langle V_{\alpha 0}^2 \rangle \tag{8.14}$$

Pomocí (8.13)

$$p = \sum_\alpha p_\alpha + \frac{1}{3} \sum_\alpha \rho_{m\alpha} w_\alpha^2 \tag{8.15}$$

Definujeme vektor celkového toku tepla $\mathbf{q}$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \langle V_{\alpha 0}^2 \mathbf{V}_{\alpha \mathbf{0}} \rangle \tag{8.16}$$

a hustotu tepelné energie

$$\frac{3p}{2} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \langle V_{\alpha 0}^2 \rangle \tag{8.17}$$

Je užitečné najít vztah mezi

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_\alpha^2 \mathbf{V}_\alpha\rangle \tag{8.18}$$

a $\mathbf{q}$. Takže pomocí $\mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}} = \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha$ dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \rho_{m\alpha}[\langle V_\alpha^2 \mathbf{V}_\alpha\rangle + w_\alpha^2\langle \mathbf{V}_\alpha\rangle + 2\langle(\mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{V}_\alpha)\mathbf{V}_\alpha\rangle + \\ +\langle V_\alpha^2\rangle \mathbf{w}_\alpha + w_\alpha^2 \mathbf{w}_\alpha + 2(\langle \mathbf{V}_\alpha\rangle \cdot \mathbf{w}_\alpha)\mathbf{w}_\alpha],\end{aligned} \tag{8.19}$$

přičemž $\langle \mathbf{V}_\alpha\rangle = \mathbf{0}$, takže

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \rho_{m\alpha}[\langle V_\alpha^2 \mathbf{V}_\alpha\rangle + 2\mathbf{w}_\alpha \cdot \langle \mathbf{V}_\alpha)\mathbf{V}_\alpha\rangle + \langle V_\alpha^2\rangle \mathbf{w}_\alpha + w_\alpha^2 \mathbf{w}_\alpha] \tag{8.20}$$

Ze vztahu (8.18), (8.7) a $p_\alpha = \rho_{m\alpha}\langle V_\alpha^2\rangle/3$ přepíšeme předchozí vztah jako

$$\mathbf{q} = \sum_\alpha (\mathbf{q}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathcal{P}_\alpha + \frac{3}{2}p_\alpha \mathbf{w}_\alpha + \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} w_\alpha^2 \mathbf{w}_\alpha). \tag{8.21}$$

Pro izotropní případ

$$\mathbf{q} = \sum_\alpha (\mathbf{q}_\alpha + \frac{5}{2}p_\alpha \mathbf{w}_\alpha + \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} w_\alpha^2 \mathbf{w}_\alpha). \tag{8.22}$$

8.2 Rovnice kontinuity

Rovnici kontinuity pro jednotlivé částice sumujeme

$$\sum_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \sum_\alpha \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha) = \sum_\alpha S_\alpha, \tag{8.23}$$

což dává

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0, \tag{8.24}$$

neboť suma S_α je nula díky zachování celkové hmostnosti v systému. Rovnici můžeme také přepsat pomocí $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ jako

$$\frac{D\rho_m}{Dt} + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{8.25}$$

8.3 Pohybová rovnice

Podobně postupuje i v případě rovnice z.z. hybnosti:

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \rho_{m\alpha}[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha] = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{E} + \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \\ + \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \mathbf{g} - \sum_\alpha \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha + \sum_\alpha \mathbf{A}_\alpha - \sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha S_\alpha\end{aligned} \tag{8.26}$$

Protože celk. hybnost všech částic se zachovává je srážk. člen nula.

