Množiny, relace, zobrazení

Množiny

Množinou rozumíme každý soubor určitých objektů shrnutých v jeden celek. Zmíněné objekty pak nazýváme prvky dané množiny. Pojem „množina” je tedy synonymem pojmů typu „soubor”, „souhrn”, apod.

Je-li objekt x prvkem množiny A, píšeme $x \in A$, není-li tomu tak, píšeme $x \notin A$.

Množina je tedy plně určena svými prvky. To znamená, že dvě množiny A, B považujeme za stejné, právě když jsou tvořeny stejnými prvky. Jinak řečeno, klademe $A = B$ právě když pro každý objekt x platí, že x je prvkem A tehdy a jen tehdy, když x je prvkem B. Zapsáno formulí, máme

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B).$$

Řekneme, že množina A je **podmnožinou** množiny B, jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B. Pak píšeme $A \subseteq B$ a mluvíme o **inkluzi** množin. Podrobněji řečeno, klademe $A \subseteq B$ právě když pro každý objekt x platí, že je-li x prvkem A, pak x je také prvkem B. Zapsáno formulí, máme tedy

$$A \subseteq B \iff (\forall x)(x \in A \implies x \in B).$$

To také znamená, že máme

$$A = B \iff (A \subseteq B \;\&\; B \subseteq A).$$

Je jasné, že pak pro libovolné množiny A, B, C platí

$$(A \subseteq B \;\&\; B \subseteq C) \implies A \subseteq C.$$

Poznamenejme ještě, že místo $A \subseteq B$ se někdy píše také $B \supseteq A$, a platí-li současně $A \subseteq B$ a $A \neq B$, bývá to krátce zapisováno ve tvaru $A \subset B$.

Význačnou množinou je **prázdná množina**, tedy množina, která neobsahuje žádný prvek. Značíme ji $\emptyset$. V této souvislosti dodejme, že pro libovolnou množinu A máme

$$A \subseteq A \qquad \text{a} \qquad \emptyset \subseteq A.$$

Množina A se nazývá **konečná**, obsahuje-li pouze konečně mnoho různých prvků; v opačném případě je A **nekonečná** množina.

Pro libovolné dvě množiny A, B definujeme jejich **sjednocení** $A \cup B$ jako množinu, která je tvořena těmi prvky, které jsou prvky buď množiny A nebo množiny B, tedy těmi prvky, které jsou prvky alespoň jedné z množin A, B. To znamená, že klademe

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Dále definujeme **průnik** $A \cap B$ těchto množin jako množinu, která je tvořena těmi prvky, které jsou současně prvky množiny A i množiny B. To znamená, že klademe

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \;\&\; x \in B\}.$$

Říkáme, že množiny A, B jsou **disjunktní**, je-li $A \cap B = \emptyset$. Konečně definujeme **rozdíl** $A - B$ množin A, B jako množinu těch prvků množiny A, které nejsou prvky množiny B. To znamená, že klademe

$$A - B = \{x \mid x \in A \;\&\; x \notin B\}.$$

Platí řada množinových rovností, z nichž pozornost zasluhují zejména následující.

Tvrzení. Pro libovolné množiny A, B, C platí

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned} \qquad \text{(komutativita)}$$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{aligned} \qquad \text{(asociativita)}$$

$$\begin{aligned} A \cup A &= A \\ A \cap A &= A \end{aligned} \qquad \text{(idempotence)}$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned} \qquad \text{(distributivita)}$$

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= (A - B) \cup (A - C) \\ A - (B \cup C) &= (A - B) \cap (A - C) \end{aligned} \qquad \text{(de Morganova pravidla)}$$

Důkaz. Komutativita, asociativita a idempotence jsou zřejmé. Také ověření zbývajících rovností je snadné. Dokážeme například první z de Morganových pravidel. Ověříme následující dvě inkluze:

$A - (B \cap C) \subseteq (A - B) \cup (A - C)$:

Nechť $x \in A - (B \cap C)$. Pak $x \in A \;\&\; x \notin B \cap C$.
Pak tedy $x \in A \;\&\; (x \notin B \vee x \notin C)$.
Pak $(x \in A \;\&\; x \notin B) \vee (x \in A \;\&\; x \notin C)$.
Pak ovšem $x \in A - B \vee x \in A - C$. Takže $x \in (A - B) \cup (A - C)$.

