

2. Úlohy z magnetometrie

Úvodní problém – nakreslete graf znázorňující magnetický účinek ΔT v severojižním směru způsobenou tenkou svislou deskou, na základě vztahu:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$

susceptibilita $\kappa = 0.006$

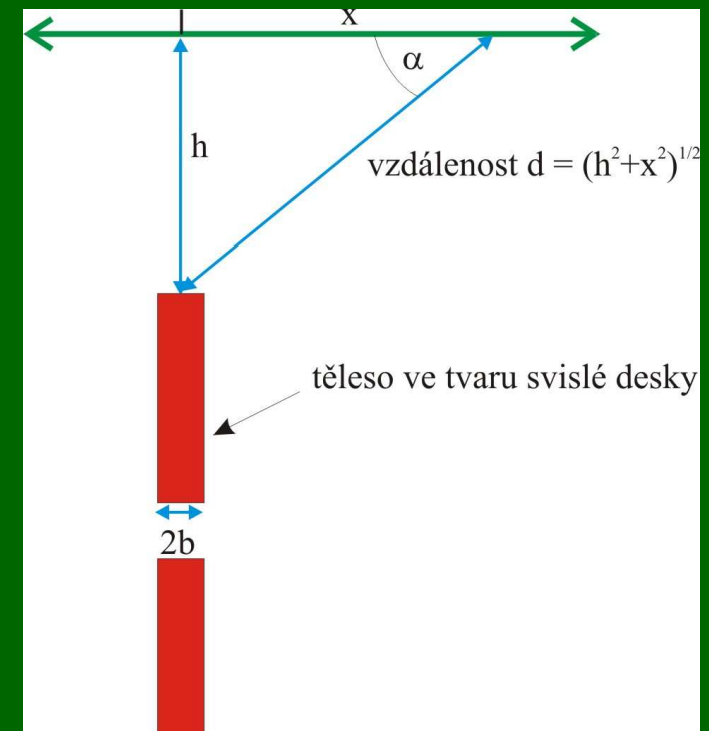
indukce normálního mag. pole

$T_0 = 50000 \text{ nT}$

inklinace normálního mag. pole $I_n = 50^\circ$

hloubka horního okraje desky $h = 2 \text{ m}$

mocnost desky $2b = 0.5 \text{ m}$



2. Úlohy z magnetometrie

Po dosazení známých hodnot získáme:

$$\begin{aligned}\Delta T(x) &= -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n)) = \\ &= -\frac{0,006 \times 50000 \times 0,5}{2 \times 3,14(x^2 + 2^2)} (2 \cos(2 \times 50^\circ) + x \sin(2 \times 50^\circ)) = -\frac{150}{6,28(x^2 + 4)} (-0,347 + x0,985)\end{aligned}$$

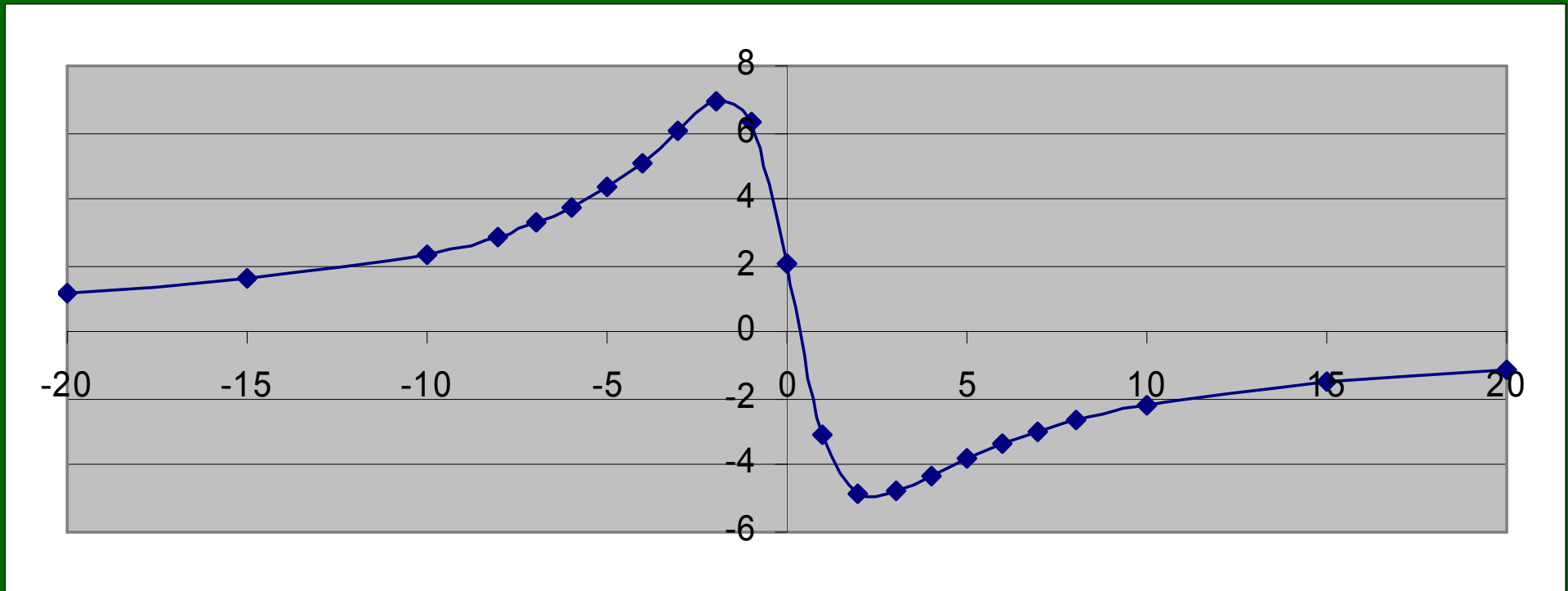
2. Úlohy z magnetometrie

Po dosazení za x (vzdálenost na profilu od bodu 0) můžeme doplnit tabulku hodnot magnetického účinku tenké svislé desky ΔT v jednotlivých bodech profilu:

x [m]	ΔT [nT]	x [m]	ΔT [nT]
-20	1,184	1	-3,043
-15	1,576	2	-4,841
-10	2,340	3	-4,787
-8	2,888	4	-4,288
-7	3,262	5	-3,768
-6	3,734	6	-3,319
-5	4,339	7	-2,949
-4	5,117	8	-2,644
-3	6,063	10	-2,181
-2	6,914	15	-1,504
-1	6,360	20	-1,143
0	2,027		

2. Úlohy z magnetometrie

Vypočtené hodnoty pak vyneseme do grafu:

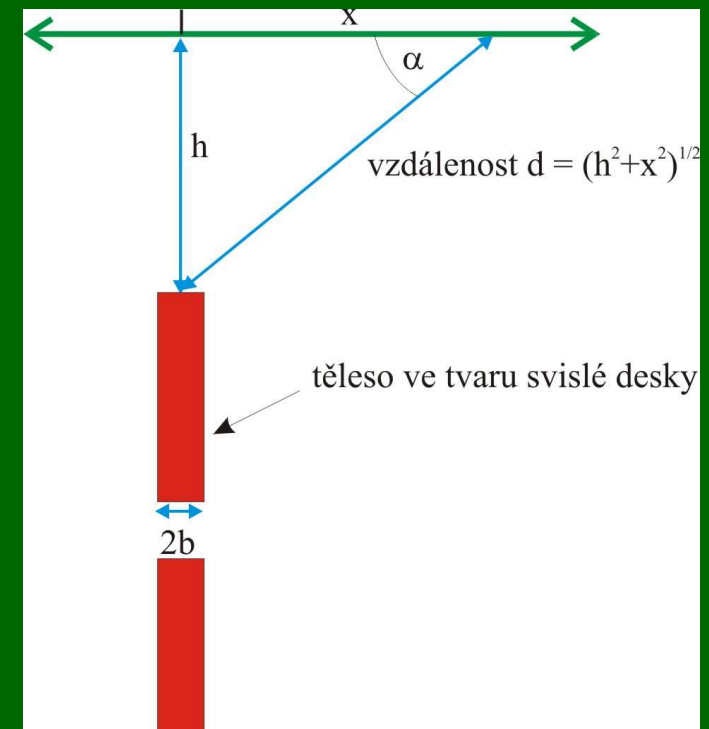


2. Úlohy z magnetometrie

Všimněme si na našem výchozím vztahu blíže goniometrických funkcí. Obě funkce jsou aplikovány na dvojnásobek inklinace normálního magnetického pole – pokud je tedy $I_n=45^\circ$, mají obě funkce triviální řešení ($\sin 2I_n=1$; $\cos 2I_n=0$) a náš vzorec se podstatně zjednoduší:

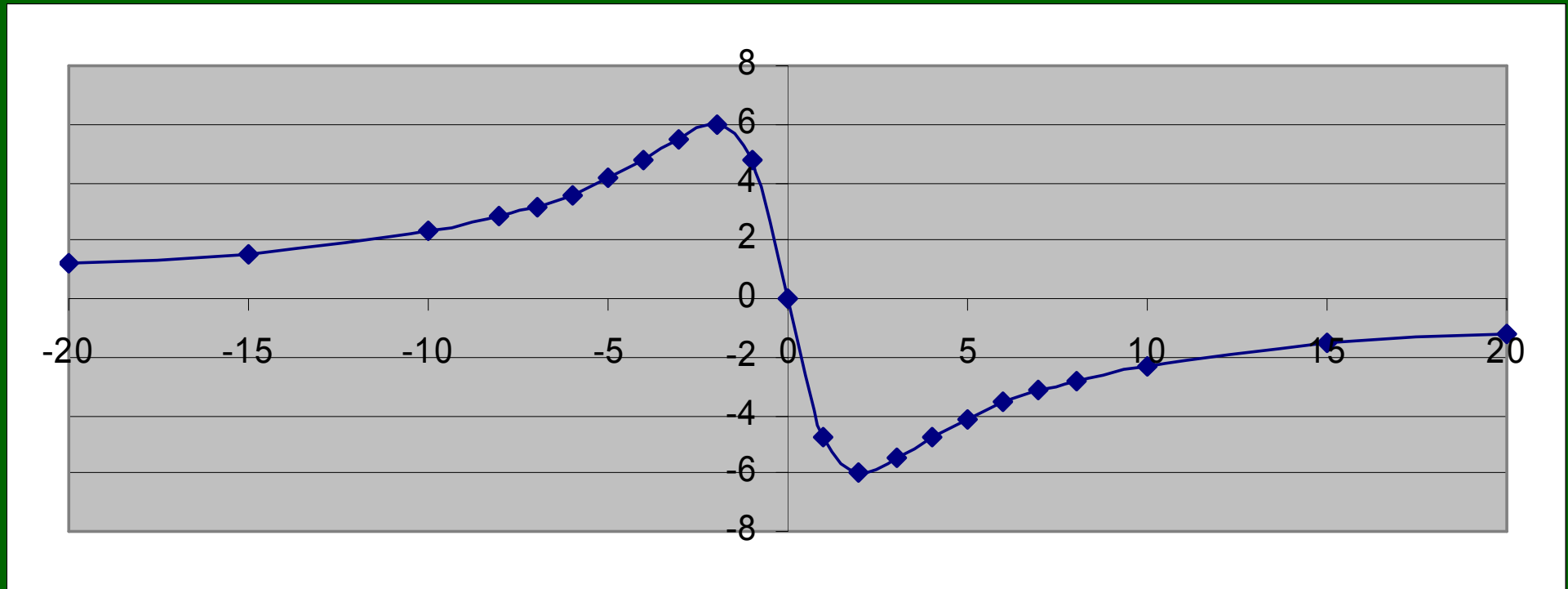
$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$

