LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

27. října 2006

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole prozkoumáme pojem ***lineárního zobrazení***, které nám umožní porovnávat struktury různých vektorových prostorů nad tímž tělesem.

Obsah přednášky

Lineární zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Lineární zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Říkáme, že $\varphi : V \to U$ je ***lineární zobrazení***, pokud φ zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku,

Lineární zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Říkáme, že $\varphi : V \to U$ je ***lineární zobrazení***, pokud φ zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku,

t. j. pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $c \in K$ platí

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}),$$

Lineární zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Říkáme, že $\varphi : V \to U$ je ***lineární zobrazení***, pokud φ zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku,

t. j. pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $c \in K$ platí

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{x})+\varphi(\mathbf{y}), \\ \varphi(c\mathbf{x}) &= c\varphi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Lineární zobrazení II

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory,

Lineární zobrazení II

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory, t. j. pro lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ a $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Lineární zobrazení II

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory, t. j. pro lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ a $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Pro každý vektorový prostor V je identické zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$, $x \mapsto x$ lineární.

Lineární zobrazení II

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory,

t. j. pro lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ a $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Pro každý vektorový prostor V je identické zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$, $x \mapsto x$ lineární.

Pro libovolné vektorové prostory U, V nad tělesem K zobrazení $\mathbf{0} : V \to U$, které každému vektoru $\mathbf{x} \in V$ přiřadí nulový vektor $\mathbf{0} \in U$, je lineární.

Lineární zobrazení III

Komutativita operace součinu v tělese a jeho distributivita vzhledem na sčítaní znamená, že pro libovolný pevný skalár $a \in K$ je přiřazením $x \mapsto ax$ definované lineární zobrazení $K \to K$.

Lineární zobrazení III

Komutativita operace součinu v tělese a jeho distributivita vzhledem na sčítaní znamená, že pro libovolný pevný skalár $a \in K$ je přiřazením $x \mapsto ax$ definované lineární zobrazení $K \to K$.

Lineární zobrazení můžeme charakterizovat jako zobrazení mezi vektorovými prostory (nad tím stejným tělesem), které zachovávají lineární kombinace.

Lineární zobrazení IV

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je libovolné zobrazení.

Lineární zobrazení IV

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je libovolné zobrazení.

Nasledující podmínky jsou ekvivalentní:

Lineární zobrazení IV

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je libovolné zobrazení.

Nasledující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) *φ je lineární zobrazení;*

Lineární zobrazení IV

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je libovolné zobrazení.

Nasledující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) *φ je lineární zobrazení;*

(ii) *pre všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a, b \in K$ platí*

$$\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\varphi(\mathbf{x}) + b\varphi(\mathbf{y});$$

Lineární zobrazení IV

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je libovolné zobrazení.

Nasledující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) φ *je lineární zobrazení;*

(ii) *pre všechna* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a, b \in K$ *platí*

$$\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\varphi(\mathbf{x}) + b\varphi(\mathbf{y});$$

(iii) *pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *a všechna* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$, $c_1, \ldots, c_n \in K$ *platí*

$$\varphi(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n) = c_1\varphi(\mathbf{x}_1) + \ldots + c_n\varphi(\mathbf{x}_n).$$

Lineární zobrazení V

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

Lineární zobrazení V

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

Lineární zobrazení V

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Lineární zobrazení V

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\psi : W \to V, \varphi : V \to U$ jsou lineární zobrazení.

Lineární zobrazení V

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ jsou lineární zobrazení.

Potom i jejich složení $\varphi \circ \psi : W \to U$ je lineární zobrazení.

Lineární zobrazení VI

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení.

Lineární zobrazení VI

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení.

(a) *Je-li S lineární podprostor prostoru V, tak i $\varphi(S)$ je lineární podprostor prostoru U.*

Lineární zobrazení VI

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení.

(a) *Je-li S lineární podprostor prostoru V, tak i $\varphi(S)$ je lineární podprostor prostoru U.*

(b) *Je-li T lineární podprostor prostoru U, tak $\varphi^{-1}(T)$ je lineární podprostor prostoru V.*

Lineární zobrazení VII

Příklad

Nechť K je těleso.

Lineární zobrazení VII

Příklad

Nechť K je těleso.

Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká,

Lineární zobrazení VII

Příklad

Nechť K je těleso.

Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká,

že pro pevné $m, n, p \in \mathbb{N}$ a libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ je přiřazením $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ definované lineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic $K^{n\times p} \to K^{m\times p}$.

Lineární zobrazení VII

Příklad

Nechť K je těleso.

Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká,

že pro pevné $m, n, p \in \mathbb{N}$ a libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je přiřazením $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ definované lineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic $K^{n \times p} \to K^{m \times p}$.

Podobně je přiřazením $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}$ definované lineární zobrazení $K^{p \times m} \to K^{p \times n}$.