$(A - B) \cup (A - C) \subseteq A - (B \cap C)$:

Nechť $x \in (A - B) \cup (A - C)$. Pak $x \in A - B \vee x \in A - C$.
Pak tedy $(x \in A \;\&\; x \notin B) \vee (x \in A \;\&\; x \notin C)$.
To znamená, že $x \in A \;\&\; (x \notin B \vee x \notin C)$.
Takže pak $x \in A \;\&\; x \notin B \cap C$. Tedy $x \in A - (B \cap C)$.

Důkazy ostatních rovností jsou obdobné.

Někdy se nacházíme v situaci, že všechny uvažované množiny jsou podmnožinami nějaké základní množiny M. Pak pro libovolnou množinu $A \subseteq M$ množinu $M - A$ značíme krátce A' a nazýváme ji **doplněk** množiny A v množině M. Všimněme si, že pak pro libovolnou množinu $A \subseteq M$ platí například

$$A \cup A' = M, \quad A \cap A' = \emptyset \quad \text{a} \quad A'' = A.$$

Relace

Základní konstrukční jednotkou při tvorbě kartézských součinů množin a relací mezi množinami je pojem **uspořádané dvojice** prvků. Intuitivně mu rozumíme tak, že každým dvěma prvkům a, b přiřadíme nový objekt (a, b), nazývaný uspořádanou dvojicí, v němž záleží na pořadí prvků a, b. Obecněji pro každé $k \geq 2$ lze zavést představu **uspořádané k-tice** prvků tak, že každým k prvkům $a_1, \ldots, a_k$ přiřadíme nový objekt $(a_1, \ldots, a_k)$, jejich uspořádanou k-tici, s vyznačeným pořadím těchto prvků.

Pro libovolné dvě množiny A, B definujeme jejich **kartézský součin** $A \times B$ jako množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny uspořádané dvojice (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$. To znamená, že klademe

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \& \ b \in B\}.$$

Je-li $A = B$, nazýváme množinu $A \times A$ **kartézským čtvercem** množiny A a značíme ji A^2. Z uvedené definice je jasné, že množiny $A \times B$ a $B \times A$ jsou obecně různé. Dále pro libovolné množiny A, B, C také množiny

$$(A \times B) \times C = \{((a, b), c) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ c \in C\},$$
$$A \times (B \times C) = \{(a, (b, c)) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ c \in C\}$$

jsou formálně různé. Nicméně rozdíl mezi objekty $((a, b), c)$ a $(a, (b, c))$ se často přehlíží — obojí lze vnímat jako uspořádanou trojici — a lze tedy mluvit prostě jen o kartézském součinu $A \times B \times C$. Takže máme

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ c \in C\}.$$

Podobně pro každé $k \geq 2$ a libovolné množiny $A_1, \ldots, A_k$ definujeme jejich **kartézský součin** $A_1 \times \cdots \times A_k$ jako množinu

$$A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k) \mid a_1 \in A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ a_k \in A_k\}.$$

Jestliže $A_1 = \cdots = A_k = A$, dostáváme tak definici **kartézské mocniny** A^k pro všechna $k \geq 2$. Navíc klademe také $A^1 = A$.

Platí řada jednoduchých rovností:

Tvrzení. Pro libovolné množiny A, B, C platí:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C),\\ (A \cap B) \times C &= (A \times C) \cap (B \times C),\\ (A - B) \times C &= (A \times C) - (B \times C).\end{aligned}$$

Analogické rovnosti platí i pro $C \times (A \cup B)$, $C \times (A \cap B)$ a $C \times (A - B)$.

Důkaz všech rovností je snadný.