$$\begin{aligned} \Delta T(x) &= -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(90^\circ) + x \sin(90^\circ)) = \\ &= -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cdot 0 + x \cdot 1) = -x \frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} \end{aligned}$$



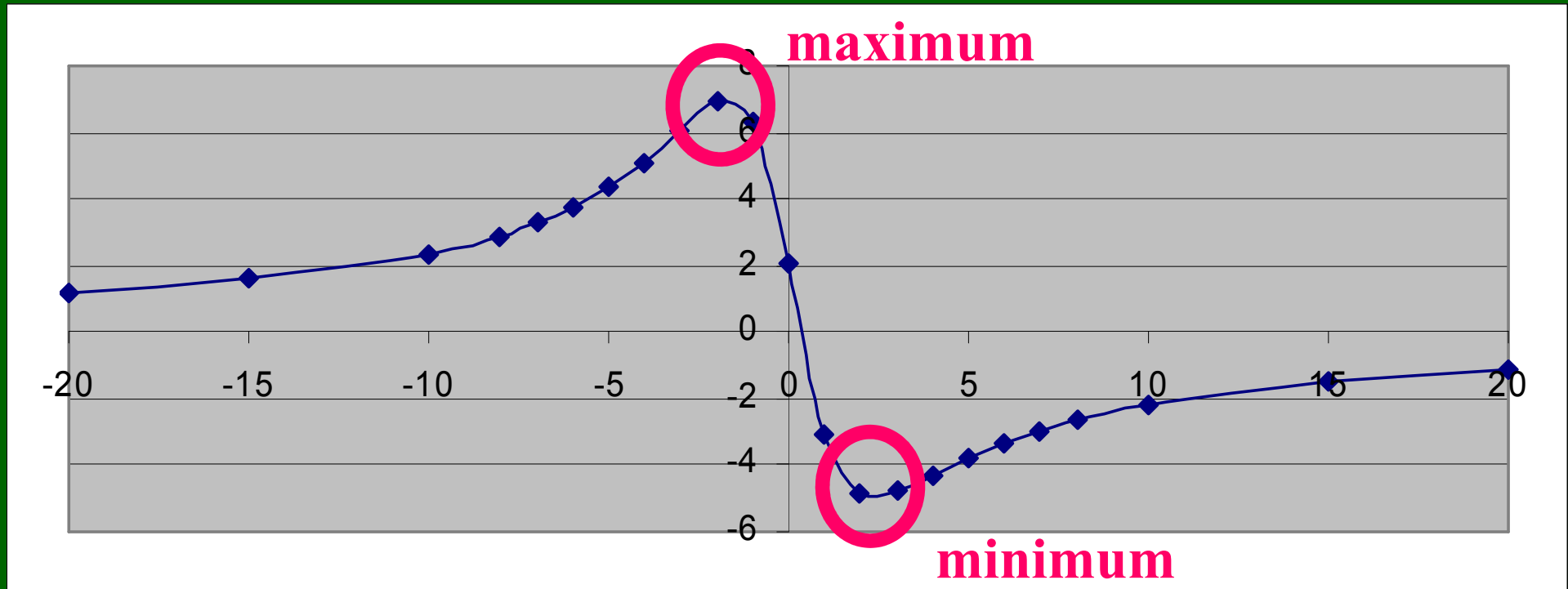
2. Úlohy z magnetometrie

Graf funkce ΔT je pro tento zjedodušený případ ($I_n=0$) středově symetrický:



2. Úlohy z magnetometrie

Vraťme se ale k naší obecnější úloze a k asymetrickému grafu funkce ΔT . Graf se vyznačuje jedním maximem a jedním minimem hodnot ΔT .



2. Úlohy z magnetometrie

Vraťme se k našemu původnímu zadání a zkusme vykreslit další grafy funkce magnetického účinku svislé tenké desky pro různé hloubky (ostatní parametry zůstanou nezměněny):

