11. EUKLIDOVSKÉ PROSTORY

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

22. prosince 2006

Abstrakt přednášky

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Abstrakt přednášky

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Při našich dosavadních úvahách o vektorových prostorech jsme pomocí operací sčítání vektorů a násobení čísla s vektorem vyšetřovali pojmy jako byla lineární závislost a nezávislost vektorů, generovatelnost, souřadnice vektoru, atd.

Abstrakt přednášky

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Při našich dosavadních úvahách o vektorových prostorech jsme pomocí operací sčítání vektorů a násobení čísla s vektorem vyšetřovali pojmy jako byla lineární závislost a nezávislost vektorů, generovatelnost, souřadnice vektoru, atd.

Prozatím jsme však neměli možnost ve vektorových prostorech "měřit", tzn. zjišťovat a porovnávat délky vektorů, resp. odchylky (tj. velikosti úhlů), což jsou pojmy, které hrají podstatnou roli např. v geometrii.

Abstrakt přednášky

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Při našich dosavadních úvahách o vektorových prostorech jsme pomocí operací sčítání vektorů a násobení čísla s vektorem vyšetřovali pojmy jako byla lineární závislost a nezávislost vektorů, generovatelnost, souřadnice vektoru, atd.

Prozatím jsme však neměli možnost ve vektorových prostorech "měřit", tzn. zjišťovat a porovnávat délky vektorů, resp. odchylky (tj. velikosti úhlů), což jsou pojmy, které hrají podstatnou roli např. v geometrii.

Ukazuje se, že celou základní geometrickou strukturu, včetně délek a úhlů, můžeme odvodit z pojmu skalárního součinu.

Skalární součin I

Skalární součin

Skalární nebo též *vnitřním součinem* na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ rozumíme binární operaci $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z $\mathbf{V}$ přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{V}$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \quad \text{(aditivita)},$$

$$\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \text{(homogenita)},$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \quad \text{(symetrie)},$$

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \quad \text{(kladná definitnost)}.$$

Skalární součin II

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu nám dává jeho linearitu jako funkci první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Skalární součin II

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu nám dává jeho linearitu jako funkci první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Ze symetrie plyne i linearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,\end{aligned}$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{V}$ a $c \in \mathbb{R}$.

Skalární součin II

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu nám dává jeho linearitu jako funkci první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Ze symetrie plyne i linearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2\rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2\rangle,\\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y}\rangle &= c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle,\end{aligned}$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{V}$ a $c \in \mathbb{R}$.

Z (bi)linearity plyne podmínka kladné definitnosti

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0 \ \& \ \big(\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{0}\big)$$

pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Skalární součin III

První část této podmínky nám umožňuje definovat *normu* neboli *délku vektoru* $\mathbf{x}$ rovností

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Skalární součin III

První část této podmínky nám umožňuje definovat *normu* neboli *délku vektoru* $\mathbf{x}$ rovností

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Euklidovským prostorem nazýváme libovolný *konečně rozměrný* reálný vektorový prostor se skalárním součinem.

Skalární součin IV

Příklad

Ze střední školy v rámci analytické geometrie, případně v rámci fyziky, jsme se potkali s skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ *v rovině* $\mathbb{R}^2$ *a se skalárním součinem* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ *v prostoru* $\mathbb{R}^3$*.*

Skalární součin IV

Příklad

Ze střední školy v rámci analytické geometrie, případně v rámci fyziky, jsme se potkali s skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ *v rovině* $\mathbb{R}^2$ *a se skalárním součinem* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ *v prostoru* $\mathbb{R}^3$*.*

Lehce se můžeme přesvědčit, že stejný vzoreček funguje pro každé n, t. j. pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$*,* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ *je předpisem*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Skalární součin IV

Příklad

Ze střední školy v rámci analytické geometrie, případně v rámci fyziky, jsme se potkali s skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ *v rovině* $\mathbb{R}^2$ *a se skalárním součinem* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ *v prostoru* $\mathbb{R}^3$.

Lehce se můžeme přesvědčit, že stejný vzoreček funguje pro každé n, t. j. pro $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ *je předpisem*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

definovaný skalární součin na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$.

Skalární součin IV

Příklad

Ze střední školy v rámci analytické geometrie, případně v rámci fyziky, jsme se potkali s skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ v rovině $\mathbb{R}^2$ a se skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Lehce se můžeme přesvědčit, že stejný vzoreček funguje pro každé n, t. j. pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ je předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

definovaný skalární součin na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$. V případě řádkového prostoru $\mathbb{R}^n$ máme

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Skalární součin V

Takovýto skalární součin budeme nazývat *standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$.

Skalární součin V

Takovýto skalární součin budeme nazývat *standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$.

Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Skalární součin V

Takovýto skalární součin budeme nazývat *standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$.

Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Délka vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} .$$

Skalární součin V

Takovýto skalární součin budeme nazývat *standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$.

Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Délka vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} .$$

V rámci analytické geometrie se pro nenulové vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ dokazuje známý vztah

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \alpha,$$

který spojuje standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ či v $\mathbb{R}^3$ s délkou příslušných vektorů a jimi sevřeným úhlem α.

