11. Markovské řetězce s oceněním přechodů

11.1. Definice: Definice markovského řetězce s oceněním přechodů.

11.2. Věta: Rekurentní vztah pro střední hodnotu celkového výnosu po n krocích.

11.3. Příklad: Sledujeme provoz výrobní linky, která se může nacházet ve dvou stavech – v provozu (stav 0) nebo v opravě (stav 1). Dlouhodobým sledováním byla stanovena matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$. Jednotlivým přechodům jsou přiřazena určitá ocenění (tj. výnosy nebo ztráty) prostřednictvím matice výnosů $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$. Pro i = 0, 1 položíme $v_i(0) = 0$.

Pro oba stavy vypočtěte střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za n = 1, 2, 3 období.

Řešení: Nejprve vypočteme střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu 0 resp. 1.

$$q_0 = \sum_{j=0}^{1} p_{0j} r_{0j} = p_{00} r_{00} + p_{01} r_{01} = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 4 = 7$$

$$q_1 = \sum_{j=0}^{1} p_{1j} r_{1j} = p_{10} r_{10} + p_{11} r_{11} = 0{,}4 \cdot 5 + 0{,}6 \cdot (-5) = -1$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$$

$$n = 1: \mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$n = 2: \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$$

$$n = 3: \mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}6 \\ 3{,}72 \end{pmatrix}$$

Interpretace např. pro n = 3: Pokud bude linka na počátku sledování v provozu, tak po třech obdobích bude zisk 12,6 jednotek. Bude-li však linka na počátku v opravě, bude po třech obdobích zisk pouze 3,72 jednotek.

Pro zajímavost uveďme tabulku středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, ..., 6.

Tabulka:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272
$v_0(n)- v_1(n)$	8	8,8	8,88	8,888	8,8888	8,88888

Vidíme, že s rostoucím n se rozdíl $v_0(n)- v_1(n)$ blíží konstantě $8{,}\overline{8}$. Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se v každém období získá výnos vyšší o $8{,}\overline{8}$ jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě.

11.4. Věta: Vyjádření vytvořující funkce posloupnosti vektorů středních hodnot celkových výnosů po n krocích.

11.5. Příklad: Pro zadání z příkladu 11.3. najděte vyjádření pro vektor **v**(n) pomocí vytvořujících funkcí.

Řešení: Z věty 11.4. plyne, že $G_v(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - z\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z/2 & z/2 \\ 2z/5 & 3z/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z/2 & -z/2 \\ -2z/5 & 1-3z/5 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{I}\text{-}z\mathbf{P}) = \left(1-\frac{z}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{3z}{5}\right) - \frac{z^2}{5} = K = (1-z)\cdot\left(1-\frac{z}{10}\right)$$

$$(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{(1-z)\left(1-\frac{z}{10}\right)}\begin{pmatrix} 1-\frac{3z}{5} & \frac{z}{2} \\ \frac{2z}{5} & 1-\frac{z}{2} \end{pmatrix} = \Lambda = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\frac{z}{10}}\begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$G_v(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q} = \left[\frac{z}{(1-z)^2}\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{z}{10}\right)}\begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}\right]$$

$\frac{z}{(1-z)^2}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = n$, n = 0, 1, 2, ...

$$\frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{z}{10}\right)} = K = \frac{\frac{10}{9}}{1-z} + \frac{-\frac{10}{9}}{1-\frac{z}{10}}$$

$\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \frac{10}{9}\cdot 1^n = \frac{10}{9}$, n = 0, 1, 2, ...

$-\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{10}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = -\frac{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n$, n = 0, 1, 2, ...

Celkem:

$$\mathbf{v}(n) = \left[n\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{10}{9}(1-0{,}1)^n\begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23n}{9} \\ \frac{23n}{9} \end{pmatrix} + (1-0{,}1)^n\begin{pmatrix} \frac{400}{81} \\ -\frac{320}{81} \end{pmatrix}$$

Tedy $v_0(n) = \frac{23n}{9} + \frac{400}{81}(1-0{,}1)^n$, $v_1(n) = \frac{23n}{9} - \frac{320}{81}(1-0{,}1)^n$.

Pro dostatečně velká n se výraz $0{,}1^n$ bude blížit nule. Když ho zanedbáme, získáme přibližné vyjádření:

$v_0(n) \approx 2{,}5555\ n + 4{,}9383$, $v_1(n) \approx 2{,}5555\ n - 34{,}9506$.