Lineární zobrazení VIII

Speciálně pro $p = 1$ *je takto definované lineární zobrazení* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ *mezi sloupcovými vektorovými prostory* $K^n \to K^m$*, resp. lineární zobrazení* $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}$ *mezi řádkovými vektorovými prostory* $K^m \to K^n$*.*

Lineární zobrazení VIII

Speciálně pro $p = 1$ *je takto definované lineární zobrazení* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ *mezi sloupcovými vektorovými prostory* $K^n \to K^m$, *resp. lineární zobrazení* $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}$ *mezi řádkovými vektorovými prostory* $K^m \to K^n$.

Každé lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad K má v podstatě takovýto tvar.

Lineární zobrazení IX

Příklad

Nechť K je těleso.

Lineární zobrazení IX

Příklad

Nechť K je těleso.

Pro $m, n \in \mathbb{N}$ a pevné $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ jsou předpisy

Lineární zobrazení IX

Příklad

Nechť K je těleso.

Pro $m, n \in \mathbb{N}$ a pevné $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ jsou předpisy

$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{r}_i(\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{s}_j(\mathbf{A})$ *definovaná lineární zobrazení* $K^{m\times n} \to K^{1\times n}$ *resp.* $K^{m\times n} \to K^{m\times 1}$.

Lineární zobrazení IX

Příklad

Nechť K je těleso.

Pro $m, n \in \mathbb{N}$ a pevné $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ jsou předpisy

$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{r}_i(\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{s}_j(\mathbf{A})$ definovaná lineární zobrazení $K^{m\times n} \to K^{1\times n}$ resp. $K^{m\times n} \to K^{m\times 1}$.

Rovněž $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^T$ je lineární zobrazení $K^{m\times n} \to K^{n\times m}$.

Lineární zobrazení X

Příklad

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K, X je množina a $x \in X$ je pevně zvolený prvek.

Lineární zobrazení X

Příklad

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K, X je množina a $x \in X$ je pevně zvolený prvek.

Připomeňme, že V^X je vektorový prostor všech funkcí $f : X \to V$. Dosazení prvku x do funkce f, t. j. přiřazení $f \mapsto f(x)$, je lineární zobrazení $V^X \to V$.

Lineární zobrazení X

Příklad

Nechť V *je vektorový prostor nad tělesem* K*,* X *je množina a* $x \in X$ *je pevně zvolený prvek.*

Připomeňme, že V^X *je vektorový prostor všech funkcí* $f : X \to V$*. Dosazení prvku* x *do funkce* f*, t. j. přiřazení* $f \mapsto f(x)$*, je lineární zobrazení* $V^X \to V$*.*

Podobně, pro libovolnou podmnožinu $Y \subseteq X$ *je zúžení* $f \mapsto f \restriction Y$ *lineární zobrazení* $V^X \to V^Y$*.*

Lineární zobrazení XI

Příklad

Označme V množinu všetch konvergentních posloupností reálných čísel.

Lineární zobrazení XI

Příklad

Označme V množinu všetch konvergentních posloupností reálných čísel.

Zřejmě V je lineární podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všech posloupností reálných čísel.

Lineární zobrazení XI

Příklad

Označme V množinu všetch konvergentních posloupností reálných čísel.

Zřejmě V je lineární podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všech posloupností reálných čísel.

Pak zobrazení $V \to \mathbb{R}$, které posloupnosti $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in V$ přiřadí její limitu $\lim_{n\to\infty} a_n$, je lineární.

Lineární zobrazení XII

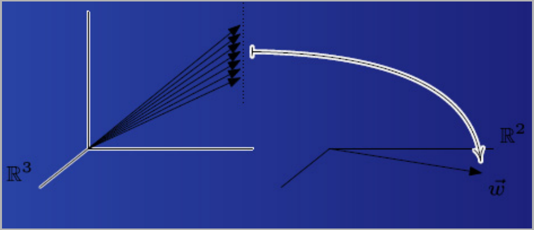
Příklad

Uvažujme projekci $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Lineární zobrazení XII

Příklad

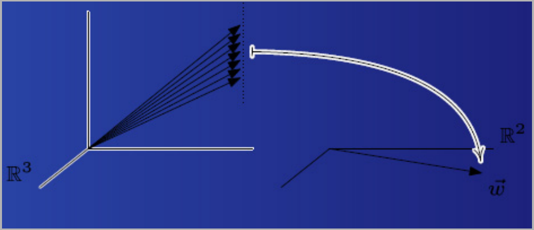
Uvažujme projekci $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Lineární zobrazení XII

Příklad

Uvažujme projekci $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

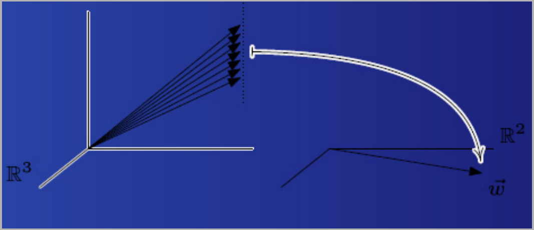


Tato projekce je lineární zobrazení, které není prosté a je surjektivní.