Skalární součin VI

Příklad

Položíme-li

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 2u_2 v_1 + 3u_2 v_2,$$

pak jsou opět splněny axiomy skalárního součinu, tzn. $\mathbb{R}^2$ *s tímto skalárním součinem je euklidovským prostorem.*

Skalární součin VI

Příklad

Položíme-li

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 3u_2v_2,$$

pak jsou opět splněny axiomy skalárního součinu, tzn. $\mathbb{R}^2$ *s tímto skalárním součinem je euklidovským prostorem.*

Srovnáme-li výše uvedený skalární součin se standardním skalárním součinem, je vidět, že i když se v obou případech jedná o tentýž vektorový prostor $\mathbb{R}^2$*, jsou definované skalární součiny různé, a tedy různé jsou pak i pomocí nich získané euklidovské prostory.*

Skalární součin VII

Každý podprostor vektorového prostoru V nad T je sám vektorovým prostorem nad T. Je-li specielně V euklidovským prostorem, tzn. je reálný s definovaným skalárním součinem, pak zřejmě axiomy skalárního součinu budou jistě splněny i v jeho libovolném (vektorovém) podprostoru.

Skalární součin VII

Každý podprostor vektorového prostoru V nad T je sám vektorovým prostorem nad T. Je-li specielně V euklidovským prostorem, tzn. je reálný s definovaným skalárním součinem, pak zřejmě axiomy skalárního součinu budou jistě splněny i v jeho libovolném (vektorovém) podprostoru.

To znamená, že každý (vektorový) podprostor euklidovského prostoru V je sám euklidovským prostorem. Budeme jej stručně nazývat *podprostor euklidovského prostoru*.

Skalární součin VIII

Příklad

Nechť $V = \mathbf{R}_n[x]$ *a nechť* $\mathbf{f} = f(x), \mathbf{g} = g(x) \in \mathbf{R}_n[x]$ *jsou libovolné vektory – polynomy. Položíme-li*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, \mathbf{dx},$$

pak rozepsáním (užitím základních vět o integrování známých z analýzy) se ověří platnost axiomů skalárního součinu.

Skalární součin VIII

Příklad

Nechť $V = \mathbf{R}_n[x]$ *a nechť* $\mathbf{f} = f(x), \mathbf{g} = g(x) \in \mathbf{R}_n[x]$ *jsou libovolné vektory – polynomy. Položíme-li*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, \mathbf{dx},$$

pak rozepsáním (užitím základních vět o integrování známých z analýzy) se ověří platnost axiomů skalárního součinu.

Tedy $\mathbb{R}_n[x]$ *s tímto skalárním součinem je euklidovský prostor.*

Skalární součin IX

Věta

V každém reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ *lze definovat skalární součin.*

Skalární součin IX

Věta

V každém reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ *lze definovat skalární součin.*

Můžeme tedy prohlásit, že z každého reálného vektorového prostoru lze utvořit euklidovský prostor, obecně však nikoliv jediným způsobem.

Skalární součin IX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,

Skalární součin IX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
2. $\langle \mathbf{u}, r \cdot \mathbf{v} \rangle = r \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,

Skalární součin IX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
2. $\langle \mathbf{u}, r \cdot \mathbf{v} \rangle = r \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,
3. $\langle \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \mathbf{u}_i \right), \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \cdot \mathbf{v}_j \right) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i r_j \cdot \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \rangle$,

Skalární součin IX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
2. $\langle \mathbf{u}, r \cdot \mathbf{v} \rangle = r \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,
3. $\langle \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \mathbf{u}_i \right), \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \cdot \mathbf{v}_j \right) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i r_j \cdot \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \rangle$,
4. $\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = 0$,

Skalární součin IX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
2. $\langle \mathbf{u}, r \cdot \mathbf{v} \rangle = r \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,
3. $\left\langle \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \mathbf{u}_i \right), \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \cdot \mathbf{v}_j \right) \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i r_j \cdot \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \rangle$,
4. $\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = 0$,
5. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Skalární součin IX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
2. $\langle \mathbf{u}, r \cdot \mathbf{v} \rangle = r \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,
3. $\langle \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \mathbf{u}_i \right), \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \cdot \mathbf{v}_j \right) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i r_j \cdot \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \rangle$,
4. $\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = 0$,
5. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

pro $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \in \mathbf{V}$, $r, p_i, r_j \in \mathbb{R}$ *libovolná.*

Skalární součin X

Definice

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$*. Pak nezáporné reálné číslo:*

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

se nazývá délka nebo též velikost či norma vektoru $\mathbf{u}$.

Skalární součin X

Definice

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$*. Pak nezáporné reálné číslo:*

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

se nazývá délka nebo též velikost či norma vektoru $\mathbf{u}$*.*

Je-li $\|\mathbf{u}\| = 1$, pak říkáme, že *vektor* $\mathbf{u}$ *je normovaný.*

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova nerovnost

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je libovolná uspořádaná k-tice vektorů ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem. Téměř všechny podstatné informace o těchto vektorech jsou ukryté v tzv. *Gramově matici*

$$\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = \big(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle\big)_{k \times k}$$

vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova nerovnost II

Determinant Gramovy matice

$$\begin{aligned} \det \mathbf{G}(\alpha) &= |\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)| \\ &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle \end{vmatrix} \end{aligned}$$

se nazývá *Gramovým determinantem* vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. III

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou libovolné vektory ve vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem. Potom*

(a) $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je symetrická matice tak, že* $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \geq 0$ *pro libovolný vektor* $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$*;*

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. III

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou libovolné vektory ve vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem. Potom*

(a) $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je symetrická matice tak, že* $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \geq 0$ *pro libovolný vektor* $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$*;*

(b) vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je* $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T > 0$ *pro libovolný nenulový vektor* $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$*.*

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IV

Důkaz. Označme $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$.
(a) Symetrie matice $\mathbf{G}$ je přímým důsledkem symetrie skalárního součinu.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IV

Důkaz. Označme $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$.
(a) Symetrie matice $\mathbf{G}$ je přímým důsledkem symetrie skalárního součinu.