11.6. Věta: Přibližné vyjádření vektoru středních hodnot celkových výnosů po n krocích pomocí limitní matice přechodu.

11.7. Příklad: Pro zadání z příkladu 11.3. najděte přibližné vyjádření pro vektor **v**(n).

Řešení: Z příkladu11.3. plyne, že $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}$. Dále $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1} =$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 1{,}0617 & -0{,}0617 \\ -0{,}0494 & 1{,}0494 \end{pmatrix}, \text{ tedy}$$

$$\mathbf{v}(n) \approx (n\text{-}1)\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}0617 & -0{,}0617 \\ -0{,}0494 & 1{,}0494 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 2,\bar{5}n + 4{,}9383 \\ 2,\bar{5}n - 3{,}9506 \end{pmatrix}.$$ Dospěli jsme ke stejnému výsledku jako v příkladu 11.5.

Tabulka:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7,4938	10,0494	12,609	15,1605	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1,3951	1,1605	3,716	6,2716	8,8272	11,3827

11.8. Definice: Definice markovského řetězce s diskontovaným oceněním přechodů.

11.9. Věta: Rekurentní vztah pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů po n krocích.

11.10. Věta: Vyjádření pro vytvořující funkci posloupnosti vektorů středních hodnot diskontovaných celkových výnosů po n krocích.

11.11. Příklad: V příkladu 11.3. předpokládejme, že diskontní faktor β = ½ značí pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat. Pomocí vytvořujících funkcí najděte vyjádření pro vektor **v**(n).

Řešení:

Z věty 9.10. plyne, že $G_v(z) = \dfrac{z}{1-z}\left(\mathbf{I} - \beta z\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{q}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - \frac{1}{2}z\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z/4 & z/4 \\ z/5 & 3z/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z/4 & -z/4 \\ -z/5 & 1 - 3z/10 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{I}\text{-}\frac{1}{2}z\mathbf{P}) = \left(1 - \frac{z}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{3z}{10}\right) - \frac{z^2}{20} = \mathrm{K} = \left(1 - \frac{z}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{20}\right)$$

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}z\mathbf{P}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{2}\right)\left(1 - \frac{z}{20}\right)}\begin{pmatrix} 1 - \frac{3z}{10} & \frac{z}{4} \\ \frac{z}{5} & 1 - \frac{z}{4} \end{pmatrix} = \Lambda = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - \frac{z}{20}}\begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$G_v(z)=\frac{z}{1-z}\left(\mathbf{I}-\frac{1}{2}z\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{q}=\left[\frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{z}{2}\right)}\begin{pmatrix}4/9 & 5/9\\ 4/9 & 5/9\end{pmatrix}+\frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{z}{20}\right)}\begin{pmatrix}5/9 & -5/9\\ -4/9 & 4/9\end{pmatrix}\right]$$

$$\frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{z}{2}\right)}=\ldots=\frac{2}{1-z}+\frac{-2}{1-\frac{z}{2}}$$

$2\cdot\frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = 2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$-2\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = -2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{z}{20}\right)}=\ldots=\frac{\frac{20}{19}}{1-z}+\frac{-\frac{20}{19}}{1-\frac{z}{20}}$$

$\frac{20}{19}\cdot\frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \frac{20}{19}\cdot 1^n = \frac{20}{19}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$-\frac{20}{19}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{20}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = -\frac{20}{19}\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Celkem:

$$\mathbf{v}(n)=\left[2\begin{pmatrix}4/9 & 5/9\\ 4/9 & 5/9\end{pmatrix}+\frac{20}{19}(1-0{,}05)^n\begin{pmatrix}5/9 & -5/9\\ -4/9 & 4/9\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}7\\ -1\end{pmatrix}=\ldots=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{186}{19}\\ \frac{26}{19}\end{pmatrix}+0{,}5^n\begin{pmatrix}-\frac{46}{9}\\ -\frac{46}{9}\end{pmatrix}+0{,}05^n\begin{pmatrix}-\frac{800}{171}\\ \frac{640}{171}\end{pmatrix}$$

Tedy $v_0(n)=9{,}7895-0{,}5^n\cdot 5{,}\bar{1}-0{,}05^n\cdot 4{,}6784,\ v_1(n)=1{,}3684-0{,}5^n\cdot 5{,}\bar{1}+0{,}05^n\cdot 3{,}7427$.