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$

susceptibilita $\kappa = 0.006$

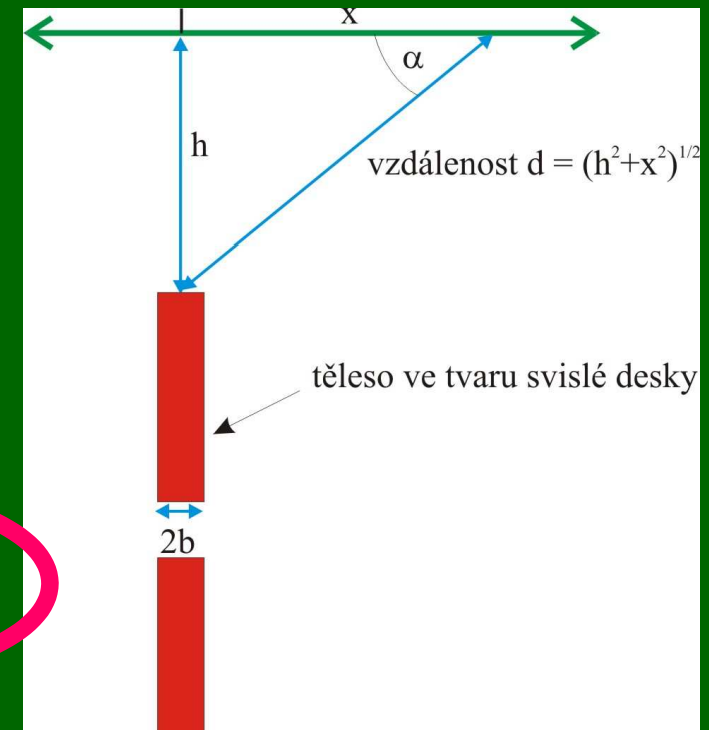
indukce normálního mag. pole

$T_0 = 50000 \text{ nT}$

inklinace normálního mag. pole $I_n = 50^\circ$

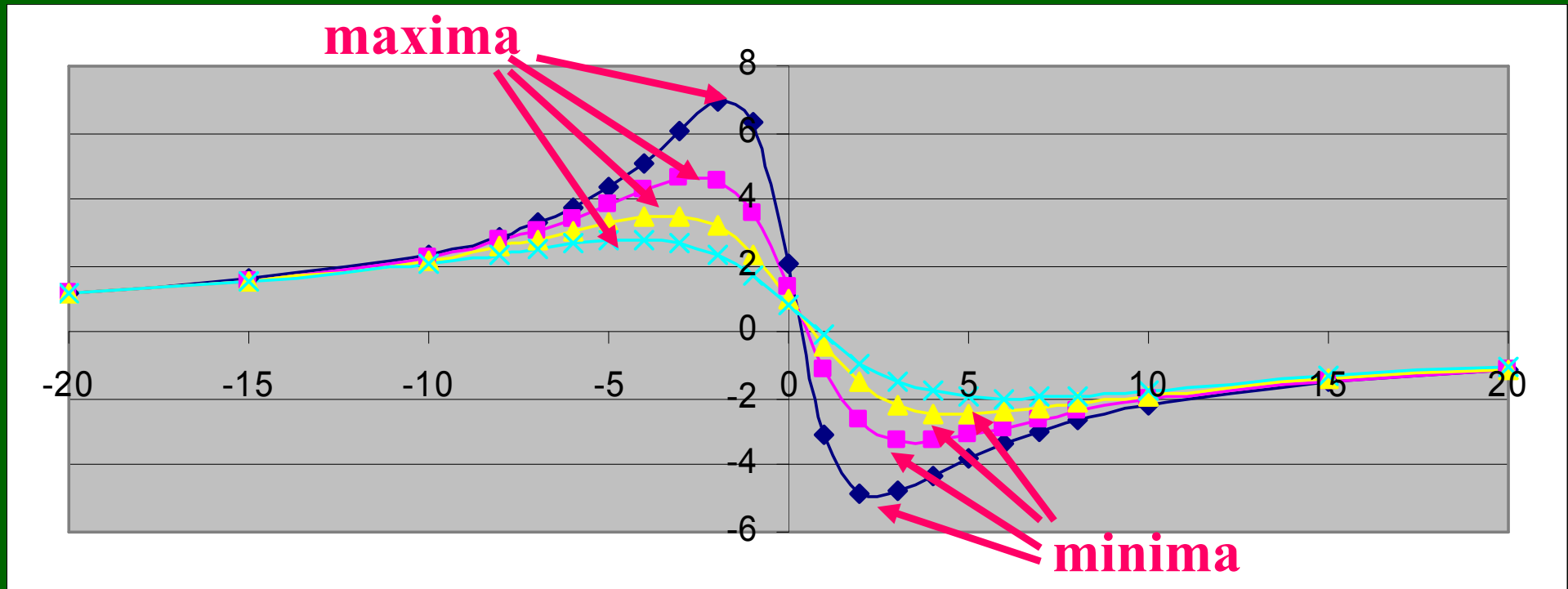
hloubka horního okraje desky $h = 2-5 \text{ m}$