Zbývá dokázat, že pro libovolný vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \geq 0$.
Položme $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$. Potom z bilinearity a kladné definitnosti skalárního součinu vyplývá

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_i c_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IV

Důkaz. Označme $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$.
(a) Symetrie matice $\mathbf{G}$ je přímým důsledkem symetrie skalárního součinu.

Zbývá dokázat, že pro libovolný vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \geq 0$.
Položme $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$. Potom z bilinearity a kladné definitnosti skalárního součinu vyplývá

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_i c_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{u}_j \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. V

(b) Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé a předpokládejme, že existuje nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ tak, že $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T = 0$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. V

(b) Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé a předpokládejme, že existuje nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ tak, že $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T = 0$.
Položme $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$. Pak

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_i c_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \quad = \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. V

(b) Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé a předpokládejme, že existuje nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ tak, že $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T = 0$.
Položme $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$. Pak

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_i c_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \quad = \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Protože $\langle -, - \rangle$ je skalární součin, je nutně $v = 0$ tj. z lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ máme, že $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) = 0$. Spor.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VI

Nechť $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T > 0$ pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VI

Nechť $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T > 0$ pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$.

Jsou-li $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, tak v $\mathbb{R}^n$ existuje vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \neq \mathbf{0}$ takový, že $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VI

Nechť $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T > 0$ pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$.

Jsou-li $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, tak v $\mathbb{R}^n$ existuje vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \neq \mathbf{0}$ takový, že $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.

Potom podle (a)

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = 0,$$

spor. $\blacksquare$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VII

Důsledek

Pro libovolné $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ *platí*

$$|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| \geq 0.$$

Přitom $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$ *právě tehdy, když vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně závislé.*

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VII

Důsledek

Pro libovolné $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ *platí*

$$|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)| \geq 0.$$

Přitom $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)| = 0$ *právě tehdy, když vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně závislé.*

Důkaz. Každá symetrická matice lze zapsat ve tvaru $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je regulární matice a $\mathbf{D}$ je diagonální matice.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VII

Důsledek

Pro libovolné $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ *platí*

$$|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| \geq 0.$$

Přitom $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$ *právě tehdy, když vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně závislé.*

Důkaz. Každá symetrická matice lze zapsat ve tvaru $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je regulární matice a $\mathbf{D}$ je diagonální matice.

Protože $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \geq 0$ pro libovolný vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$, má matice $\mathbf{D}$ na diagonále nezáporné prvky.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VIII

Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, jsou nutně i lineárně závislé sloupce Gramovy matice a tedy $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VIII

Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, jsou nutně i lineárně závislé sloupce Gramovy matice a tedy $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$.

Obráceně, je-li $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$, jsou nutně lineárně závislé sloupce Gramovy matice. Nechť například i-tý sloupec Gramovy matice je lineární kombinací ostatních.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VIII

Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, jsou nutně i lineárně závislé sloupce Gramovy matice a tedy $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$.

Obráceně, je-li $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$, jsou nutně lineárně závislé sloupce Gramovy matice. Nechť například i-tý sloupec Gramovy matice je lineární kombinací ostatních.

Tedy $\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha)) = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{s}_j(\mathbf{G}(\alpha))$ pro vhodné koeficienty c_j, zde $c_i = -1$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VIII

Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, jsou nutně i lineárně závislé sloupce Gramovy matice a tedy $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$.

Obráceně, je-li $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$, jsou nutně lineárně závislé sloupce Gramovy matice. Nechť například i-tý sloupec Gramovy matice je lineární kombinací ostatních.

Tedy $\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha)) = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{s}_j(\mathbf{G}(\alpha))$ pro vhodné koeficienty c_j, zde $c_i = -1$.

Odtud
$0 = \sum_j c_j \mathbf{s}_j(\mathbf{G}(\alpha)) = (\mathbf{s}_1(\mathbf{G}(\alpha)), \ldots, \mathbf{s}_k(\mathbf{G}(\alpha))) \cdot (c_1, \ldots, c_k)^T$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VIII

Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, jsou nutně i lineárně závislé sloupce Gramovy matice a tedy $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$.

Obráceně, je-li $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$, jsou nutně lineárně závislé sloupce Gramovy matice. Nechť například i-tý sloupec Gramovy matice je lineární kombinací ostatních.

Tedy $\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha)) = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{s}_j(\mathbf{G}(\alpha))$ pro vhodné koeficienty c_j, zde $c_i = -1$.

Odtud
$0 = \sum_j c_j \mathbf{s}_j(\mathbf{G}(\alpha)) = (\mathbf{s}_1(\mathbf{G}(\alpha)), \ldots, \mathbf{s}_k(\mathbf{G}(\alpha))) \cdot (c_1, \ldots, c_k)^T$.