Lineární zobrazení XII

Příklad

Uvažujme projekci $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Tato projekce je lineární zobrazení, které není prosté a je surjektivní.

Totiž vzor nějakého vektoru v $\mathbb{R}^2$ *je vertikální přímka vektorů z* $\mathbb{R}^3$.

Lineární zobrazení XIII

Příklad

Následující lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ *dané předpisem*

Lineární zobrazení XIII

Příklad

Následující lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ *dané předpisem*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \stackrel{h}{\to} x + y$$

není rovněž prosté.

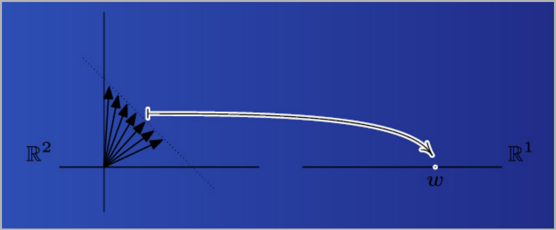
Lineární zobrazení XIII

Příklad

Následující lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ *dané předpisem*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{h} x + y$$

není rovněž prosté. Pro pevné $w \in \mathbb{R}^1$ *je totiž jeho vzor* $h^{-1}(w)$ *množina všech vektorů v rovině,*



jejichž souřadnice po sečtení dávají právě w.

Lineární zobrazení XIV

Příklad

Vzory mohou samozřejmě být jiné struktury než výše použité přímky.

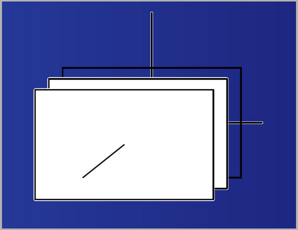
Lineární zobrazení XIV

Příklad

Vzory mohou samozřejmě být jiné struktury než výše použité přímky.

Pro lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definované předpisem*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$



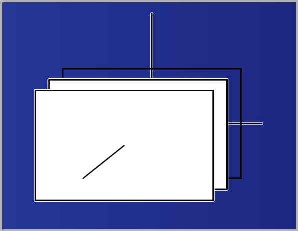
Lineární zobrazení XIV

Příklad

Vzory mohou samozřejmě být jiné struktury než výše použité přímky.

Pro lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definované předpisem*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$



jsou příslušné vzory roviny $x = 0$, $x = 1$, *atd., kolmé k ose* x.

Jádro a obraz I

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K.

Jádro a obraz I

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K.

Jeho ***jádrem*** nazýváme množinu

$$\mathrm{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in V;\ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Jádro a obraz I

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K.

Jeho ***jádrem*** nazýváme množinu

$$\mathrm{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in V;\ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Obrazem lineárního zobrazení φ nazývame množinu

$$\mathrm{Im}\varphi = \varphi(V) = \{\varphi(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in V\}.$$

Jádro a obraz II

Výše zavedené označení pochází z anglických slov ***kernel*** a ***image***.

Jádro a obraz II

Výše zavedené označení pochází z anglických slov ***kernel*** a ***image***.

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V, jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Jádro a obraz II

Výše zavedené označení pochází z anglických slov ***kernel*** a ***image***.

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V, jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Tvrzení

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K.

Jádro a obraz II

Výše zavedené označení pochází z anglických slov ***kernel*** a ***image***.

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V, jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Tvrzení

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K.

Potom $\mathrm{Ker}\varphi$ je lineární podprostor prostoru V a $\mathrm{Im}\varphi$ je lineární podprostor prostoru U.

Jádro a obraz III

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Jádro a obraz III

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení. Potom*

Jádro a obraz III

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Potom

(a) *φ je injektivní právě tehdy, když $\mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;*

Jádro a obraz III

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Potom

(a) *φ je injektivní právě tehdy, když $\mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;*

(b) *φ je surjektivní právě tehdy, když $\mathrm{Im}\varphi = U$.*

Jádro a obraz IV

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení, přičemž vektorový prostor* V *je konečně rozměrný.*

Jádro a obraz IV

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení, přičemž vektorový prostor V je konečně rozměrný.