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \rho_{m\alpha}[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha] = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho_m \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathcal{P} + \\ + \sum_\alpha \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha) - \sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha S_\alpha\end{aligned} \tag{8.27}$$

Člen obsahující S_α můžeme eliminovat pomocí rovnice kontinuity. Zapíšeme rovnost

$$\sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha S_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha [\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha)], \tag{8.28}$$

což kombinujeme se členy na levé straně rovnice (8.27) a členem $\sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha S_\alpha$ na její pravé straně. Dostáváme výraz

$$\sum_\alpha [\frac{\partial(\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha)], \tag{8.29}$$

kde využijeme vztah pro celkovou střední rychlost (8.3), druhý člen expandujeme nahrazením $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{w}_\alpha + \mathbf{u}$. Vidíme, že

$$\sum_\alpha \rho_{m\alpha}\mathbf{w}_\alpha = \sum_\alpha \rho_{m\alpha}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}) = \rho_m\mathbf{u} - \rho_m\mathbf{u} = 0. \tag{8.30}$$

Vztah (8.29) upravíme tedy jako

$$\begin{aligned}\sum_\alpha [\frac{\partial(\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha)] &= \frac{\partial(\rho_m\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m\mathbf{u}\mathbf{u}) + \\ + \sum_\alpha \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{w}_\alpha\mathbf{w}_\alpha) &= \rho_m[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}] + \mathbf{u}[\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m\mathbf{u})] + \\ + \sum_\alpha \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{w}_\alpha\mathbf{w}_\alpha) &= \rho_m\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \sum_\alpha \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{w}_\alpha\mathbf{w}_\alpha),\end{aligned} \tag{8.31}$$

kde jsme využili rci kontinuity. Potom pohybová rovnice je

$$\rho_m\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B} + \rho_m\mathbf{g} - \nabla\cdot\mathcal{P}. \tag{8.32}$$

8.4 Rovnice energie

Opět sumujeme rovnici energie pro jednotlivé typy částic:

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle v^2\rangle_\alpha) + \sum_\alpha \nabla\cdot(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle v^2\mathbf{v}\rangle_\alpha) - \sum_\alpha n_\alpha\langle \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha = 0, \tag{8.33}$$

kde srážkový člen M_α sumovaný přes všechny částice je nula. Nahradíme $\mathbf{v} = \mathbf{V}_{\alpha 0} + \mathbf{u}$ a expandujeme každý člen rovnice. Pro *první člen* máme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}(\langle V_{\alpha 0}^2\rangle + u^2 + 2\mathbf{w}_\alpha\cdot\mathbf{u})\right] \tag{8.34}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_{\alpha 0}^2\rangle\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3p}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_m u^2\right),$$

kde jsme použili vztah (8.17) a fakt, že $\sum_\alpha \rho_{m\alpha}\mathbf{w}_\alpha = 0$
Před úpravou *druhého členu* si uvědomíme, že

$$\begin{aligned}\langle v^2\mathbf{v}\rangle_\alpha &= \langle (V_{\alpha 0}^2 + u^2 + 2\mathbf{V}_{\alpha 0}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{V}_{\alpha 0} + \mathbf{u})\rangle \\ &= \langle V_{\alpha 0}^2\mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}}\rangle + u^2\mathbf{w}_\alpha + 2\langle \mathbf{V}_{\alpha 0}\otimes\mathbf{V}_{\alpha 0}\rangle\cdot\mathbf{u} + \langle V_{\alpha 0}^2\rangle\mathbf{u} + u^2\mathbf{u} + 2(\mathbf{w}_\alpha\cdot\mathbf{u})\mathbf{u},\end{aligned} \tag{8.35}$$

protože $\mathbf{V}_{\alpha 0} = \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha$ a $\langle \mathbf{V}_\alpha\rangle = 0$. Proto

$$\nabla\cdot(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle v^2\mathbf{v}\rangle_\alpha) = \tag{8.36}$$

$$= \nabla\cdot(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_{\alpha 0}^2\mathbf{V}_{\alpha 0}\rangle) + \nabla\cdot(\sum_\alpha \rho_{m\alpha}\langle \mathbf{V}_{\alpha 0}\otimes\mathbf{V}_{\alpha 0}\rangle\cdot\mathbf{u}) +$$

$$+ \ \nabla\cdot(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_{\alpha0}^2\rangle\mathbf{u}) + \nabla\cdot(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u^2\mathbf{u})$$