Celkem
$0 = (c_1, \ldots, c_k) \cdot (\mathbf{s}_1(\mathbf{G}(\alpha)), \ldots, \mathbf{s}_k(\mathbf{G}(\alpha))) \cdot (c_1, \ldots, c_k)^T$, tj. vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IX

Speciálně pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$|\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix}$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IX

Speciálně pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IX

Speciálně pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \geq 0, \end{aligned}$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IX

Speciálně pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \geq 0, \end{aligned}$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory **u**, **v** jsou lineárně závislé.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. X

Tím je dokázaná tzv. *Cauchyho-Schwarzova nerovnost*:

Tvrzení

Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *v prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem platí*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \,,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *jsou lineárně závislé.*

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. XI

Cauchyho-Schwarzovu nerovnost často zapisujeme v ekvivalentním tvaru:

$$(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2.$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. XI

Cauchyho-Schwarzovu nerovnost často zapisujeme v ekvivalentním tvaru:

$$(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2.$$

Poznamenejme ještě, že pro tuto nerovnost se v literatuře používá též pojmenování "Cauchyho nerovnost", resp. "Cauchyho-Bunjakovského nerovnost", event. "Schwarzova nerovnost".

Délka vektoru a úhel dvou vektorů I

Délka vektoru a úhel dvou vektorů

Normou na reálném vektorovém prostoru **V** rozumíme libovolné zobrazení $\| - \| : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, které vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ přiřadí reálné číslo $\|\mathbf{x}\|$, nazývané *normou* nebo též *délkou vektoru* **x**, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \qquad \text{(trojúhelníková nerovnost),}$$

$$\|c\mathbf{x}\| = |c| \, \|\mathbf{x}\| \qquad \text{(pozitivní homogenita),}$$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{(oddělitelnost).}$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů II

Z uvedených podmínek vyplývá nezápornost normy, t. j. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů II

Z uvedených podmínek vyplývá nezápornost normy, t. j. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Z pozitivní homogenity platí $\|\mathbf{0}\| = 0$ a $\|-\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$,

Délka vektoru a úhel dvou vektorů II

Z uvedených podmínek vyplývá nezápornost normy, t. j. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Z pozitivní homogenity platí $\|\mathbf{0}\| = 0$ a $\|-\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$,

s použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{1}{2}\big(\|\mathbf{x}\| + \|-\mathbf{x}\|\big) \geq \frac{1}{2}\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = \frac{1}{2}\,\|\mathbf{0}\| = 0.$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů II

Z uvedených podmínek vyplývá nezápornost normy, t. j. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Z pozitivní homogenity platí $\|\mathbf{0}\| = 0$ a $\|-\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$,

s použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{1}{2}\big(\|\mathbf{x}\| + \|-\mathbf{x}\|\big) \geq \frac{1}{2}\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = \frac{1}{2}\,\|\mathbf{0}\| = 0.$$

Z oddělitelnosti máme $\|\mathbf{x}\| > 0$ pro každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů III

Reálný vektorový prostor s normou nazýváme *normovaný prostor*.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů III

Reálný vektorový prostor s normou nazýváme *normovaný prostor*.

Intuitivně sa na normovaný prostor díváme jako na vektorový prostor, ve kterém můžeme měřit délky vektorů.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů III

Reálný vektorový prostor s normou nazýváme *normovaný prostor*.

Intuitivně sa na normovaný prostor díváme jako na vektorový prostor, ve kterém můžeme měřit délky vektorů.

Tři definující podmínky pro normu zaručují, že takovéto měření délek, t. j. přiřazení $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, má rozumné vlastnosti, jaké od délek očekáváme.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů III

Reálný vektorový prostor s normou nazýváme *normovaný prostor*.

Intuitivně sa na normovaný prostor díváme jako na vektorový prostor, ve kterém můžeme měřit délky vektorů.

Tři definující podmínky pro normu zaručují, že takovéto měření délek, t. j. přiřazení $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, má rozumné vlastnosti, jaké od délek očekáváme.

Vzdáleností bodů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ s normou $\|\cdot\|$ nazýváme délku vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, t. j. číslo $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů III

Reálný vektorový prostor s normou nazýváme *normovaný prostor*.

Intuitivně sa na normovaný prostor díváme jako na vektorový prostor, ve kterém můžeme měřit délky vektorů.

Tři definující podmínky pro normu zaručují, že takovéto měření délek, t. j. přiřazení $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, má rozumné vlastnosti, jaké od délek očekáváme.

Vzdáleností bodů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ s normou $\|\cdot\|$ nazýváme délku vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, t. j. číslo $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Pomocí vzdálenosti bodů můžeme trojúhelníkovou nerovnost vyjádřit jiným, ekvivalentním způsobem:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$$

pre všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$.

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$*.*

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \quad = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$*.*

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$*.*

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$*.*

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2
\end{aligned}$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$.

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$. S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\le \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$.

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= \left(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\right)^2.
\end{aligned}$$

To dokazuje trojúhelníkovou nerovnost. ■

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti vyplývá, že pro libovolné *nenulové* vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti vyplývá, že pro libovolné *nenulové* vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Proto existuje jediné reálné číslo α takové, že $0 \leq \alpha \leq \pi$ a

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}.$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti vyplývá, že pro libovolné *nenulové* vektory **x**, **y** ve vektorovém prostoru se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Proto existuje jediné reálné číslo α takové, že $0 \leq \alpha \leq \pi$ a

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}.$$

Číslo α nazýváme *úhlem* nebo též *odchylkou vektorů* **x**, **y** a značíme ho $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti vyplývá, že pro libovolné *nenulové* vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Proto existuje jediné reálné číslo α takové, že $0 \leq \alpha \leq \pi$ a

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}.$$

Číslo α nazýváme *úhlem* nebo též *odchylkou vektorů* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ a značíme ho $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Ze symetrie skalárního součinu vyplývá $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, to znamená, že se jedná o *neorientovaný úhel*.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů V

Při této definici úhlu dvou nenulových vektorů zůstáva vztah

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

platný pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, zachovaný v libovolném prostoru se skalárním součinem.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů V

Při této definici úhlu dvou nenulových vektorů zůstáva vztah

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

platný pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, zachovaný v libovolném prostoru se skalárním součinem.

