10. Pravděpodobnostní vytvořující funkce

10.1. Definice: Definice pravděpodobnostní vytvořující funkce celočíselné nezáporné náhodné veličiny.

10.2. Příklad: Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny X, která má rozložení: a) Po(λ), b) Bi(n, ϑ), c) Ge(ϑ).

Řešení:

ad a) $$p_k = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \text{pro } k = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$$

ad b) $$p_k = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} & \text{pro } k = 0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z\vartheta)^k (1-\vartheta)^{n-k} = (1-\vartheta+z\vartheta)^n$$

ad c) $$p_k = \begin{cases} (1-\vartheta)^k \vartheta & \text{pro } k = 0,1,\ldots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\vartheta)^k \vartheta z^k = \vartheta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(z(1-\vartheta)\right)\right)^k = \frac{\vartheta}{1-z(1-\vartheta)}.$$

10.3. Věta: Výpočet pravděpodobnostní funkce pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce.

10.4. Věta: Výpočet střední hodnoty a rozptylu pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce.

10.5. Příklad: Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $X \sim$ Po(λ).

Řešení: Podle příkladu 10.2. (a) $g_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$.

$$E(X) = \frac{d}{dz} g_X(z)\Big|_{z=1} = e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} = \lambda.$$

$$D(X) = \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) + E(X) - [E(X)]^2 = \frac{d^2}{dz^2} e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

10.6. Věta: Věta o pravděpodobnostní vytvořující funkci součtu n stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin.

10.7. Příklad: Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, i = 1, 2, .., n. Najděte pro pravděpodobnostní vytvořující funkci transformované náhodné veličiny $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Řešení: $X_i \sim A(\vartheta) \Rightarrow p_k = \begin{cases} \vartheta^k (1-\vartheta)^{1-k} \text{ pro } k = 0,1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}, i = 1,2,K\ ,n$,

$g_{X_i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta^k (1-\vartheta)^{1-k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (z\vartheta)^k (1-\vartheta)^{1-k} = 1 - \vartheta + z\vartheta$. Podle věty 10.6. platí:

$g_Y(z) = g_{X_1}(z) \cdot K \cdot g_{X_n}(z) = (1 - \vartheta + z\vartheta)^n \Rightarrow Y \sim Bi(n, \vartheta)$

10.8. Věta: Věta o pravděpodobnostní funkci součtu n stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin.

10.9. Příklad: Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X_i \sim Bi(n, \vartheta)$, i = 1, 2. Pomocí věty 10.8. určete rozložení transformované náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$.

Řešení: $p_k = \begin{cases} \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} \text{ pro } k = 0,1,K\ n \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$,

$$P(Y = y) = \{p_k\}^{2*} = p_0 p_k + p_1 p_{k-1} + K + p_k p_0 = \binom{n}{0} \vartheta^0 (1-\vartheta)^n \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} +$$

$$+ \binom{n}{1} \vartheta^1 (1-\vartheta)^{n-1} \binom{n}{k-1} \vartheta^{k-1} (1-\vartheta)^{n-k+1} + K + \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} \binom{n}{0} \vartheta^0 (1-\vartheta)^n =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \vartheta^j (1-\vartheta)^{n-j} \binom{n}{k-j} \vartheta^{k-j} (1-\vartheta)^{n-k+j} = \vartheta^k (1-\vartheta)^{2n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{2n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{2n-k}$$

k = 0, 1, ..., 2n. Znamená to, $Y \sim Bi(2n, \vartheta)$.

10.10. Věta: Věta o pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny S, která je náhodným součtem náhodného počtu stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin.

10.11. Definice: Definice složeného rozložení.

10.12. Příklad: Nechť X_1, X_2, ... jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X_i \sim A(\vartheta)$, i = 1, 2, ... Nechť N je na nich nezávislá náhodná veličina, $N \sim Po(\lambda)$. Najděte rozložení náhodné veličiny $S = X_1 + ... + X_N$.

Řešení: $p_k = \begin{cases} \vartheta^k (1-\vartheta)^{1-k} \text{ pro } k = 0,1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}, \{p_k\}^{n*} = \begin{cases} \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} \text{ pro } k = 0,1,K\ ,n \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$

$q_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \text{ pro } n = 0,1,2,K \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$

$$h_k=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\binom{n}{k}\vartheta^k(1-\vartheta)^{n-k}=e^{-\lambda}\vartheta^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{k!(n-k)!}\lambda^n(1-\vartheta)^{n-k}=\left|\lambda^n=\lambda^{n-k*k}\right|=$$

$$=e^{-\lambda}\vartheta^k\lambda^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-\vartheta)]^{n-k}}{k!(n-k)!}=\frac{1}{k!}e^{-\lambda}(\lambda\vartheta)^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-\vartheta)]^{n-k}}{(n-k)!}=|j=n-k|=$$

$$=\frac{1}{k!}e^{-\lambda}(\lambda\vartheta)^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-\vartheta)]^{j}}{j!}=\frac{1}{k!}e^{-\lambda}(\lambda\vartheta)^k e^{\lambda(1-\vartheta)}=\frac{(\lambda\vartheta)^k}{k!}e^{-\lambda\vartheta}\Rightarrow$$

$S \sim Po(\lambda\vartheta)$.

10.13. Věta: Věta o pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny S.

10.14. Příklad: Pro náhodnou veličinu S z příkladu 10.12. odvoďte pravděpodobnostní vytvořující funkci.

Řešení: $X_i \sim A(\vartheta) \Rightarrow g_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k=\sum_{k=0}^{1}\vartheta^k(1-\vartheta)^{1-k}z^k=1-\vartheta+z\vartheta$,

$N \sim Po(\lambda) \Rightarrow g_N(z)=e^{\lambda(z-1)}$, $g_S(z) = g_N(g_X(z)) = e^{\lambda(1-\vartheta+z\vartheta-1)}=e^{\lambda\vartheta(z-1)} \Rightarrow S \sim Po(\lambda\vartheta)$.

10.15. Věta: Věta o střední hodnotě a rozptylu náhodné veličiny S .