Vzorová písemka

M5120 Lineární statistické modely I

Písemná část zkoušky

Příklad 1. Najděte maximálně věrohodné odhady parametrů $\boxed{c}$ a $\boxed{p}$ pro náhodný výběr $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ rozsahu n z Weibullova rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} c\, p\, x^{p-1}\ \exp\{-cx^p\} & x \geq 0,\ p > 0,\ c > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

[15 bodů]

<u>**Řešení**</u>:

Věrohodnostní funkce:

$$\begin{aligned} L(c, p; X_1, \dots, X_n) &= \prod_{i=1}^{n} c\, p\, X_i^{p-1}\ \exp\{-cX_i^p\} \\ &= c^n p^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{p-1} \exp\left\{-c \sum_{i=1}^{n} X_i^p\right\} \end{aligned}$$

Logaritmus věrohodnostní funkce:

$$\begin{aligned} l(c, p; X_1, \dots, X_n) &= \ln L(c, p; X_1, \dots, X_n) \\ &= n \ln c + n \ln p + (p-1) \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - c \sum_{i=1}^{n} X_i^p \end{aligned}$$

Věrohodnostní rovnice:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial l}{\partial c} &= n\frac{1}{c} - \sum_{i=1}^{n} X_i^p \\ c &= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^p} \qquad\qquad (*1) \\ 0 = \frac{\partial l}{\partial p} &= n\frac{1}{p} + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \underbrace{c}_{\text{dosadit } (*1)} \sum_{i=1}^{n} X_i^p \ln X_i \end{aligned}$$

Nejprve numericky řešíme rovnici

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^p \ln X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^p} = 0$$

a získáme $\boxed{\widehat{p}_{MLE}}$, pomocí kterého vypočítáme

$$\boxed{\widehat{c}_{MLE} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\widehat{p}_{MLE}}}}.$$

Příklad 2. Nechť $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ je náhodný vektor s varianční maticí $D\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Vypočítejte rozptyl pro $X_1 - 2X_2 + X_3$.

(b) Najděte varianční matici náhodného vektoru $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$, pro který platí

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2 \\ Y_2 &= X_1 + X_2 + X_3 \end{aligned}$$

[15 bodů]

Řešení:

(a) Označme $\quad Z = X_1 - 2X_2 + X_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \mathbf{b}'\mathbf{X}$

a počítejme rozptyl

$$\boxed{DZ} = D(\mathbf{b}'\mathbf{X}) = \mathbf{b}'D\mathbf{X}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + 8 + 6 = \boxed{18}$$

(b) Položíme-li $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, můžeme psát $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X}$ a počítejme varianční matici

$$\boxed{D\mathbf{Y}} = D(\mathbf{B}\mathbf{X}) = \mathbf{B}\ D\mathbf{X}\ \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 10 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}}$$

Příklad 3. Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný vektor a $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ je symetrická matice reálných čísel. Dokažte že platí

$$E\left(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}\right) = Tr(A\ D\mathbf{X}) + (E\mathbf{X})'\ \mathbf{A}\ E\mathbf{X},$$

kde Tr značí stopu matice, tj. součet diagonálních prvků matice. [15 bodů]

Řešení:

Nejprve si všimněme, že

$$E(\mathbf{X}\mathbf{X}') = E\left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} (X_1, \ldots, X_n) \right\} = (E(X_i X_j))_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}.$$

Dále víme, že

$$D\mathbf{X} = E(\mathbf{X}\mathbf{X}') - (E\mathbf{X})(E\mathbf{X})' \quad \Rightarrow \quad E(\mathbf{X}\mathbf{X}') = D\mathbf{X} + (E\mathbf{X})(E\mathbf{X}).$$

Odtud

$$E\left(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}\right) = \underbrace{E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_iX_j\right)}_{=E(Tr(\mathbf{AXX}'))} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E(X_iX_j)}_{=Tr(E(\mathbf{AXX}'))} = Tr(E(\mathbf{AXX}'))$$

$$= Tr\left\{\mathbf{A}[D\mathbf{X} + (E\mathbf{X})(E\mathbf{X})']\right\} = Tr(\mathbf{A}\ D\mathbf{X}) + Tr(\mathbf{A}\ E\mathbf{X}(E\mathbf{X})')$$

$$= \boxed{Tr(\mathbf{A}\ D\mathbf{X}) + (E\mathbf{X})'\ \mathbf{A}\ E\mathbf{X}}.$$

Příklad 4. Mějme n-rozměrný náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$, který je tvořen nezávislými náhodnými veličinami se stejnou střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. S využitím vztahu

$$E\left(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}\right) = Tr(A\ D\mathbf{X}) + (E\mathbf{X})'\ \mathbf{A}\ E\mathbf{X}$$

vypočítejte střední hodnotu kvadratické formy

$$Q = (X_1 - X_2)^2 + \cdots + (X_{n-1} - X_n)^2.$$

[15 bodů]

<u>Řešení</u>:
Vzhledem k tomu, že náhodný vektor je tvořen nezávislými náhodnými veličinami se stejnou střední hodnotou a stejným rozptylem, platí

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \text{kde} \quad E\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} = (\mu, \ldots, \mu)' \quad \text{a} \quad D\mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}_n.$$

Upravujme nejprve

$$\begin{aligned} Q &= (X_1 - X_2)^2 + \cdots + (X_{n-1} - X_n)^2 \\ &= X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 + X_2^2 - 2X_2X_3 + X_3^2 + \cdots + \\ &\qquad + X_{n-2}^2 - 2X_{n-2}X_{n-1} + X_{n-1}^2 + X_{n-1}^2 - 2X_{n-1}X_n + X_n^2 \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - X_1^2 - X_n^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} X_iX_{i+1} = \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} \\ &= \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a využijme vzorec pro výpočet střední hodnoty kvadratické formy

$$EQ = E\left(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}\right) = Tr(A\ D\mathbf{X}) + (E\mathbf{X})'\ \mathbf{A}\ E\mathbf{X}.$$

Postupně vyjadřujme

$$Tr(A\ D\mathbf{X}) = \sigma^2 Tr(A) = \sigma^2\left[2(n-2) + 2\right] = 2(n-1)\sigma^2$$

$$(E\mathbf{X})'\ \mathbf{A}\ E\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$$

$$= (\mu - \mu, -\mu + 2\mu - \mu, \ldots, -\mu + 2\mu - \mu, -\mu + \mu)\begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix} = \mathbf{0}'\boldsymbol{\mu} = 0$$

Celkově dostaneme $\boxed{EQ = 2(n-1)\sigma^2}$.