mocnost desky $2b = 0.5 \text{ m}$



2. Úlohy z magnetometrie

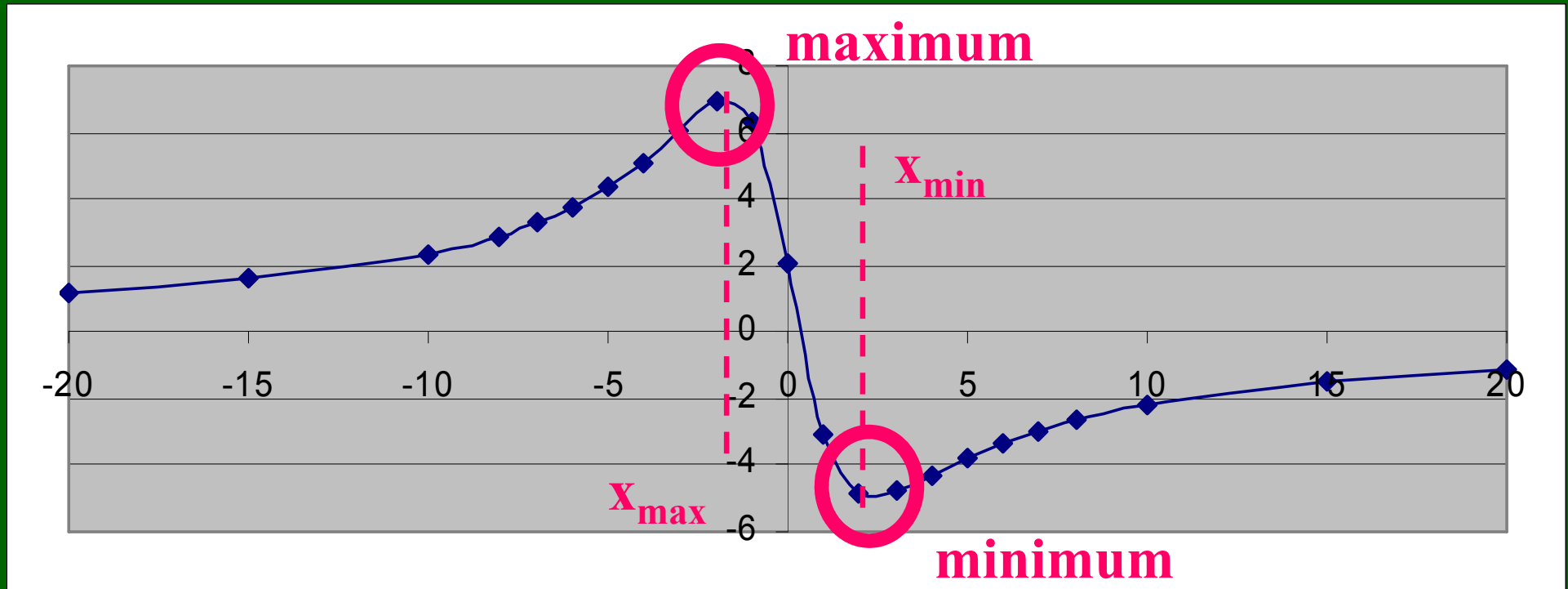
Zjišťujeme, že se s rostoucí hloubkou jednak zmenšuje absolutní hodnota ΔT v minimu a maximu funkce ΔT , a jednak že se od sebe vzdalují x-ové souřadnice maxima minima.



2. Úlohy z magnetometrie

Vzdálenost x-ových souřadnic minima a maxima funkce ΔT závisí na hloubce. Lze ukázat, že platí vztah:

$$h = (x_{\min} - x_{\max}) \frac{\sin 2I_n}{2}$$

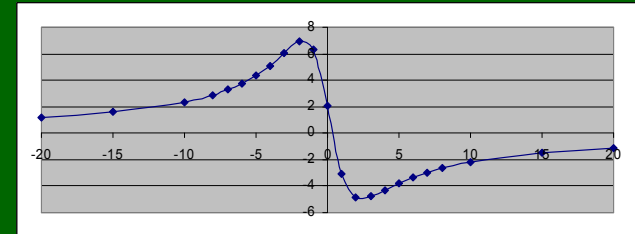


2. Úlohy z magnetometrie

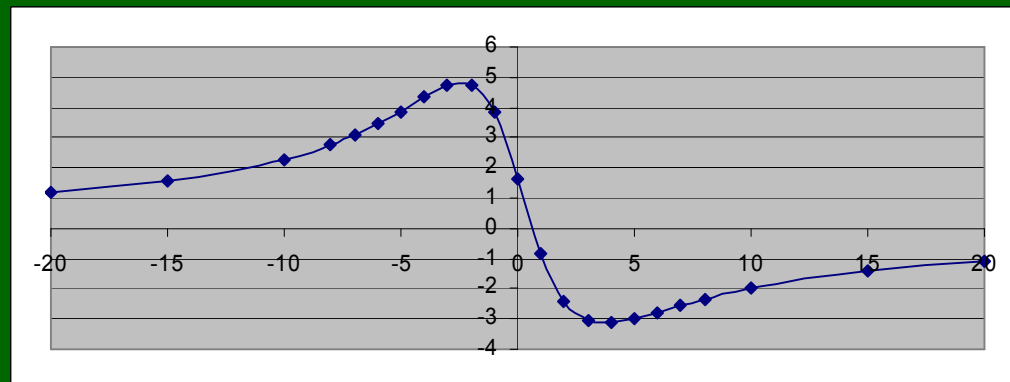
Obrácené úlohy vycházející z úvodního problému:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$

$$h = (x_{\min} - x_{\max}) \frac{\sin 2I_n}{2}$$



Úloha 2.1: Urči hloubku tenké svislé desky, jejíž magnetický účinek ΔT je znázorněn na daném grafu. Hodnota inklinace I_n je 51° .

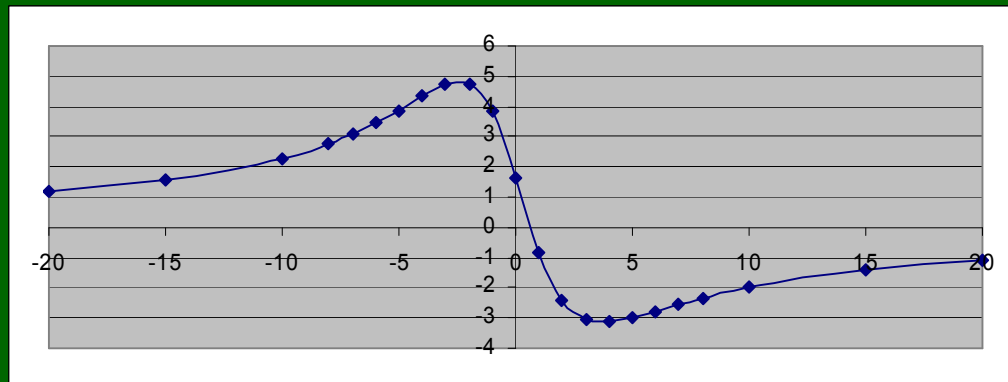


2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.1: Urči hloubku tenké svislé desky, jejíž magnetický účinek ΔT je znázorněn na daném grafu. Hodnota inklinace I_n je 51° .