Nechť A, B jsou libovolné množiny. Pak libovolná podmnožina ϱ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **relace mezi množinami** A a B. Jsou-li $a \in A$, $b \in B$ takové prvky, že $(a, b) \in \varrho$, pak říkáme, že prvek a je v relaci ϱ s prvkem b, a zapisujeme to zpravidla ve tvaru $a \,\varrho\, b$. Jestliže $(a, b) \notin \varrho$, píšeme obvykle $a \not\varrho\, b$.

Nechť A, B jsou opět libovolné množiny. Pak $\emptyset \subseteq A \times B$, takže $\emptyset$ je relace mezi množinami A a B a nazývá se **prázdná relace** mezi A a B. Rovněž celá množina $A \times B$ je relací mezi množinami A a B a nazývá se **univerzální relace** mezi A a B. Nechť dále $\varrho \subseteq A \times B$ je libovolná relace mezi A a B. Pak **definičním oborem** $\operatorname{Dom} \varrho$ relace ϱ rozumíme množinu

$$\operatorname{Dom} \varrho = \{a \in A \mid (\exists b \in B)(a \,\varrho\, b)\},$$

tedy množinu všech těch prvků z A, které jsou v relaci ϱ alespoň s jedním prvkem z B, a **oborem hodnot** $\operatorname{Im} \varrho$ relace ϱ rozumíme množinu

$$\operatorname{Im} \varrho = \{b \in B \mid (\exists a \in A)(a \,\varrho\, b)\},$$

tedy množinu všech těch prvků z B, s nimiž je v relaci ϱ alespoň jeden prvek z A.

Definujeme **skládání relací**. Nechť A, B, C jsou množiny a nechť $\varrho \subseteq A \times B$ a $\eta \subseteq B \times C$ jsou relace. V této situaci definujeme relaci $\eta \circ \varrho \subseteq A \times C$ vzniklou složením relací ϱ a η následujícím způsobem:

$$\eta \circ \varrho = \{(a, c) \in A \times C \mid (\exists b \in B)(a \,\varrho\, b \;\&\; b \,\eta\, c)\}.$$

Zápis $\eta \circ \varrho$ čteme „η po ϱ".

Skládání relací je asociativní:

Tvrzení. Nechť A, B, C, D jsou množiny a nechť $\varrho \subseteq A \times B$, $\eta \subseteq B \times C$, $\mu \subseteq C \times D$ jsou relace. Pak platí:

$$(\mu \circ \eta) \circ \varrho = \mu \circ (\eta \circ \varrho).$$

Důkaz. Na obou stranách této rovnosti jsou relace mezi množinami A a D. Dokážeme inkluzi $(\mu \circ \eta) \circ \varrho \subseteq \mu \circ (\eta \circ \varrho)$. Nechť tedy $a \in A$, $d \in D$ jsou takové prvky, že $(a, d) \in (\mu \circ \eta) \circ \varrho$. Pak podle definice skládání relací existuje prvek $b \in B$ takový, že $(a, b) \in \varrho$ a $(b, d) \in \mu \circ \eta$. Opět podle téže definice existuje prvek $c \in C$ takový, že $(b, c) \in \eta$ a $(c, d) \in \mu$. Pak ovšem $(a, c) \in \eta \circ \varrho$, takže $(a, d) \in \mu \circ (\eta \circ \varrho)$. Opačná inkluze $\mu \circ (\eta \circ \varrho) \subseteq (\mu \circ \eta) \circ \varrho$ se dokáže analogicky.

