Obecné rovnice pro optická vlákna

Z Maxwellových rovnic pro téměř homogenní dielektrikum bez volných nábojů

$$\vec{\nabla}.\vec{E} \approx 0 \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{B}_{,t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\varepsilon\vec{E}_{,t}$$

vyplývá

$$\triangle\psi = \frac{n^2}{c^2}\,\psi_{,tt}$$

kde ψ může označovat libovolnou složku vektoru $\vec{E}$ nebo $\vec{B}$.

Řešení hledáme ve tvaru

$$\psi = \psi^0(r,\varphi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t-\gamma z}$$

$\gamma = \mathrm{i}\beta + \alpha \approx \mathrm{i}\beta$, α reprezentuje útlum.

$$\begin{aligned} \psi_{,t} &= \mathrm{i}\omega\,\psi & \qquad \psi_{,z} &= -\gamma\,\psi \\ \psi_{,tt} &= -\omega^2\,\psi & \qquad \psi_{,zz} &= \gamma^2\,\psi \end{aligned}$$

Dále označím $\mathcal{H} \equiv (n\omega/c)^2 + \gamma^2 = k_0^2 n^2 + \gamma^2$, použijeme separaci proměnných $\psi^0 = R(r)\,\Phi(\varphi)$ a skutečnost, že funkce Φ je periodická s periodou 2π.

$$\begin{aligned} \psi_{,rr} + \frac{1}{r}\psi_{,r} + \frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi\varphi} + \gamma^2\psi &= -\omega^2\frac{n^2}{c^2}\psi \\ r^2\frac{R_{,rr}}{R} + r\frac{R_{,r}}{R} + \frac{\Phi_{,\varphi\varphi}}{\Phi} + r^2\mathcal{H} &= 0 \\ \frac{\Phi_{,\varphi\varphi}}{\Phi} &= -l^2 \qquad l \in \mathbb{Z} \\ r^2R_{,rr} + rR_{,r} + (r^2\mathcal{H}^2 - l^2)R &= 0 \end{aligned}$$

(V obecném případě $\mathcal{H}$ závisí na indexu lomu, je tedy také funkcí r, což poslední uvedenou rovnici komplikuje.) Důležitou skutečností je spojitost tečných složek intenzity elektrického a magnetického pole v celém vlákně, tedy i na hranici jádra a pláště.

Označím n_1 maximální index lomu ve středu jádra, n_2 index lomu pláště, $h^2 \equiv k_0^2n_1^2 + \gamma^2 \approx k_0^2n_1^2 - \beta^2$, $h_2^2 \equiv k_0^2n_2^2 + \gamma^2 \approx k_0^2n_2^2 - \beta^2$.
Zářivé módy: $h_2^2 > 0$, tj. $\beta^2 < n_2^2k_0^2$
Vedené módy: $h_2^2 < 0 \wedge h^2 > 0$, tj. $n_1^2k_0^2 > \beta^2 > n_2^2k_0^2$.

Předpokládejme, že známe řešení E_z a B_z. Pro výpočet ostatních složek vektorů $\vec{E}$ a $\vec{B}$ je možné použít pár Maxwellových rovnic obsahující rotace:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}E_{z,\varphi} + \gamma E_\varphi &= -\mathrm{i}\omega B_r & \qquad \frac{1}{r}B_{z,\varphi} + \gamma B_\varphi &= \mathrm{i}\,\frac{\omega n^2}{c^2}\,E_r \\
\gamma E_r + E_{z,r} &= \mathrm{i}\omega B_\varphi & \qquad \gamma B_r + B_{z,r} &= -\mathrm{i}\,\frac{\omega n^2}{c^2}\,E_\varphi \\
E_{\varphi,r} + \frac{1}{r}E_\varphi - E_{r,\varphi} &= -\mathrm{i}\omega B_z & \qquad B_{\varphi,r} + \frac{1}{r}B_\varphi - B_{r,\varphi} &= \mathrm{i}\,\frac{\omega n^2}{c^2}\,E_z
\end{aligned}$$

Z těchto rovnic je mimo jiné vidět, že E_z i B_z musí mít stejný řád l. Při výpočtu E_r lze postupovat:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\,\frac{\omega n^2}{c^2}\,E_r &= \frac{1}{r}B_{z,\varphi} + \frac{\gamma}{\mathrm{i}\omega}\,(\gamma E_r + E_{z,r}) \\
\mathrm{i}E_r\left(\frac{\omega n^2}{c^2} + \frac{\gamma^2}{\omega}\right) &= \frac{1}{r}B_{z,\varphi} - \mathrm{i}\,\frac{\gamma}{\omega}\,E_{z,r} \\
E_r\left(k_0^2 n^2 + \gamma^2\right) &= -\frac{\mathrm{i}\omega}{r}B_{z,\varphi} - \gamma E_{z,r} \\
E_r &= -\frac{\mathrm{i}\omega}{r\mathcal{H}^2}\,B_{z,\varphi} - \frac{\gamma}{\mathcal{H}^2}\,E_{z,r} \\
E_r &= \frac{\omega l}{r\mathcal{H}^2}\,B_z - \frac{\gamma}{\mathcal{H}^2}\,E_{z,r}
\end{aligned}$$