Když použijeme definici celkového toku tepla $\mathbf{q}$ a tenzoru celkového kinetického tlaku $\mathcal{P}$, můžeme toto dále upravit jako

$$\nabla\cdot(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle v^2\mathbf{v}\rangle_\alpha) = \nabla\cdot\mathbf{q} + \nabla\cdot(\mathcal{P}\cdot\mathbf{u}) + \\ +\nabla.(\frac{3p}{2}\mathbf{u}) + \nabla.(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u^2\mathbf{u}) \tag{8.37}$$

Pro *třetí člen* máme

$$\sum_\alpha n_\alpha\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha[q_\alpha\langle\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha + q_\alpha\langle(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha + m_\alpha\langle\mathbf{g}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha], \tag{8.38}$$

kde jsme uvažovali elmag sílu a sílu gravitační. Protože $\langle\mathbf{v}\rangle_\alpha = \mathbf{u}_\alpha$ a pro lib. vektor $\mathbf{v}$ platí $(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v} = 0$, máme

$$\sum_\alpha n_\alpha\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{J_m}\cdot\mathbf{g}, \tag{8.39}$$

kde $\mathbf{E}$ a $\mathbf{g}$ jsou vystředovaná makroskopická pole.
Kombinováním předchozích výsledků dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{3p}{2}) + \nabla\cdot(\frac{3p}{2}\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_m u^2) + \nabla\cdot(\frac{1}{2}\rho_m u^2\mathbf{u}) + \\ \nabla\cdot\mathbf{q} + \nabla\cdot(\mathcal{P}\cdot\mathbf{u}) - \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{J_m}\cdot\mathbf{g} = 0. \tag{8.40}$$

Třetí a čtvrtý člen zkombinujeme jako

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_m u^2) + \nabla\cdot(\frac{1}{2}\rho_m u^2\mathbf{u}) = \frac{1}{2}u^2[\frac{\partial\rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_m\mathbf{u})] + \mathbf{u}\cdot(\rho_m\frac{D\mathbf{u}}{Dt}), \tag{8.41}$$

což dále upravíme za použití rce kontinuity a pohybové rovnice:

$$\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{u}\cdot(\mathbf{J}\times\mathbf{B}) + \mathbf{J_m}\cdot\mathbf{g} - \mathbf{u}\cdot(\nabla\cdot\mathcal{P}). \tag{8.42}$$

Tento výsledek použijeme opět v rci energie a dostaneme tvar

$$\frac{D}{Dt}(\frac{3p}{2}) + \frac{3p}{2}\nabla\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot\mathbf{q} + (\mathcal{P}\cdot\nabla)\cdot\mathbf{u} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{u}.(\mathbf{J}\times\mathbf{B}) - \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{E}. \tag{8.43}$$

- 1. člen - časová změna celk. hustoty tepelné energie vzhledem k referenčnímu systému pohybujícím se celkovou střední rychlostí **u**
- 2. člen - přispívá ke změně celk. hustoty tepelné energie díky přenosu tepelné energie v objem. elementu v důsledku pohybu částic
- 3. člen - tok tepla
- 4. člen - práce vykonaná na objem. elementu tlakovými silami (normálovými i tečnými)
- členy na pravé straně - práce vykonaná na objem. elementu el. silami existujícími v referenčním systému pohybujícím se celkovou střední rychlostí **u**. Tyto členy mohou být dále zkombinovány (viz níže).

Před další úpravou si uvědomme, že hustota el. proudu se skládá ze dvou částí

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{w}_\alpha + \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u} = \mathbf{J'} + \rho\mathbf{u}, \tag{8.44}$$

kde $\rho\mathbf{u}$ je hustota el. proudu *konvekční*, tj. tok prostorového náboje s rychlostí $\mathbf{u}$ a $\mathbf{J}'$ je hustota el. proudu *vodivostní*, tj. hustota el. proudu v systému pohybujícím se rychlostí $\mathbf{u}$. Na druhé straně můžeme psát

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{J} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{J}' \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{8.45}$$

Dosazením obou horních výrazů do rce energie dostaneme

$$\frac{D}{Dt}(\frac{3p}{2}) + \frac{3p}{2}\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q} + (\mathcal{P} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{J}' \cdot \mathbf{E}', \tag{8.46}$$

kde $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ je el. pole existující v souř. systému pohybujícím se rychlostí $\mathbf{u}$. Člen $\mathbf{J}' \cdot \mathbf{E}'$ představuje tedy rychlost změny hustoty energie díky Joulovskému ohřevu.