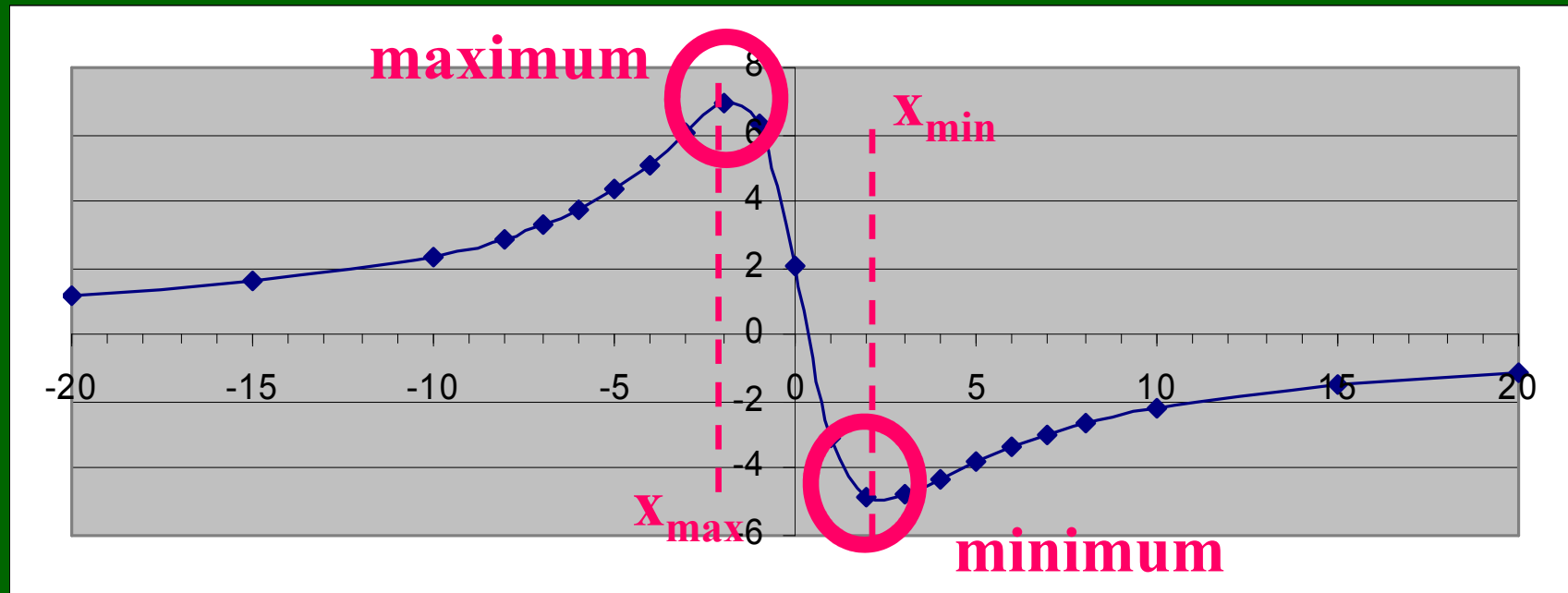
Protože máme k dispozici graf, můžeme vyjít ze vztahu:

$$h = (x_{\min} - x_{\max}) \frac{\sin 2I_n}{2}$$



2. Úlohy z magnetometrie

Nalezneme v grafu minimum a maximum funkce ΔT a odečteme x-ové souřadnice v těchto bodech:



$$x_{\min} \cong 2.1$$

$$x_{\max} \cong -2.0$$

2. Úlohy z magnetometrie

Nyní můžeme dosadit do vzorce:

$$\begin{aligned}h &= (x_{\min} - x_{\max}) \frac{\sin 2I_n}{2} = \\&= (2.1 - \cdot 2.0) \frac{\sin(2 \times 51^\circ)}{2} = 4.1 \frac{\sin 102^\circ}{2} \\h &\cong 2\text{m}\end{aligned}$$

$$x_{\min} \cong 2.1$$

$$x_{\max} \cong \cdot 2.0$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.2: Vypočti mocnost tenké svislé desky, která způsobuje na vodorovném profilu magnetickou anomálií, jejíž hodnota ve vzdálenosti $x=-10\text{m}$ je $\Delta T=4,5421\text{nT}$, jestliže je známo, že hloubka horního okraje desky je 3m , její susceptibilita je $0,006$ jednotek SI, inklinace normálního magnetického pole $I_n=50^\circ$ a indukce normálního magnetického pole $T_0=50000\text{nT}$.