Říkáme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ jsou (navzájem) *kolmé* nebo též *ortogonální*, píšeme $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, pokud $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů VI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro libovolné nenulové vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *platí:*

Délka vektoru a úhel dvou vektorů VI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro libovolné nenulové vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *platí:*

(a) *(***kosinová věta***)*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y});$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů VI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro libovolné nenulové vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *platí:*

(a) *(***kosinová věta***)*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y});$$

(b) *(***Pythagorova věta***)*

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \;\Rightarrow$$
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2;$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů VII

(c) (**pravidlo rovnoběžníka**)

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\big);$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů VII

(c) (**pravidlo rovnoběžníka**)

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\big);$$

(d) (**úhlopříčky kosoštvorce jsou na sebe kolmé**)

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| \ \Rightarrow\ \mathbf{x}+\mathbf{y} \perp \mathbf{x}-\mathbf{y}.$$

Ortogonálnost

Definice

Nechť V je euklidovský prostor a nechť:

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \tag{1}$$

je konečná posloupnost vektorů z $\mathbf{V}$. *Řekneme, že:*

- *posloupnost (1) je ortogonální (nebo stručně, že vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou ortogonální), jestliže je:*

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0 \text{ pro každé } i, j = 1, \ldots, k \ \wedge \ i \neq j,$$

Ortogonální podprostory II

- posloupnost (1) je **ortonormální** (nebo stručně, že *vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ *jsou* ***ortonormální***), je-li ortogonální a každý její vektor je normovaný,

Ortogonální podprostory II

- posloupnost (1) je **ortonormální** (nebo stručně, že *vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou* ***ortonormální***), je-li ortogonální a každý její vektor je normovaný,
- posloupnost 1 je ***ortogonální báze*** (resp. ***ortonormální báze***) euklidovského prostoru **V**, jestliže je ortogonální (resp. ortonormální) a navíc je bází prostoru **V**.

Ortogonální podprostory III

Rozebereme-li si definici ortogonálnosti pro nejjednodušší případy, pak vidíme, že pro:

$k = 1$: Posloupnost sestávající z jednoho vektoru je vždy ortogonální (bez ohledu na to, zda např. daný vektor je nulový či nikoliv).

Ortogonální podprostory IV

$k = 2$: Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou ortogonální, právě když $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$.

Ortogonální podprostory IV

$k = 2$: Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou ortogonální, právě když $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$.

V tomto případě budeme psát $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ nebo $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$ (zřejmě zde nezáleží na pořadí vektorů).

Ortogonální podprostory IV

$k = 2$: Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou ortogonální, právě když $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$.

V tomto případě budeme psát $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ nebo $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$ (zřejmě zde nezáleží na pořadí vektorů).

Dále, jsou-li oba vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ nenulové, pak zřejmě jsou ortogonální, právě když jejich odchylka je $\frac{\pi}{2}$ (plyne z definice odchylky).

Ortogonální podprostory IV

$k = 2$: Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou ortogonální, právě když $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$.

V tomto případě budeme psát $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ nebo $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$ (zřejmě zde nezáleží na pořadí vektorů).

Dále, jsou-li oba vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ nenulové, pak zřejmě jsou ortogonální, právě když jejich odchylka je $\frac{\pi}{2}$ (plyne z definice odchylky).

Na druhé straně, dva vektory, z nichž alespoň jeden je nulový, jsou vždy ortogonální (přičemž jejich odchylka samozřejmě není definována).

Ortogonální podprostory V

Věta

Nechť **V** *je euklidovský prostor. Pak pro vektory z* **V** *platí:*

1. $\mathbf{u} \perp \mathbf{u} \iff \mathbf{u} = \mathbf{o}$,
2. $\mathbf{u} \perp \mathbf{x}$ *pro každé* $\mathbf{x} \in V \iff \mathbf{u} = \mathbf{o}$,
3. $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}_i$ *pro* $i = 1, \ldots, k \iff \mathbf{u} \perp \left(\sum_{i=1}^{k} r_i \cdot \mathbf{w}_i \right)$ *pro každé* $r_i \in \mathbb{R}$.

Ortogonální podprostory VI

Věta

Nenulové ortogonální vektory euklidovského prostoru $\mathbf{V}$ *jsou lineárně nezávislé.*

Ortogonální podprostory VI

Věta

Nenulové ortogonální vektory euklidovského prostoru **V** *jsou lineárně nezávislé.*

Poznamenejme, že předpoklad nenulovosti všech vektorů je v předchozí větě podstatný a bez něj věta neplatí. Jinak řečeno, jsou-li ortogonální vektory z **V** lineárně závislé, znamená to, že alespoň jeden z nich musí být nulový.