Potom i $\mathrm{Ker}\varphi$ a $\mathrm{Im}\varphi$ jsou konečně rozměrné prostory a platí

Jádro a obraz IV

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení, přičemž vektorový prostor* V *je konečně rozměrný.*

Potom i $\mathrm{Ker}\varphi$ *a* $\mathrm{Im}\varphi$ *jsou konečně rozměrné prostory a platí*

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi.$$

Jádro a obraz V

Dimenzi obrazu $\mathrm{Im}\varphi$ nazýváme ***hodností*** lineárního zobrazení φ a značíme ji

Jádro a obraz V

Dimenzi obrazu $\mathrm{Im}\varphi$ nazýváme ***hodností*** lineárního zobrazení φ a značíme ji

$$h(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\varphi.$$

Jádro a obraz V

Dimenzi obrazu $\mathrm{Im}\varphi$ nazýváme ***hodností*** lineárního zobrazení φ a značíme ji

$$h(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\varphi.$$

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ vektorového prostoru V do sebe nazýváme ***lineárním operátorem***

Jádro a obraz V

Dimenzi obrazu $\mathrm{Im}\varphi$ nazýváme ***hodností*** lineárního zobrazení φ a značíme ji

$$h(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\varphi.$$

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ vektorového prostoru V do sebe nazýváme ***lineárním operátorem***

neboli ***lineární transformací***.

Jádro a obraz VI

Důsledek

Nechť $\varphi : V \to V$ *je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru* V.

Jádro a obraz VI

Důsledek

Nechť $\varphi : V \to V$ *je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru* V*.*

Potom φ *je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.*

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi vektorovými prostory V, U nad tímž tělesem K nazýváme ***lineární izomorfismus***.

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi vektorovými prostory V, U nad tímž tělesem K nazýváme ***lineární izomorfismus***.

Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou ***lineárně izomorfní*** nebo jen krátce ***izomorfní*** a píšeme $V \cong U$,

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi vektorovými prostory V, U nad týmž tělesem K nazýváme ***lineární izomorfismus***.

Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou ***lineárně izomorfní*** nebo jen krátce ***izomorfní*** a píšeme $V \cong U$,

pokud existuje nějaký lineární izomorfismus $\varphi : V \to U$.

Lineární izomorfismy II

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Lineární izomorfismy II

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K.

(a) $\mathrm{id}_V : V \to V$ *je lineární izomorfismus.*

Lineární izomorfismy II

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K.

(a) $\mathrm{id}_V : V \to V$ *je lineární izomorfismus.*

(b) *Je-li $\varphi : V \to U$ lineární izomorfismus, pak i $\varphi^{-1} : U \to V$ je lineární izomorfismus.*

Lineární izomorfismy II

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K.

(a) $\mathrm{id}_V : V \to V$ *je lineární izomorfismus.*

(b) *Je-li* $\varphi : V \to U$ *lineární izomorfismus, pak i* $\varphi^{-1} : U \to V$ *je lineární izomorfismus.*

(c) *Jsou-li* $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ *lineární izomorfismy, pak i* $\varphi \circ \psi : W \to U$ *je lineární izomorfismus.*

Lineární izomorfismy III

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Lineární izomorfismy III

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad týmž tělesem K platí:

Lineární izomorfismy III

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad týmž tělesem K platí:

(a) $V \cong V$;

Lineární izomorfismy III

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:

(a) $V \cong V$;

(b) $V \cong U \Rightarrow U \cong V$;

Lineární izomorfismy III

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad týmž tělesem K platí:

(a) $V \cong V$;

(b) $V \cong U \;\Rightarrow\; U \cong V$;

(c) $W \cong V \;\&\; V \cong U \;\Rightarrow\; W \cong U$.

Lineární izomorfismy IV

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je ***reflexivní***, ***symetrický*** a ***tranzitivní***,

Lineární izomorfismy IV

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je ***reflexivní***, ***symetrický*** a ***tranzitivní***,

t. j. je vztahem ***ekvivalence***.

Lineární izomorfismy IV

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je ***reflexivní***, ***symetrický*** a ***tranzitivní***,

t. j. je vztahem ***ekvivalence***.

Z formálního hlediska s ním můžeme pracovat podobně jako se vztahem rovnosti $=$.

Lineární izomorfismy IV

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je ***reflexivní***, ***symetrický*** a ***tranzitivní***,

t. j. je vztahem ***ekvivalence***.

Z formálního hlediska s ním můžeme pracovat podobně jako se vztahem rovnosti $=$.

Příklad

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K, $\dim V = n$ a $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ je nějaká jeho báze.

Lineární izomorfismy IV

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je ***reflexivní***, ***symetrický*** a ***tranzitivní***,

t. j. je vztahem ***ekvivalence***.

Z formálního hlediska s ním můžeme pracovat podobně jako se vztahem rovnosti $=$.

Příklad

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K, $\dim V = n$ a $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ je nějaká jeho báze.

Potom souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$ je lineární izomorfizmus $V \to K^n$.

Lineární izomorfismy V

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Lineární izomorfismy V

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Věta

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K.

Lineární izomorfismy V

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Věta

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K.

Potom

$$V \cong U \;\Leftrightarrow\; \dim V = \dim U.$$

Lineární izomorfismy VI

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$.