Výjdeme ze vztahu:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$

2. Úlohy z magnetometrie

Vyjádříme si mocnost $2b$:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n)) \Leftrightarrow$$
$$2b = -\frac{\Delta T 2\pi(x^2 + h^2)}{\kappa T_0 (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))}$$

2. Úlohy z magnetometrie

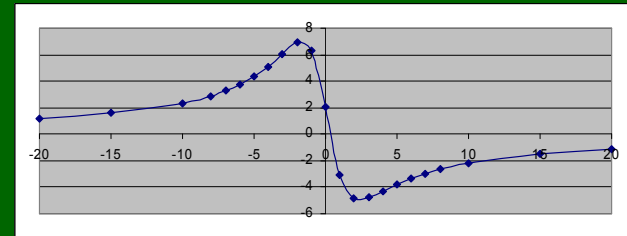
Všechny hodnoty ve vzorci jsou známe, můžeme tedy dosadit do vzorce:

$$\begin{aligned} 2b &= -\frac{\Delta T 2\pi(x^2 + h^2)}{\kappa T_0 (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))} = \\ &= -\frac{4.4521 \times 2 \times 3.16(-10^2 + 3^2)}{0.006 \times 50000 \times (3 \cos 100^\circ + -10 \sin 100^\circ)} = \\ &= -\frac{28.137 \times 109}{300 \times -10.369} = -\frac{3066.963}{-3110.71} = 0.99 \cong 1\text{m} \end{aligned}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Ověřme nyní blíže, jaký je vztah mezi mocností tenké desky a jejím magnetickým účinkem:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$



Úloha 2.3: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT , zvětší-li se mocnost tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.3: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT , zvětší-li se mocnost tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

Mocnost tenké svislé desky se ve vzorci oběhuje na jediném místě:

$$\Delta T_1 = -\frac{\kappa T_0 2b_1}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$
$$\Delta T_2 = -\frac{\kappa T_0 2b_2}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.3: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT , zvětší-li se mocnost tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

Mocnost tenké svislé desky se ve vzorci oběhuje na jediném místě:

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{-\frac{\kappa T_0 2b_2}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))}{-\frac{\kappa T_0 2b_1}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))} = \frac{2b_2}{2b_1}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.3: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT , zvětší-li se mocnost tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

Mocnost tenké svislé desky se zvětšila dvakrát:

$$\frac{2b_2}{2b_1} = 2$$

Tj.:
$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{2b_2}{2b_1} = 2$$

Hodnota magnetické anomálie ΔT se zvětšila dvakrát.

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.4: Vypočti susceptibilitu materiálu tenké svislé desky, která způsobuje na vodorovném profilu magnetickou anomálií, jejíž hodnota ve vzdálenosti $x=-10\text{m}$ je $\Delta T=4,5421\text{nT}$, jestliže je známo, že hloubka horního okraje desky je 3m , její mocnost $2b=1\text{m}$, inklinace normálního magnetického pole $I_n=50^\circ$ a indukce normálního magnetického pole $T_0=50000\text{nT}$.

Výjdeme ze vztahu:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$

2. Úlohy z magnetometrie

Vyjádříme si susceptibilitu κ :

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n)) \Leftrightarrow$$
$$\kappa = -\frac{\Delta T 2\pi(x^2 + h^2)}{2b T_0 (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))}$$

2. Úlohy z magnetometrie

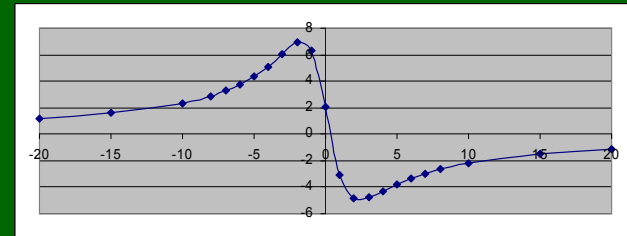
Všechny hodnoty ve vzorci jsou známe, můžeme tedy dosadit do vzorce:

$$\begin{aligned} \kappa &= - \frac{\Delta T 2\pi (x^2 + h^2)}{2bT_0 (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))} = \\ &= - \frac{4.4521 \times 2 \times 3.16 (-10^2 + 3^2)}{1 \times 50000 \times (3 \cos 100^\circ + -10 \sin 100^\circ)} = \\ &= - \frac{28.137 \times 109}{50000 \times -10.369} = - \frac{3066.963}{-518451} = 0.00592 \cong 0.006 \end{aligned}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Ověřme nyní blíže, jaký je vztah mezi susceptibilitou tenké desky a jejím magnetickým účinkem:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$



Úloha 2.5: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT , zvětší-li se susceptibilita tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.5: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT , zvětší-li se susceptibilita tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

Susceptibilita tenké svislé desky se ve vzorci oběhuje na jediném místě:

$$\Delta T_1 = -\frac{\kappa_1 T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$
$$\Delta T_2 = -\frac{\kappa_2 T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.5: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT , zvětší-li se susceptibilita tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

Susceptibilita tenké svislé desky se ve vzorci oběhuje na jediném místě:

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{-\frac{\kappa_2 T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))}{-\frac{\kappa_1 T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.5: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT , zvětší-li se susceptibilita tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

Susceptibilita tenké svislé desky se zvětšila dvakrát:

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = 2$$

Tj.:
$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = 2$$

Hodnota magnetické anomálie ΔT se zvětšila dvakrát.

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.6: Vypočti hloubku horního okraje tenké svislé desky, která způsobuje na vodorovném profilu magnetickou anomálií, jejíž hodnota ve vzdálenosti $x=-10\text{m}$ je $\Delta T=4,3804\text{nT}$, jestliže je známo, že mocnost desky je $2b=1\text{m}$, její susceptibilita je $0,006$ jednotek SI, inklinace normálního magnetického pole $I_n=45^\circ$ a indukce normálního magnetického pole $T_0=50000\text{nT}$.