Ortogonální podprostory VII

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}$ *libovolné. Pak existují ve* $\mathbf{V}$ *ortogonální vektory* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$*, které generují tentýž podprostor jako vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$*, tzn. platí:*

$$[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k].$$

Ortogonální podprostory VII

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}$ *libovolné. Pak existují ve* $\mathbf{V}$ *ortogonální vektory* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$*, které generují tentýž podprostor jako vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$*, tzn. platí:*

$$[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k].$$

$$\mathbf{e}_k = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + p_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{u}_k, \tag{2}$$

Ortogonální podprostory VII

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}$ *libovolné. Pak existují ve* $\mathbf{V}$ *ortogonální vektory* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$*, které generují tentýž podprostor jako vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$*, tzn. platí:*

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k].$$

$$\mathbf{e}_k = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + p_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{u}_k, \tag{2}$$

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i \rangle = 0 = p_i \cdot (\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle) + (\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{e}_i \rangle),$$

Ortogonální podprostory VII

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}$ *libovolné. Pak existují ve* $\mathbf{V}$ *ortogonální vektory* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$*, které generují tentýž podprostor jako vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$*, tzn. platí:*

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k].$$

$$\mathbf{e}_k = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + p_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{u}_k, \tag{2}$$

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i \rangle = 0 = p_i \cdot (\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle) + (\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{e}_i \rangle),$$

$$p_i = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{e}_i \rangle}{\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle} & \textit{je-li } \mathbf{e}_i \neq \mathbf{o} \\ \textit{libovolné} & \textit{je-li } \mathbf{e}_i = \mathbf{o}. \end{array} \right.$$

Ortogonální podprostory VII

- Důkaz předchozí věty byl konstruktivní a jeho algoritmus se nazývá *Gram-Schmidtův ortogonalizační proces* (používá se při řešení konkrétních příkladů!).

Ortogonální podprostory VII

- Důkaz předchozí věty byl konstruktivní a jeho algoritmus se nazývá *Gram-Schmidtův ortogonalizační proces* (používá se při řešení konkrétních příkladů!).
- V předchozí větě se nic nepředpokládá o lineární závislosti nebo nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Proto výsledné ortogonální vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ mohou, ale nemusí být všechny nenulové.

Ortogonální podprostory VIII

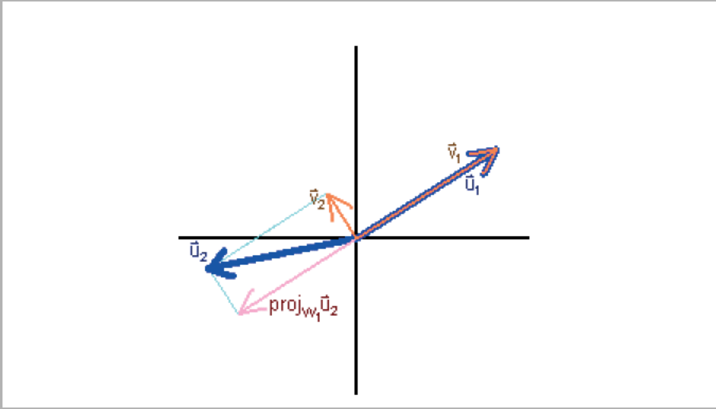
Přesněji řečeno, je-li $\dim[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = r$ ($\leq k$), pak tedy i $\dim[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k] = r$, což znamená, že právě $(k - r)$ z vektorů $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ je nulových a zbývajících r vektorů je nenulových a tvoří ortogonální bázi podprostoru $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$, tj. podprostoru generovaného vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Ortogonální podprostory VIII

Přesněji řečeno, je-li $\dim[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] = r$ ($\leq k$), pak tedy i $\dim[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k] = r$, což znamená, že právě $(k - r)$ z vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ je nulových a zbývajících r vektorů je nenulových a tvoří ortogonální bázi podprostoru $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k]$, tj. podprostoru generovaného vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

Speciálně tedy, jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislé, tzn. tvoří bázi podprostoru $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k]$, pak vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ tvoří ortogonální bázi tohoto podprostoru.

Ortogonální podprostory IX



Gram-Schmidtův algoritmus

Ortogonální podprostory X

Věta

V každém nenulovém euklidovském prostoru $\mathbf{V}$ *existuje ortogonální báze (resp. ortonormální báze).*

Ortogonální podprostory XI

Příklad

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ *se skalárním součinem definovaným:*

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

nalezněte ortogonální bázi podprostoru $\mathbf{W}$ *generovaného vektory* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. *Přitom:*

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1), \;\; \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1, 1), \;\; \mathbf{u}_3 = (1, 0, 1, 0).$$

Ortogonální podprostory XII

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:
$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

Ortogonální podprostory XII

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:
$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

$\mathbf{e}_2 = p \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $p = -\frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = -\frac{2}{3}$. Tedy
$\mathbf{e}_2 = (-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Ortogonální podprostory XII

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:
$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

$\mathbf{e}_2 = p \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $p = -\frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = -\frac{2}{3}$. Tedy
$\mathbf{e}_2 = (-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$\mathbf{e}_3 = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + p_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3$, kde $p_1 = -\frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = -\frac{1}{3}$,
$p_2 = -\frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{e}_2 \rangle}{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle} = 1$. Tedy $\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{3} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3 = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{o}$.

Ortogonální podprostory XII

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:
$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

$\mathbf{e}_2 = p \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $p = -\frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = -\frac{2}{3}$. Tedy
$\mathbf{e}_2 = (-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$\mathbf{e}_3 = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + p_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3$, kde $p_1 = -\frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = -\frac{1}{3}$,
$p_2 = -\frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{e}_2 \rangle}{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle} = 1$. Tedy $\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{3} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3 = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{o}$.