Lineární izomorfismy VI

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$.

Přitom každá báze β prostoru V určuje jeden takovýto izomorfismus $V \to K^n$ –

Lineární izomorfismy VI

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$.

Přitom každá báze β prostoru V určuje jeden takovýto izomorfismus $V \to K^n$ –

je jím souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_{\beta}$.

Matice lineárního zobrazení I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Matice lineárního zobrazení I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m, můžeme vytvořit matici

Matice lineárního zobrazení I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m, můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m \times n},$$

Matice lineárního zobrazení I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m, můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m \times n},$$

jejímiž sloupci jsou právě tyto vektory,

Matice lineárního zobrazení I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m, můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m \times n},$$

jejímiž sloupci jsou právě tyto vektory,

t. j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{e}_j)$ pro $1 \leq j \leq n$.

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n)$$

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) \end{aligned}$$

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) \\
&= (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot (x_1, \ldots, x_n)^T
\end{aligned}$$

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$
\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) \\
&= (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot (x_1, \ldots, x_n)^T \\
&= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Matice lineárního zobrazení III

Tedy ***každé*** lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro vhodnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Matice lineárního zobrazení III

Tedy ***každé*** lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro vhodnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorom K^n pro $n = \dim V$,

Matice lineárního zobrazení III

Tedy ***každé*** lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro vhodnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorom K^n pro $n = \dim V$,

při volbě pevných bazí v konečně rozměrných prostoroch U, V, bude možné libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ zakódovat pomocí vhodné matice **A**.

Matice lineárního zobrazení IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U, resp. ve V.

Matice lineárního zobrazení IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$, $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U, resp. ve V.

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ ***vzhledem k bazím*** $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nazývame matici

$$\mathbf{A} = \big((\varphi(\mathbf{v}_1))_{\boldsymbol{\alpha}}, \dots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_{\boldsymbol{\alpha}}\big) \in K^{m \times n},$$

Matice lineárního zobrazení IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$, $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U, resp. ve V.

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ ***vzhledem k bazím*** $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nazývame matici

$$\mathbf{A} = \big((\varphi(\mathbf{v}_1))_{\boldsymbol{\alpha}}, \ldots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_{\boldsymbol{\alpha}}\big) \in K^{m\times n},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{v}_j)$ vektorů báze $\boldsymbol{\beta}$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{\alpha}$,

Matice lineárního zobrazení IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$, $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U, resp. ve V.

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ ***vzhledem k bazím*** $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nazývame matici

$$\mathbf{A} = \big((\varphi(\mathbf{v}_1))_{\boldsymbol{\alpha}}, \ldots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_{\boldsymbol{\alpha}}\big) \in K^{m\times n},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{v}_j)$ vektorů báze $\boldsymbol{\beta}$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{\alpha}$,

t. j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = (\varphi(\mathbf{v}_j))_{\boldsymbol{\alpha}}$ pro $1 \leq j \leq n$.

Matice lineárního zobrazení V

Tuto matici značíme též

$$\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Matice lineárního zobrazení V

Tuto matici značíme též

$$\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

(Všimněme si obrácené pořadí znaků bazí vůči pořadí vektorových prostorů v označení zobrazení $\varphi : V \to U$.)

Matice lineárního zobrazení V

Tuto matici značíme též

$$\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

(Všimněme si obrácené pořadí znaků bazí vůči pořadí vektorových prostorů v označení zobrazení $\varphi : V \to U$.)

Matici **A** ze začátku tohoto paragrafu můžeme nazvat ***maticí lineárního zobrazení*** $\varphi : K^n \to K^m$ ***vzhledem na kanonickou bázi*** $\varepsilon^{(n)}$, $\varepsilon^{(m)}$.

Matice lineárního zobrazení VI

Pokud neřekneme jinak, budeme pod maticí lineárního zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ mezi sloupcovými vektorovými prostory vždy rozumět matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bazím.

Matice lineárního zobrazení VI

Pokud neřekneme jinak, budeme pod maticí lineárního zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ mezi sloupcovými vektorovými prostory vždy rozumět matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bazím.

Maticí lineární transformace $\varphi : V \to V$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru V tedy rozumíme matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}}$.

Matice lineárního zobrazení VII

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_{\beta} = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v}_j$ báze $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ prostoru V.

Matice lineárního zobrazení VII

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_{\beta} = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v}_j$ báze $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru V.

Z toho je zřejmé, že pro každou bázi β n-rozměrného vektorového prostoru V platí

Matice lineárního zobrazení VII

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v}_j$ báze $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ prostoru V.

Z toho je zřejmé, že pro každou bázi β n-rozměrného vektorového prostoru V platí

$$(\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{e}_j^{(n)})_{j=1}^n = \mathbf{I}_n.$$

Matice lineárního zobrazení VIII

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad číselným tělesem* K, $\dim V = n$, $\dim U = m$ *a* α, β *jsou báze prostorů* U *resp.* V.