Ke každé relaci ϱ mezi množinami A a B definujeme **inverzní relaci** ϱ^{-1} mezi množinami B a A následovně:

$$\varrho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid a \,\varrho\, b\}.$$

To znamená, že platí

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \,\varrho\, b \iff b \,\varrho^{-1} a).$$

Odtud okamžitě plyne, že $\operatorname{Dom} \varrho^{-1} = \operatorname{Im} \varrho$, $\operatorname{Im} \varrho^{-1} = \operatorname{Dom} \varrho$. Dále je jasné, že platí

$$(\varrho^{-1})^{-1} = \varrho.$$

Navíc mezi skládáním relací a inverzními relacemi existuje následující souvislost:

Tvrzení. Nechť A, B, C jsou množiny a nechť $\varrho \subseteq A \times B$, $\eta \subseteq B \times C$ jsou relace. Pak platí:

$$(\eta \circ \varrho)^{-1} = \varrho^{-1} \circ \eta^{-1}.$$

Důkaz. Na obou stranách této rovnosti jsou relace mezi množinami C a A. Dokážeme inkluzi $(\eta \circ \varrho)^{-1} \subseteq \varrho^{-1} \circ \eta^{-1}$. Nechť $a \in A$, $c \in C$ jsou takové prvky, že $(c, a) \in (\eta \circ \varrho)^{-1}$. Pak $(a, c) \in \eta \circ \varrho$. To znamená, že existuje prvek $b \in B$ takový, že $(a, b) \in \varrho$ a $(b, c) \in \eta$. Odtud plyne, že $(b, a) \in \varrho^{-1}$ a $(c, b) \in \eta^{-1}$, takže pak $(c, a) \in \varrho^{-1} \circ \eta^{-1}$. Opačná inkluze $\varrho^{-1} \circ \eta^{-1} \subseteq (\eta \circ \varrho)^{-1}$ se dokáže obdobně obráceným postupem.

Zobrazení

Pojem „zobrazení" nejprve vymezíme následovně. Nechť A, B jsou libovolné množiny. Zobrazením $f : A \to B$ množiny A do množiny B rozumíme předpis, který každému prvku $a \in A$ přiřazuje právě jeden prvek $b \in B$. Pro takové prvky pak píšeme, že $b = f(a)$, a říkáme, že b je obrazem prvku a při zobrazení f.

Uvedené vymezení daného pojmu ovšem obsahuje blíže nespecifikovaný pojem „předpis". Bylo by vhodné umět se bez tohoto prostředku obejít. Proto uvažujme k danému zobrazení $f : A \to B$ relaci $\varrho \subseteq A \times B$ definovanou formulí

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a\,\varrho\,b \iff b = f(a))$$

a nazývanou **graf** zobrazení f. Všimněme si, že pak relace ϱ splňuje podmínku

$$\operatorname{Dom} \varrho = A,$$

neboť zobrazení f každému prvku z A přiřazuje nějaký obraz, a dále podmínku

$$(\forall a \in A)(\forall b, b' \in B)(a \varrho b \;\&\; a \varrho b' \implies b = b'),$$

neboť zobrazení f každému prvku z A přiřazuje jediný obraz. Přitom relace ϱ zobrazení f kompletně určuje, neboť ϱ je vlastně výčtem všech uspořádaných dvojic $(a, b) \in A \times B$ takových, že $b = f(a)$.

Na druhé straně libovolnou relaci $\varrho \subseteq A \times B$ splňující výše uvedené dvě podmínky je možno chápat tímtéž způsobem jako popis určitého zobrazení f, které je pak možno zadat předpisem

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(b = f(a) \iff a \varrho b),$$

neboť ze zmíněných podmínek plyne, že pak každý prvek z A má svůj obraz a že tento obraz je jediný.

Chceme-li tedy podat definici pojmu „zobrazení" jenom s pomocí pojmů zavedených v teorii množin, nabízí se možnost přímo ztotožnit zobrazení f s jeho grafem ϱ, tak jak byl popsán výše. Takto dostáváme následující množinovou definici daného pojmu:

Nechť A, B jsou libovolné množiny a nechť $f \subseteq A \times B$ je relace mezi nimi. Řekneme, že f je **zobrazení** množiny A do množiny B a píšeme $f : A \to B$, jestliže jsou splněny podmínky

$$\operatorname{Dom} f = A$$

a dále

$$(\forall a \in A)(\forall b, b' \in B)(a f b \;\&\; a f b' \implies b = b').$$

V tom případě, jak bylo uvedeno shora, místo zápisu $a f b$, případně $(a, b) \in f$, zpravidla píšeme $b = f(a)$.