Výsledek: ortogonální bázi podprostoru W tvoří např. vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Ortogonální podprostory XIII

Definice

Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny euklidovského prostoru $\mathbf{V}$. *Je-li:*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \quad \textit{pro každé } \mathbf{a} \in A,\ \mathbf{b} \in B,$$

pak říkáme, že A, B jsou ***ortogonální množiny*** *a píšeme* $A \perp B$ *nebo* $B \perp A$.

Ortogonální podprostory XIII

Definice

Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny euklidovského prostoru $\mathbf{V}$*. Je-li:*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \ \ \textit{pro každé } \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B,$$

pak říkáme, že A, B jsou ***ortogonální množiny*** *a píšeme* $A \perp B$ *nebo* $B \perp A$*.*

Jinak řečeno, A, B jsou ortogonální množiny, právě když $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou ortogonální vektory pro každé $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$.

Ortogonální podprostory XIII

Definice

Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny euklidovského prostoru $\mathbf{V}$*. Je-li:*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \ \ \textit{pro každé } \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B,$$

pak říkáme, že A, B jsou ***ortogonální množiny*** *a píšeme $A \perp B$ nebo $B \perp A$.*

Jinak řečeno, A, B jsou ortogonální množiny, právě když $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou ortogonální vektory pro každé $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$.

Ve speciálních případech: prázdná množina, resp. množina $\{\mathbf{o}\}$ jsou zřejmě ortogonální ke každé podmnožině ve $\mathbf{V}$. Dále z definice plyne, že:

$$A \perp B \Longrightarrow A \cap B = \emptyset \text{ nebo } A \cap B = \{\mathbf{o}\}.$$

Ortogonální podprostory XIV

Věta

Nechť A, B jsou podmnožiny euklidovského prostoru $\mathbf{V}$. Pak platí:

$$A \perp B \Leftrightarrow [A] \perp [B],$$

tzn. dvě množiny jsou ortogonální, právě když jsou ortogonální podprostory generované těmito množinami.

Ortogonální podprostory XV

Definice

Nechť W je podmnožina (podprostor) euklidovského prostoru $\mathbf{V}$*. Pak množina:*

$$W^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0 \text{ pro každé } \mathbf{w} \in W\}$$

se nazývá ***ortogonální doplněk podmnožiny (podprostoru)*** *W (ve* $\mathbf{V}$*).*

Ortogonální podprostory XV

Definice

Nechť W je podmnožina (podprostor) euklidovského prostoru $\mathbf{V}$*. Pak množina:*

$$W^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0 \textit{ pro každé } \mathbf{w} \in W\}$$

se nazývá ***ortogonální doplněk podmnožiny (podprostoru)*** *W (ve* $\mathbf{V}$*).*

Zřejmě platí $W \perp W^{\perp}$ a ve speciálních případech přímo z definice dostáváme, že $V^{\perp} = \{\mathbf{o}\}$, resp. $\{\mathbf{o}\}^{\perp} = V$.

Ortogonální podprostory XVI

Věta

Nechť W je podmnožina euklidovského prostoru $\mathbf{V}$. Pak platí:

1. $W^{\perp}$ *je podprostor ve* $\mathbf{V}$,

Ortogonální podprostory XVI

Věta

Nechť W je podmnožina euklidovského prostoru $\mathbf{V}$. Pak platí:

1. $W^{\perp}$ *je podprostor ve* $\mathbf{V}$,
2. *je-li* $\mathbf{W}$ *podprostor* $\mathbf{V}$, *máme* $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp}$, *tzn. prostor* $\mathbf{V}$ *je přímým součtem podprostorů* $\mathbf{W}$ *a* $\mathbf{W}^{\perp}$.

Ortogonální podprostory XVII

Je-li $\mathbf{W}$ libovolný podprostor ve $\mathbf{V}$, pak (podle 2. části předchozí věty a podle definice přímého součtu podprostorů) se libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ dá napsat, a to jediným způsobem, ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{W}^{\perp}$.

Ortogonální podprostory XVII

Je-li $\mathbf{W}$ libovolný podprostor ve $\mathbf{V}$, pak (podle 2. části předchozí věty a podle definice přímého součtu podprostorů) se libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ dá napsat, a to jediným způsobem, ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{W}^{\perp}$.

Poznamenejme, že vektor $\mathbf{x}$ z tohoto vyjádření se nazývá ***ortogonální projekce vektoru* u *do podprostoru* W.**

Ortogonální podprostory XVII

Je-li $\mathbf{W}$ libovolný podprostor ve $\mathbf{V}$, pak (podle 2. části předchozí věty a podle definice přímého součtu podprostorů) se libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ dá napsat, a to jediným způsobem, ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{W}^{\perp}$.

Poznamenejme, že vektor $\mathbf{x}$ z tohoto vyjádření se nazývá ***ortogonální projekce vektoru* u *do podprostoru* W.**

Píšeme $\mathbf{x} = \mathbf{u}_{\mathbf{W}}$.