Matice lineárního zobrazení VIII

Věta

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ *je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad číselným tělesem* K, $\dim V = n$, $\dim U = m$ *a* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou báze prostorů* U *resp.* V.

Potom pro všechna $\mathbf{x} \in V$ *platí*

$$(\varphi(\mathbf{x}))_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}}$$

Matice lineárního zobrazení VIII

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad číselným tělesem* K*,* $\dim V = n$*,* $\dim U = m$ *a* $\boldsymbol{\alpha}$*,* $\boldsymbol{\beta}$ *jsou báze prostorů* U *resp.* V*.*

Potom pro všechna $\mathbf{x} \in V$ *platí*

$$(\varphi(\mathbf{x}))_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}}$$

a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ *je jediná matice touto vlastností.*

Matice lineárního zobrazení IX

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Matice lineárního zobrazení IX

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta

Nechť U, V, W *jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem* K, α *je báze* U, β *je báze* V *a* γ *je báze* W.

Matice lineárního zobrazení IX

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta

Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, α je báze U, β je báze V a γ je báze W.

Potom pro libovolné lineární zobrazení $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ platí

Matice lineárního zobrazení IX

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta

Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\boldsymbol{\alpha}$ je báze U, $\boldsymbol{\beta}$ je báze V a $\boldsymbol{\gamma}$ je báze W.

Potom pro libovolné lineární zobrazení $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ platí

$$(\varphi \circ \psi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\psi)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}.$$

Matice lineárního zobrazení X

Příklad

Otočení *roviny okolo počátku o úhel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je lineární zobrazení* $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Matice lineárního zobrazení X

Příklad

Otočení *roviny okolo počátku o úhel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je lineární zobrazení* $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε *budeme značiť rovněž* $\mathbf{R}_\alpha$,

Matice lineárního zobrazení X

Příklad

Otočení *roviny okolo počátku o úhel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je lineární zobrazení* $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε *budeme značiť rovněž* $\mathbf{R}_\alpha$,

tedy pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *budeme psát* $\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}$.

Matice lineárního zobrazení X

Příklad

Otočení *roviny okolo počátku o úhel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je lineární zobrazení* $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε *budeme značiť rovněž* $\mathbf{R}_\alpha$,

tedy pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *budeme psát* $\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}$.

Její sloupce získáme otočením vektorů $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ *o úhel* α.

Matice lineárního zobrazení XI

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

Matice lineárního zobrazení XI

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

Matice lineárního zobrazení XI

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \end{pmatrix}$$

Matice lineárního zobrazení XI

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XII

To znamená, že

Matice lineárního zobrazení XII

To znamená, že

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Matice lineárního zobrazení XII

To znamená, že

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a obrazem libovolného vektoru $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ *v otočení* $\mathbf{R}_\alpha$ *je vektor*

Matice lineárního zobrazení XII

To znamená, že

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a obrazem libovolného vektoru $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ *v otočení* $\mathbf{R}_\alpha$ *je vektor*

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XIII

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix}$$

Matice lineárního zobrazení XIII

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Matice lineárního zobrazení XIII

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

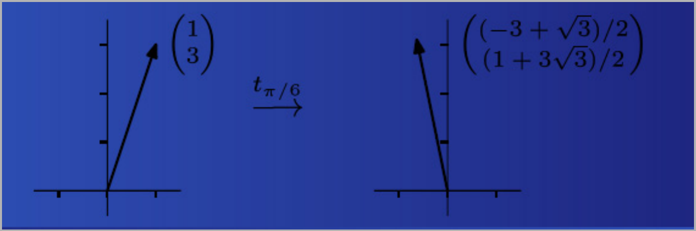
reprezentuje vzhledem ke standardní bázi transformaci $\mathbf{R}_{\pi/6} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, která otočí vektory o* $\pi/6$ *radiánů proti směru hodinových ručiček.*

Matice lineárního zobrazení XIII

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

reprezentuje vzhledem ke standardní bázi transformaci $\mathbf{R}_{\pi/6} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, která otočí vektory o* $\pi/6$ *radiánů proti směru hodinových ručiček.*



Matice lineárního zobrazení XIV

Příklad

Osová souměrnost *roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení* $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *kde* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou* x.

Matice lineárního zobrazení XIV

Příklad

Osová souměrnost *roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení* $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *kde* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou* x.

Pomocí obdobné úvahy jako v případě otočení můžeme ověřit, že i $\mathbf{S}_\alpha$ *je lineární zobrazení.*

Matice lineárního zobrazení XIV

Příklad

Osová souměrnost *roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení* $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, kde* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou* x.