8.5 Elektrodynamické rovnice pro vodivou kapalinu

Makroskopické transportní rovnice pro vodivou kapalinu netvoří uzavřený systém (podobně jako u transportních rovnic pro jednotlivé typy částic). Navíc obsahují elektrodynamické veličiny **E**, **B**, **J** a $\rho \Rightarrow$ kromě hydrodynamických transportních rovnic potřebujeme elektrodynamické rovnice.

8.5.1 Maxwellovské rovnice rotace

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.47}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \tag{8.48}$$

8.5.2 Zákon zachování el. náboje

získáme z rovnice kontinuity pro jednotlivé typy částic vynásobení rovnice výrazem q_α / m_α a sumací přes všechny částice:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha) + \nabla \cdot (\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = \sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha}) S_\alpha, \tag{8.49}$$

z čehož

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{8.50}$$

Musíme si uvědomit, že tato rovnice se dá odvodit i z Maxwell. rce (8.47) a z Maxwell. rovnice pro divergenci **E**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{8.51}$$

Vezmeme divergenci (8.48)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0, \tag{8.52}$$

zkombinujeme s (8.51) a dostáváme (8.50). $\Rightarrow$ rovnice (8.51) tedy není nezávislá na rovnici (8.50). Dále si uvědomíme, že uděláme-li divergenci vztahu (8.47), dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \tag{8.53}$$

neboli

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = konst. \tag{8.54}$$

Takže Maxwellova rovnice

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{8.55}$$

je vlastně počáteční podmínkou rovnice (8.47).

8.5.3 Zobecněný Ohmův zákon

Postupujeme stejně jako u zákona zach. el. náboje - vezmeme pohybovou rovnici (zákon zach. hybnosti) pro jednotlivé typy částic, vynásobíme q_α/m_α a sumujeme přes všechny částice:

$$\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha (\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t}) + \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\langle \mathbf{F} \rangle_\alpha - \tag{8.56}$$

$$-\nabla \cdot [\sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathcal{P}_\alpha] + \sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathbf{A}_\alpha - \sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathbf{u}_\alpha S_\alpha \tag{8.57}$$

Úprava *druhého členu na pravé straně* rovnice (8.56):
Definujeme *tenzor elektrokinetického tlaku* $\mathcal{P}_\alpha^E$ pro částice α

$$\mathcal{P}_\alpha^E = (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathcal{P}_\alpha = n_\alpha q_\alpha \langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle \tag{8.58}$$

a pro plazma jako vodivou kapalinu máme analogicky

$$\mathcal{P}^E = \sum_\alpha \mathcal{P}_\alpha^E + \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha. \tag{8.59}$$

Tedy

$$-\nabla \cdot [\sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathcal{P}_\alpha] = -\nabla \cdot \mathcal{P}^E + \nabla \cdot (\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha) \tag{8.60}$$

Úprava *čtvrtého členu na pravé straně* rovnice (8.56):
Použijeme rovnici kontinuity a $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{w}_\alpha + \mathbf{u}$

$$-\sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathbf{u}_\alpha S_\alpha = -\sum_\alpha \mathbf{w}_\alpha \frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha q_\alpha) - \sum_\alpha \mathbf{w}_\alpha [\nabla \cdot (n_\alpha q_\alpha \mathbf{w}_\alpha)] - \tag{8.61}$$

$$-\sum_\alpha \mathbf{w}_\alpha [\nabla \cdot (n_\alpha q_\alpha \mathbf{u})] - \mathbf{u}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{J}) \tag{8.62}$$

Podobně *první a druhý členu na levé straně* rovnice (8.56) upravíme jako:

$$\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \frac{\partial \mathbf{w}_\alpha}{\partial} + \sum_\alpha (n_\alpha q_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{w}_\alpha + \sum_\alpha (n_\alpha q_\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{w}_\alpha + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{J}.\nabla)\mathbf{u} \tag{8.63}$$