Nechť A, B jsou množiny. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **surjekce**, nebo též **zobrazení na** množinu B, platí-li

$$\operatorname{Im} f = B.$$

Při takovém zobrazení f každý prvek $b \in B$ má alespoň jeden vzor, tedy prvek $a \in A$ takový, že $b = f(a)$.

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **injekce**, nebo též **prosté zobrazení**, splňuje-li podmínku

$$(\forall b \in B)(\forall a, a' \in A)(a\, f\, b \;\&\; a'\, f\, b \implies a = a').$$

Při takovém zobrazení f každý prvek $b \in B$ má nanejvýš jeden vzor, tedy prvek $a \in A$ takový, že $b = f(a)$.

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **bijekce**, nebo též **vzájemně jednoznačné zobrazení** množiny A na množinu B, je-li f současně injekce i surjekce.

Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je bijekce. Pak inverzní relace f^{-1} k relaci f je zase zobrazení. To ihned plyne z předchozích podmínek, neboť požadavky, aby f byla surjekce a injekce, přesně odpovídají podmínkám, které je třeba splnit, aby f^{-1} bylo zobrazení. Máme tedy zobrazení $f^{-1} : B \to A$, které samo je rovněž bijekce, neboť zase požadavky nutné k tomu, aby f bylo zobrazení, znamenají, že f^{-1} je surjekce a injekce. Říkáme, že f^{-1} je **inverzní zobrazení** k zobrazení f.

Definujeme **skládání zobrazení.** Poněvadž zobrazení jsou speciální typy relací, definujeme toto skládání stejným způsobem jako skládání relací. Je ale zřejmé, že jsou-li A, B, C množiny a jsou-li $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zobrazení, pak jejich složením dostaneme relaci $g \circ f$, která je opět zobrazením $g \circ f : A \to C$. Přitom toto zobrazení je očividně dáno předpisem

$$(\forall a \in A)((g \circ f)(a) = g(f(a))).$$

Připomeňme, že skládání relací, a tedy i skládání zobrazení je asociativní.

Definujme pro libovolnou množinu A zobrazení $id_A : A \to A$ předpisem

$$(\forall a \in A)(id_A(a) = a).$$

Toto zobrazení se nazývá **identita** na A. Je jasné, že pak pro libovolné množiny A, B a pro libovolné zobrazení $f : A \to B$ platí

$$f \circ id_A = f = id_B \circ f,$$

a je-li f navíc bijekce, pak platí také

$$f^{-1} \circ f = id_A, \quad f \circ f^{-1} = id_B.$$

Důležitý je následující fakt.

Věta. Nechť A, B jsou množiny a nechť

$$f : A \to B, \quad g : B \to A$$

jsou zobrazení. Pak f je bijekce s vlastností, že $f^{-1} = g$, právě tehdy, když platí $g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$.

Důkaz. Je-li f bijekce a je-li $g = f^{-1}$, pak samozřejmě $g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$.

Nechť naopak zobrazení f, g splňují $g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$. Ukážeme nejprve, že f je bijekce. Nechť $b \in B$ je libovolný prvek. Položme $a = g(b)$. Pak $f(a) = f(g(b)) = id_B(b) = b$, takže vidíme, že f je surjekce. Nechť dále $a, a' \in A$ jsou takové prvky, že $f(a) = f(a')$. Pak ovšem $a = id_A(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = id_A(a') = a'$, čili $a = a'$, takže f je také injekce. Celkem f je bijekce a existuje tedy inverzní zobrazení f^{-1}, které je rovněž bijekce. Odtud pak dostáváme $g = id_A \circ g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ id_B = f^{-1}$, čili $g = f^{-1}$.

Jsou-li A, B množiny a je-li $f : A \to B$ zobrazení, pak množinu $\operatorname{Im} f$ značíme rovněž $f(A)$ a nazýváme ji **obraz** při zobrazení f.