Pomocí obdobné úvahy jako v případě otočení můžeme ověřit, že i $\mathbf{S}_\alpha$ *je lineární zobrazení.*

Jeho matici vzhledem ke kanonické bázi ε *budeme značit stejně tj.* $\mathbf{S}_\alpha$.

Matice lineárního zobrazení XV

Zřejmě matice souměrnosti podle osy x je

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matice lineárního zobrazení XV

Zřejmě matice souměrnosti podle osy x je

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a osovou souměrnost $\S_\alpha$ můžeme obdržet jako složení otočení $\mathbf{R}_{-\alpha}$, osové souměrnosti $\mathbf{S}_0$ a otočení $\mathbf{R}_\alpha$,

Matice lineárního zobrazení XV

Zřejmě matice souměrnosti podle osy x *je*

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a osovou souměrnost $\S_\alpha$ *můžeme obdržet jako složení otočení* $\mathbf{R}_{-\alpha}$*, osové souměrnosti* $\mathbf{S}_0$ *a otočení* $\mathbf{R}_\alpha$*,*

t. j.

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{-\alpha}.$$

Matice lineárního zobrazení XV

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

Matice lineárního zobrazení XV

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XV

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Tedy osová souměrnost $\mathbf{S}_\alpha$ *zobrazí vektor* $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ *na vektor*

Matice lineárního zobrazení XV

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Tedy osová souměrnost $\mathbf{S}_\alpha$ *zobrazí vektor* $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ *na vektor*

$$\mathbf{S}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha \\ x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XVI

Příklad

Stejnolehlost *neboli též* **homotetie** *se středem v počátku a s koeficientem podobnosti* $0 \neq c \in \mathbb{R}$ *je opět lineární zobrazení* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *s maticí* $c\mathbf{I}_2 = \mathrm{diag}(c, c)$.

Matice lineárního zobrazení XVI

Příklad

Stejnolehlost *neboli též* **homotetie** *se středem v počátku a s koeficientem podobnosti* $0 \neq c \in \mathbb{R}$ *je opět lineární zobrazení* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *s maticí* $c\mathbf{I}_2 = \operatorname{diag}(c, c)$*.*

Tento příklad můžeme evidentním způsobem zevšeobecnit na libovolnou dimenzi n.

Matice lineárního zobrazení XVII

Příklad

Zkosení *(kroucení, střih) způsobuje deformace tvarů.*

Matice lineárního zobrazení XVII

Příklad

Zkosení *(kroucení, střih) způsobuje deformace tvarů.*

Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.

Matice lineárního zobrazení XVII

Příklad

Zkosení *(kroucení, střih) způsobuje deformace tvarů.*

Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.

Dvě základní transformace jsou zkosení ve směru x a zkosení ve směru y.

Matice lineárního zobrazení XVIII

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

Matice lineárního zobrazení XVIII

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

$$\varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ ax + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XVIII

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ ax + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Je tak definovaná lineární transformace roviny, která posouvá její každou "vodorovnou vrstvu" $\{(x, y);\ y = s\}$, $s \in K$, o vektor $as\mathbf{e}_1$.

Matice lineárního zobrazení XVIII

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

$$\varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ ax + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Je tak definovaná lineární transformace roviny, která posouvá její každou "vodorovnou vrstvu" $\{(x, y);\ y = s\}$, $s \in K$, o vektor $as\mathbf{e}_1$.

Analogické lineární transformace fungují i ve vícerozměrných prostorech K^n.

Prostory lineárních zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K.

Prostory lineárních zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K.

Uvažme vektorový prostor U^V ***všech*** zobrazení $f : V \to U$ s operacemi součtu a skalárního násobku definovanými po složkách.

Prostory lineárních zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K.

Uvažme vektorový prostor U^V ***všech*** zobrazení $f : V \to U$ s operacemi součtu a skalárního násobku definovanými po složkách.

Pak pro množinu $\mathcal{L}(V, U)$ všech ***lineárních*** zobrazení $\varphi : V \to U$ platí $\mathcal{L}(V, U) \subseteq U^V$.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V.

Tedy $\mathcal{L}(V, U)$ je vektorový prostor nad K.

Tvrzení

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = m$, $\dim V = n$.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V.

Tedy $\mathcal{L}(V, U)$ je vektorový prostor nad K.

Tvrzení

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = m$, $\dim V = n$.

Potom

$$\mathcal{L}(V, U) \cong K^{m \times n},$$

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom $\mathcal{L}(V,U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V.

Tedy $\mathcal{L}(V,U)$ je vektorový prostor nad K.

Tvrzení

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = m$, $\dim V = n$.

Potom

$$\mathcal{L}(V,U) \cong K^{m\times n},$$

tedy $\dim \mathcal{L}(V,U) = mn$.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi α v prostoru U a β v prostoru V.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi $\boldsymbol{\alpha}$ v prostoru U a $\boldsymbol{\beta}$ v prostoru V.