Výjdeme ze vztahu:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$

2. Úlohy z magnetometrie

Dosadíme nejprve za inklinaci $I_n=45^\circ$:

$$\begin{aligned}\Delta T(x) &= -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n)) = \\ &= -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2 \times 45^\circ) + x \sin(2 \times 45^\circ)) = \\ &= -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(90^\circ) + x \sin(90^\circ))\end{aligned}$$

Vidíme, že goniometrické funkce nabývají v tomto případě triviálních hodnot a náš vzorec se silně zjednoduší.

$$\begin{aligned}\sin 90^\circ &= 1 \\ \cos 90^\circ &= 0\end{aligned}$$

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} x$$

2. Úlohy z magnetometrie

Výjdeme ze zjedodušeného vzorce a vyjádříme si hloubku h :

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + h^2 = -\frac{x\kappa T_0 2b}{2\pi\Delta T} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = -\frac{x\kappa T_0 2b}{2\pi\Delta T} - x^2 \Leftrightarrow$$

$$h = \sqrt{-\frac{x\kappa T_0 2b}{2\pi\Delta T} - x^2}$$

2. Úlohy z magnetometrie

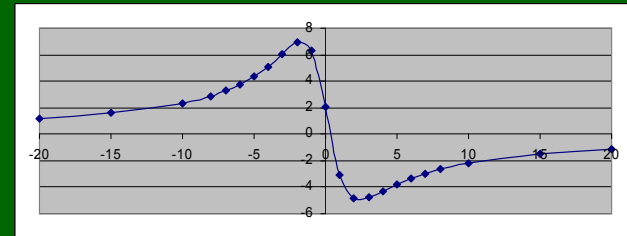
Všechny hodnoty ve vzorci jsou známy, můžeme tedy dosadit do vzorce:

$$\begin{aligned}h &= \sqrt{-\frac{\chi \kappa T_0 2b}{2\pi \Delta T} - x^2} = \sqrt{-\frac{-10 \times 0.006 \times 50000 \times 1}{2 \times 3.16 \times 4.3804} - 10^2} = \\&= \sqrt{\frac{3000}{27.684} - 100} = \sqrt{108.365 - 100} = \sqrt{8.365} \\&= 2.89\text{m} \cong 3\text{m}\end{aligned}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Ověřme nyní blíže, jaký je vztah mezi hloubkou horního okraje tenké desky a jejím magnetickým účinkem:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$



Úloha 2.7: Kolikrát se zmenší hodnota magnetické anomálie ΔT v místě $x=-10\text{m}$, je-li hodnota inklinace normálního magnetického pole $I_n=45^\circ$ a zvětší-li se hloubka horního okraje tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, z hodnoty 2m na dvojnásobek?

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.7: Kolikrát se zmenší hodnota magnetické anomálie ΔT v místě $x=-10\text{m}$, je-li hodnota inklinace normálního magnetického pole $I_n=45^\circ$ a zvětší-li se hloubka horního okraje tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, z hodnoty 2m na dvojnásobek?

Při inklinaci $I_n=45^\circ$, jak jsme ukázali v předešlé úloze, nabývají goniometrické funkce ve vzorci triviálních hodnot a vzorec přechází do jednodušší formy:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} (h \cos(2I_n) + x \sin(2I_n))$$

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h^2)} x$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.7: Kolikrát se zmenší hodnota magnetické anomálie ΔT v místě $x=-10\text{m}$, je-li hodnota inklinace normálního magnetického pole $I_n=45^\circ$ a zvětší-li se hloubka horního okraje tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, z hodnoty 2m na dvojnásobek?

Hloubka horního okraje tenké svislé desky se ve zjednodušeném vzorci objevuje na jediném místě:

$$\Delta T_1 = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h_1^2)} x$$
$$\Delta T_2 = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h_2^2)} x$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.7: Kolikrát se zmenší hodnota magnetické anomálie ΔT v místě $x=-10\text{m}$, je-li hodnota inklinace normálního magnetického pole $I_n=45^\circ$ a zvětší-li se hloubka horního okraje tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, z hodnoty 2m na dvojnásobek?

Hloubka horního okraje tenké svislé desky se ve zjednodušeném vzorci objevuje na jediném místě:

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{-\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h_1^2)} x}{-\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi(x^2 + h_2^2)} x} = \frac{(x^2 + h_2^2)}{(x^2 + h_1^2)}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.7: Kolikrát se zmenší hodnota magnetické anomálie ΔT v místě $x=-10\text{m}$, je-li hodnota inklinace normálního magnetického pole $I_n=45^\circ$ a zvětší-li se hloubka horního okraje tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, z hodnoty 2m na dvojnásobek?

Známe hodnotu x ($x=-10\text{m}$), i hloubku h_1 ($h_1=2\text{m}$) a h_2 ($h_2=2 \cdot h_1=4\text{m}$). Můžeme tedy dosadit do vzorce:

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{(x^2 + h_2^2)}{(x^2 + h_1^2)} = \frac{\cdot 10^2 + 4^2}{\cdot 10^2 + 2^2} = \frac{116}{104} = 1.115$$

Hodnota magnetické anomálie ΔT se zvětšila 1.115 krát.

2. Úlohy z magnetometrie

Řešení úloh:

verze	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
1	1m	1m	3krát	0,005	3krát	2m	1,066krát
2	2m	2m	3krát	0,005	3krát	2m	1,066krát
3	2m	2m	3krát	0,005	3krát	4m	1,066krát
4	3m	1m	3krát	0,005	3krát	4m	1,066krát
5	2m	1m	3krát	0,005	3krát	5m	1,066krát
6	1m	1m	3krát	0,008	3krát	5m	1,414krát
7	2m	1m	3krát	0,008	3krát	5m	1,414krát
8	2m	1,5m	3krát	0,008	3krát	3m	1,414krát
9	3m	1,5m	3krát	0,008	3krát	3m	1,414krát
10	2m	1m	3krát	0,008	3krát	2m	1,414krát