Ortogonální podprostory XVIII

Věta

Nechť $\mathbf{W}$ *je podprostor euklidovského prostoru* $\mathbf{V}$*, nechť* $\mathbf{x}$ *(resp.* $\mathbf{x}'$*) je ortogonální projekce vektoru* $\mathbf{u}$ *(resp.* $\mathbf{u}'$*) do podprostoru* $\mathbf{W}$ *a nechť* $r \in \mathbb{R}$ *libovolné. Pak platí:*

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{x}')$ *je ortogonální projekce vektoru* $(\mathbf{u} + \mathbf{u}')$ *do* $\mathbf{W}$*,*

Ortogonální podprostory XVIII

Věta

Nechť $\mathbf{W}$ *je podprostor euklidovského prostoru* $\mathbf{V}$*, nechť* $\mathbf{x}$ *(resp.* $\mathbf{x}'$*) je ortogonální projekce vektoru* $\mathbf{u}$ *(resp.* $\mathbf{u}'$*) do podprostoru* $\mathbf{W}$ *a nechť* $r \in \mathbb{R}$ *libovolné. Pak platí:*

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{x}')$ *je ortogonální projekce vektoru* $(\mathbf{u} + \mathbf{u}')$ *do* $\mathbf{W}$*,*
2. $r \cdot \mathbf{x}$ *je ortogonální projekce vektoru* $r \cdot \mathbf{u}$ *do* W*.*

Ortogonální podprostory XIX

Věta

Nechť $\mathbf{W}$, $\mathbf{S}$ *jsou podprostory euklidovského prostoru* $\mathbf{V}$. *Pak platí:*

1. $(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{W}$,

Ortogonální podprostory XIX

Věta

Nechť $\mathbf{W}$, $\mathbf{S}$ *jsou podprostory euklidovského prostoru* $\mathbf{V}$. *Pak platí:*

1. $(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{W}$,
2. $(\mathbf{W} + \mathbf{S})^{\perp} = \mathbf{W}^{\perp} \cap \mathbf{S}^{\perp}$,

Ortogonální podprostory XIX

Věta

Nechť $\mathbf{W}$, $\mathbf{S}$ *jsou podprostory euklidovského prostoru* $\mathbf{V}$*. Pak platí:*

1. $(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{W}$,
2. $(\mathbf{W} + \mathbf{S})^{\perp} = \mathbf{W}^{\perp} \cap \mathbf{S}^{\perp}$,
3. $(\mathbf{W} \cap \mathbf{S})^{\perp} = \mathbf{W}^{\perp} + \mathbf{S}^{\perp}$.

Ortogonální podprostory XX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor se skalárním součinem,* $\mathbf{S}$ *je jeho konečněrozměrný vektorový podprostor s bazí* $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *a* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$*. Potom pro* $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ *platí* $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ *právě tehdy, když* $\mathbf{c}$ *je řešení soustavy lineárních rovnic*

$$\mathbf{G}(\alpha) \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^T,$$

kde $\langle \mathbf{x}, \alpha \rangle$ *označuje řádkový vektor* $\big(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k \rangle\big) \in \mathbb{R}^k$*.*

Ortogonální podprostory XXI

Důkaz. Pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ právě tehdy, když pro všechna $i \leq k$ máme

$$0 = \langle \mathbf{x} - c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k,\ \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - c_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle - \ldots - c_k\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle.$$

Ortogonální podprostory XXI

Důkaz. Pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ právě tehdy, když pro všechna $i \leq k$ máme

$$0 = \langle \mathbf{x} - c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k,\ \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - c_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle - \ldots - c_k\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle.$$

Tedy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle = (c_1, \ldots, c_k)\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha))$ tj.
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle^T = \mathbf{r}_i(\mathbf{G}(\alpha)^T) \cdot \mathbf{c}.$

Ortogonální podprostory XXI

Důkaz. Pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ právě tehdy, když pro všechna $i \leq k$ máme

$0 = \langle \mathbf{x} - c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k,\ \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - c_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle - \ldots - c_k\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle.$

Tedy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle = (c_1, \ldots, c_k)\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha))$ tj.
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle^T = \mathbf{r}_i(\mathbf{G}(\alpha)^T) \cdot \mathbf{c}$.

Jinak řečeno, $\mathbf{c}$ musí vyhovovat soustavě

$$\mathbf{G}(\alpha)^T \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^T.$$

Ortogonální podprostory XXI

Důkaz. Pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ právě tehdy, když pro všechna $i \leq k$ máme

$0 = \langle \mathbf{x} - c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k, \, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - c_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle - \ldots - c_k \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle.$

Tedy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle = (c_1, \ldots, c_k)\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha))$ tj.
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle^T = \mathbf{r}_i(\mathbf{G}(\alpha)^T) \cdot \mathbf{c}$.

Jinak řečeno, $\mathbf{c}$ musí vyhovovat soustavě

$$\mathbf{G}(\alpha)^T \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^T.$$

Ale $\mathbf{G}(\alpha)^T = \mathbf{G}(\alpha)$ vzhledem na symetrii Gramovy matice.

Ortogonální podprostory XXI

Důkaz. Pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ právě tehdy, když pro všechna $i \leq k$ máme

$0 = \langle \mathbf{x} - c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k, \, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - c_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle - \ldots - c_k \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle.$

Tedy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle = (c_1, \ldots, c_k)\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha))$ tj.
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle^T = \mathbf{r}_i(\mathbf{G}(\alpha)^T) \cdot \mathbf{c}$.

Jinak řečeno, **c** musí vyhovovat soustavě

$$\mathbf{G}(\alpha)^T \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^T.$$

Ale $\mathbf{G}(\alpha)^T = \mathbf{G}(\alpha)$ vzhledem na symetrii Gramovy matice. Protože matice $\mathbf{G}(\alpha)$ je regulární (α je báze S), má tato soustava jediné řešení. ■