Zjednodušení *celé rovnice* (8.56):
Použijeme následující vztah pro dva vektory:

$$\nabla \cdot (\mathbf{ab}) = \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}, \tag{8.64}$$

využijeme vyjádření hustoty el. proudu (8.44) a předchozí zjednodušené výrazy:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{uJ}' + \mathbf{Ju}) + \nabla \cdot \mathcal{P}_E = \sum_\alpha n_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\langle \mathbf{F} \rangle_\alpha + \sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathbf{A}_\alpha. \tag{8.65}$$

Rovnice (8.47), (8.48), (8.50) a (8.65) tvoří soustavu deseti rovnic, které doplňují rovnici zachování hmotnosti, hybnosi a energie pro vodivou kapalinu.

Rovnice (8.65) je ale stále v obecném, pro praxi nepoužitelném tvaru. Jednoduchý a používaný tvar této rovnice můžeme získat pro plně ionizované plazma s jedním druhem iontů:
Vyjádříme hustotu el. proudu a náboje jako

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha = e(n_i \mathbf{u_i} - n_e \mathbf{u_e}) \tag{8.66}$$

$$\rho = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha = e(n_i - n_e). \tag{8.67}$$

Globální střední rychlost je

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho_m}(\rho_{me}\mathbf{u_e} + \rho_{mi}\mathbf{u_i}, \tag{8.68}$$

kde $\rho_m = \rho_{me} + \rho_{mi}$. Zkombinováním této rovnice s (8.66) dává

$$\mathbf{u_i} = \frac{\mu}{\rho_{mi}}(\frac{\rho_m \mathbf{u}}{m_e} + \frac{\mathbf{J}}{e}) \tag{8.69}$$

$$\mathbf{u_e} = \frac{\mu}{\rho_{me}}(\frac{\rho_m \mathbf{u}}{m_i} + \frac{\mathbf{J}}{e}), \tag{8.70}$$

kde $\mu = m_e m_i/(m_e m_i)$ označuje redukovanou hmotnost.
Dále předpokládáme, že střední rychlosti elektronů a iontů vztažené ke globální střední rychlosti $\mathbf{u}$, tj. difuzní rychlosti $\mathbf{w}_e$ a $\mathbf{w}_i$, jsou malé ve srovnání s tepelnými. Pak zjednodušíme vztah (8.59) takto

$$\mathcal{P}^E = \mathcal{P}_i^E + \mathcal{P}_e^E = e(\frac{\mathcal{P}_i}{m_i} - \frac{\mathcal{P}_e}{m_e}) \tag{8.71}$$

Silový člen v rovnici (8.65) nahradíme elekromagnetickým polem

$$\sum_\alpha n_\alpha(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\langle\mathbf{F}\rangle_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha(\frac{q_\alpha}{m_\alpha})[q_\alpha(\mathbf{E}+\mathbf{u}_\alpha\times\mathbf{B})] = \tag{8.72}$$

$$= e^2(\frac{n_i}{m_i}+\frac{n_e}{m_e})\mathbf{E}+e^2(\frac{n_i}{m_i}\mathbf{u_i}+\frac{n_e}{m_e}\mathbf{u_e})\times\mathbf{B}.$$

V něm nahradíme $\mathbf{u}_e$ a $\mathbf{u}_i$ ze vztahů (8.70) a (8.69) a zjednodušíme

$$\sum_\alpha n_\alpha(\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\langle\mathbf{F}\rangle_\alpha = e^2(\frac{n_i}{m_i}+\frac{n_e}{m_e})\mathbf{E}+e^2(\frac{n_i}{m_e}+\frac{n_e}{m_i})\mathbf{u}\times\mathbf{B}+e(\frac{1}{m_i}-\frac{1}{m_e})\mathbf{J}\times\mathbf{B}. \tag{8.73}$$