Analogicky se odvodí:

$$\begin{aligned}
E_\varphi &= \frac{\mathrm{i}\omega}{\mathcal{H}^2}\,B_{z,r} - \frac{\mathrm{i}l\gamma}{r\mathcal{H}^2}\,E_z \\
B_r &= -\frac{\omega l n^2}{r\mathcal{H}^2 c^2}\,E_z - \frac{\gamma}{\mathcal{H}^2}\,B_{z,r} \\
B_\varphi &= -\frac{\mathrm{i}\omega n^2}{\mathcal{H}^2 c^2}\,E_{z,r} - \frac{\mathrm{i}l\gamma}{r\mathcal{H}^2}\,B_z
\end{aligned}$$

Step-index fiber

Označení:

$$
\begin{aligned}
\tau &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + l\varphi) - \gamma z} \\
h^2 &= k_0^2 n_1^2 + \gamma^2 \;\approx\; k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\
q^2 &= -(k_0^2 n_2^2 + \gamma^2) \;\approx\; \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \\
\mathrm{J}_l'(x) &= \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{J}_l(x)}{\mathrm{d}x} \\
\mathrm{K}_l'(x) &= \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{K}_l(x)}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

Výsledné elektrické a magnetické pole:

$r \leq a$

$$
\begin{aligned}
\tau^{-1} E_z &= A\,\mathrm{J}_l(hr) \\
\tau^{-1} E_r &= B\,\frac{\omega l}{h^2}\frac{1}{r}\,\mathrm{J}_l(hr) - A\,\frac{\gamma}{h}\,\mathrm{J}_l'(hr) \\
\tau^{-1} E_\varphi &= -A\,\frac{\mathrm{i}l\gamma}{h^2}\frac{1}{r}\,\mathrm{J}_l(hr) + B\,\frac{\mathrm{i}\omega}{h}\,\mathrm{J}_l'(hr) \\
\tau^{-1} B_z &= B\,\mathrm{J}_l(hr) \\
\tau^{-1} B_r &= -A\,\frac{\omega l}{h^2}\frac{n_1^2}{c^2}\frac{1}{r}\,\mathrm{J}_l(hr) - B\,\frac{\gamma}{h}\,\mathrm{J}_l'(hr) \\
\tau^{-1} B_\varphi &= -B\,\frac{\mathrm{i}l\gamma}{h^2}\frac{1}{r}\,\mathrm{J}_l(hr) - A\,\frac{\mathrm{i}\omega}{h}\frac{n_1^2}{c^2}\,\mathrm{J}_l'(hr)
\end{aligned}
$$

$r \geq a$

$$
\begin{aligned}
\tau^{-1} E_z &= C\,\mathrm{K}_l(qr) \\
\tau^{-1} E_r &= -D\,\frac{\omega l}{q^2}\frac{1}{r}\,\mathrm{K}_l(qr) + C\,\frac{\gamma}{q}\,\mathrm{K}_l'(qr) \\
\tau^{-1} E_\varphi &= C\,\frac{\mathrm{i}l\gamma}{q^2}\frac{1}{r}\,\mathrm{K}_l(qr) - D\,\frac{\mathrm{i}\omega}{q}\,\mathrm{K}_l'(qr) \\
\tau^{-1} B_z &= D\,\mathrm{K}_l(qr) \\
\tau^{-1} B_r &= C\,\frac{\omega l}{q^2}\frac{n_2^2}{c^2}\frac{1}{r}\,\mathrm{K}_l(qr) + D\,\frac{\gamma}{q}\,\mathrm{K}_l'(qr) \\
\tau^{-1} B_\varphi &= D\,\frac{\mathrm{i}l\gamma}{q^2}\frac{1}{r}\,\mathrm{K}_l(qr) + C\,\frac{\mathrm{i}\omega}{q}\frac{n_2^2}{c^2}\,\mathrm{K}_l'(qr)
\end{aligned}
$$

Ze spojitosti E_z, E_φ, B_z a B_φ na rozhraní plyne

$$
\begin{aligned}
A\,\mathrm{J}_l(ha) &= C\,\mathrm{K}_l(qa) \\
B\,\mathrm{J}_l(ha) &= D\,\mathrm{K}_l(qa) \\
A\frac{l\gamma}{(ha)^2}\,\mathrm{J}_l(ha) - B\frac{\omega}{ha}\,\mathrm{J}_l'(ha) &= -C\frac{l\gamma}{(qa)^2}\,\mathrm{K}_l(qa) + D\frac{\omega}{qa}\,\mathrm{K}_l'(qa) \\
A\frac{\omega}{ha}\frac{n_1^2}{c^2}\,\mathrm{J}_l'(ha) + B\frac{l\gamma}{(ha)^2}\,\mathrm{J}_l(ha) &= -C\frac{\omega}{qa}\frac{n_2^2}{c^2}\,\mathrm{K}_l'(qa) - D\frac{l\gamma}{(qa)^2}\,\mathrm{K}_l(qa)
\end{aligned}
$$