Na matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m\times n}$, vzhledem na dvojici bazí $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi $\boldsymbol{\alpha}$ v prostoru U a $\boldsymbol{\beta}$ v prostoru V.

Na matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m\times n}$, vzhledem na dvojici bazí $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Lineární zobrazení $\varphi : V \to K$ z vektorového prostoru V do tělesa K se nazývá ***lineární funkcionál*** nebo též ***lineární forma*** na V.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi $\boldsymbol{\alpha}$ v prostoru U a $\boldsymbol{\beta}$ v prostoru V.

Na matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m\times n}$, vzhledem na dvojici bazí $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Lineární zobrazení $\varphi : V \to K$ z vektorového prostoru V do tělesa K se nazývá ***lineární funkcionál*** nebo též ***lineární forma*** na V.

Vektorový prostor $\mathcal{L}(V, K)$ všech lineárních forem na V se nazývá ***duální prostor*** nebo jen krátce ***duál*** vektorového prostoru V.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi $\boldsymbol{\alpha}$ v prostoru U a $\boldsymbol{\beta}$ v prostoru V.

Na matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m \times n}$, vzhledem na dvojici bazí $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Lineární zobrazení $\varphi : V \to K$ z vektorového prostoru V do tělesa K se nazývá ***lineární funkcionál*** nebo též ***lineární forma*** na V.

Vektorový prostor $\mathcal{L}(V, K)$ všech lineárních forem na V se nazývá ***duální prostor*** nebo jen krátce ***duál*** vektorového prostoru V.

Budeme používat označení $\mathcal{L}(V, K) = V^*$.

Prostory lineárních zobrazení IV

Pokud v tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$,

Prostory lineárních zobrazení IV

Pokud v tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$,

libovolná báze β v konečně rozměrném prostoru V určuje lineární izomorfismus $V^* \to V$ daný předpisem $\varphi \mapsto (\varphi)_{1,\boldsymbol{\beta}}$.

Prostory lineárních zobrazení IV

Pokud v tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$,

libovolná báze β v konečně rozměrném prostoru V určuje lineární izomorfismus $V^* \to V$ daný předpisem $\varphi \mapsto (\varphi)_{1,\beta}$.

Platí tedy

Tvrzení

Pro libovolný konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K platí $V^* \cong V$.

Prostory lineárních zobrazení V

Matice $(\varphi)_{1,\boldsymbol{\beta}}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \to K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1\times n}$.

Prostory lineárních zobrazení V

Matice $(\varphi)_{1,\boldsymbol{\beta}}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \to K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1\times n}$.

Při volbě kanonické báze ε v sloupcovém prostoru $K^{n\times 1}$ můžeme řádkový prostor $K^{1\times n}$ ztotožnit s duálem $\left(K^{n\times 1}\right)^*$ sloupcového prostoru $K^{n\times 1}$.

Prostory lineárních zobrazení V

Matice $(\varphi)_{1,\beta}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \to K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1\times n}$.

Při volbě kanonické báze ε v sloupcovém prostoru $K^{n\times 1}$ můžeme řádkový prostor $K^{1\times n}$ ztotožnit s duálem $\left(K^{n\times 1}\right)^*$ sloupcového prostoru $K^{n\times 1}$.

Izomorfismus konečně rozměrného prostoru V a jeho duálu V^* závisí od výběru báze ve V.

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,

t. j. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho ***druhého duálu*** V^{**}

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,

t. j. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho ***druhého duálu*** V^{**}

dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$, kde

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,

t. j. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho ***druhého duálu*** V^{**}

dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$, kde

$$\widehat{\mathbf{x}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{x})$$

pro $\mathbf{x} \in V$, $\varphi \in V^*$.

Prostory lineárních zobrazení VII

Tvrzení

Nech V je vektorový prostor nad tělesem K.

Prostory lineárních zobrazení VII

Tvrzení

Nech V je vektorový prostor nad tělesem K.

Potom

(a) $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ *je injektivní lineární zobrazení* $V \to V^{**}$*;*

Prostory lineárních zobrazení VII

Tvrzení

Nech V je vektorový prostor nad tělesem K.

Potom

(a) $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ *je injektivní lineární zobrazení* $V \to V^{**}$;

(b) *pokud je V konečně rozměrný, pak* $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ *je lineární izomorfismus* $V \to V^{**}$.

Prostory lineárních zobrazení VIII

Každý vektor $\mathbf{x} \in V$ definuje lineární funkcionál $\widehat{\mathbf{x}}$ na duálním prostoru V^*.

Prostory lineárních zobrazení VIII

Každý vektor $\mathbf{x} \in V$ definuje lineární funkcionál $\widehat{\mathbf{x}}$ na duálním prostoru V^*.

Konečně rozměrný vektorový prostor V můžeme přiřazením $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ ***přirozeně*** ztotožnit s duálem prostoru V^*.