Tento vztah dále zjednodušíme za použití následujících aproximací ($m_i \gg m_e$, $n_e = n_i = n$):

$$\frac{1}{m_i}-\frac{1}{m_e} \simeq -\frac{1}{m_e} \tag{8.74}$$

$$\frac{n_i}{m_i}+\frac{n_e}{m_e} \simeq \frac{n}{m_e} \tag{8.75}$$

$$\frac{n_i}{m_e}+\frac{n_e}{m_i} \simeq \frac{n}{m_e}, \tag{8.76}$$

takže máme $\mathcal{P}^E = -(e/m_e)\mathcal{P}_e$ a z (8.73)

$$\sum_\alpha n_\alpha(\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\langle\mathbf{F}\rangle_\alpha = \frac{ne^2}{m_e}(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B})-\frac{e}{m_e}\mathbf{J}\times\mathbf{B} \tag{8.77}$$

Srážkový člen v (8.65) napíšeme ve dříve uvedeném tvaru

$$A_e = -\rho_{me}\nu_{ei}(\mathbf{u_e}-\mathbf{u_i}) \tag{8.78}$$

$$A_i = -\rho_{mi}\nu_{ie}(\mathbf{u_i}-\mathbf{u_e}), \tag{8.79}$$

přičemž platí $\rho_{mi}\nu_{ie} = \rho_{me}\nu_{ei}$, takže

$$\sum_{\alpha}(\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathbf{A}_\alpha = e\rho_{me}\nu_{ei}(\mathbf{u_e} - \mathbf{u_i})(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_e}) = -\nu_{ei}\mathbf{J}, \tag{8.80}$$

kde jsem použili (8.66) pro $\mathbf{J}$, $n_e = n_i = n$ a aproximaci $m_i \gg m_e$.
Nyní můžeme použít výsledky z (8.71), (8.77) a (8.80) a dosadit je do (8.65)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{J}' + \mathbf{J}\mathbf{U}) - \frac{e}{m_e}\nabla \cdot \mathcal{P} = \\ = \frac{ne^2}{m_e}(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{e}{m_e}\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nu_{ei}\mathbf{J}.\end{aligned} \tag{8.81}$$

Protože jsme předpokládali $n_e = n_i$, musí $\rho = 0$ a $\mathbf{J} = \mathbf{J}'$. V určitých situacích se dá předpokládat, že $\mathbf{J}$ a $\mathbf{u}$ jsou malé perturbace, a proto je jejich součin zanedbatelný. Dále zavedeme označení

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{m_e\nu_{ei}}, \tag{8.82}$$

což představuje *podélnou el. vodivost*. Pak dostáváme z (8.81)

$$\frac{m_e}{ne^2}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{1}{ne}\nabla \cdot \mathcal{P}_e = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne}\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\sigma_0}\mathbf{J}. \tag{8.83}$$

Tato rovnice se nazývá *zobecněný Ohmův zákon*. V magnetohydrodynamice se obvykle členy na levé straně zanedbávají, což ovšem není vždy dost dobře zdůvodnitelné.
Pokud se $\mathbf{J}$ nemění v čase, tj. za ustálených podmínek, máme $\partial \mathbf{J}/\partial t = 0$. Pokud dále předpokládáme, že jsou zanedbatelné prostorové změny tlaku, tj. $\nabla \cdot \mathcal{P}_e = 0$, pak dostáváme zjednodušení

$$\mathbf{J} = \sigma_0(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\sigma_0}{ne}\mathbf{J} \times \mathbf{B}. \tag{8.84}$$

Poslední člen v této rovnici vyjadřuje *Hallův jev*. Tento člen je malý pokud $\sigma_0|\mathbf{B}| \ll ne$. Pak

$$\mathbf{J} = \sigma_0(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{8.85}$$

a bez přítomnosti mg. pole

$$\mathbf{J} = \sigma_0\mathbf{E}, \tag{8.86}$$

což je obecně známý *Ohmův zákon*.

8.6 Zjednodušené magnetohydrodynamické rovnice

Rovnice kontinuity, zjednodušená pohybová rovnice, adiabatická rovnice energie, Maxwellovy rovnice pro el. intenzitu a mg. indukci (zde zenadbáváme čas. změnu el. intenzity) a zjednodušený Ohmův zákon:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0 \tag{8.87}$$

$$\rho_m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \tag{8.88}$$

$$dp = V_s^2 d\rho_m \tag{8.89}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.90}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{8.91}$$

$$\mathbf{J} = \sigma_0(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\sigma_0}{ne}\mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{8.92}$$