tj. v netriviálním případě

$$
\begin{aligned}
\frac{C}{A} &= \frac{\mathrm{J}_l(ha)}{\mathrm{K}_l(qa)} \\
\frac{B}{A} &= \frac{l\gamma}{\omega}\left[\frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(qa)^2}\right]\left[\frac{\mathrm{J}_l'(ha)}{ha\,\mathrm{J}_l(ha)} + \frac{\mathrm{K}_l'(qa)}{qa\,\mathrm{K}_l(qa)}\right]^{-1} \\
\frac{D}{A} &= \frac{\mathrm{J}_l(ha)}{\mathrm{K}_l(qa)}\frac{B}{A}
\end{aligned}
$$

$$
\left[\frac{\mathrm{J}_l'(ha)}{ha\,\mathrm{J}_l(ha)} + \frac{\mathrm{K}_l'(qa)}{qa\,\mathrm{K}_l(qa)}\right]\left[\frac{n_1^2\,\mathrm{J}_l'(ha)}{ha\,\mathrm{J}_l(ha)} + \frac{n_2^2\,\mathrm{K}_l'(qa)}{qa\,\mathrm{K}_l(qa)}\right] = -\left[\frac{l\gamma c}{\omega}\left(\frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(qa)^2}\right)\right]^2
$$

Lineárně polarizované módy ve vláknu se skokovou změnou indexu lomu

Přibližné řešení vycházející z předpokladu $n_1 - n_2 \ll n_1$

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \\
E_y &= \begin{cases} A\,\mathrm{J}_l(hr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\varphi+\omega t-\beta z)} & r \le a \\ B\,\mathrm{K}_l(qr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\varphi+\omega t-\beta z)} & r \ge a \end{cases}
\end{aligned}
$$

Maxwellovy rovnice říkají:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\beta E_y + E_{z,y} &= -\mathrm{i}\omega B_x & \qquad \mathrm{i}\beta B_y + B_{z,y} &= 0 \\
E_{z,x} &= \mathrm{i}\omega B_y & B_{z,x} + \mathrm{i}\beta B_x &= -\mathrm{i}\,\frac{\omega n^2}{c^2}\,E_y \\
E_{y,x} &= -\mathrm{i}\omega B_z & B_{y,x} - B_{x,y} &= \mathrm{i}\,\frac{\omega n^2}{c^2}\,E_z
\end{aligned}
$$

Protože V je malé $(n_1 - n_2 \ll n_1)$, je $\beta \gg h, q$ a $E_z \ll E_y$. Členy $E_{z,y}$ a $E_{z,x}$ se proto dají zanedbat, což vede k $B_y \approx 0$.

Využije se

$$
\mathrm{J}'_l = \frac{1}{2}\,(\mathrm{J}_{l-1} - \mathrm{J}_{l+1}) \qquad \mathrm{K}'_l = -\frac{1}{2}\,(K_{l-1} + K_{l+1})
$$

Řešení:

$r \le a$

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \\
E_y &= A\,\mathrm{J}_l(hr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\varphi+\omega t-\beta z)} \\
E_z &= \frac{hA}{2\beta}\left[\mathrm{J}_{l+1}(hr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+1)\varphi} + \right. \\
&\qquad \left. + \mathrm{J}_{l-1}(hr)\,e^{\mathrm{i}(l-1)\varphi}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)} \\
B_x &= -\frac{A\beta}{\omega}\,\mathrm{J}_l(hr)\,e^{\mathrm{i}(l\varphi+\omega t-\beta z)} \\
B_y &\approx 0 \\
B_z &= -\frac{\mathrm{i}hA}{2\omega}\left[\mathrm{J}_{l+1}(hr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+1)\varphi} - \right. \\
&\qquad \left. - \mathrm{J}_{l-1}(hr)\,e^{\mathrm{i}(l-1)\varphi}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)}
\end{aligned}
$$

$r \ge a$

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \\
E_y &= B\,\mathrm{K}_l(qr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\varphi+\omega t-\beta z)} \\
E_z &= \frac{qB}{2\beta}\left[\mathrm{K}_{l+1}(qr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+1)\varphi} - \right. \\
&\qquad \left. - \mathrm{K}_{l-1}(qr)\,e^{\mathrm{i}(l-1)\varphi}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)} \\
B_x &= -\frac{B\beta}{\omega}\,\mathrm{K}_l(qr)\,e^{\mathrm{i}(l\varphi+\omega t-\beta z)} \\
B_y &\approx 0 \\
B_z &= -\frac{\mathrm{i}qB}{2\omega}\left[\mathrm{K}_{l+1}(qr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+1)\varphi} + \right. \\
&\qquad \left. + \mathrm{K}_{l-1}(qr)\,e^{\mathrm{i}(l-1)\varphi}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)}
\end{aligned}
$$