13. Galtonův – Watsonův proces větvení

13.1. Definice: Definice Galtonova – Watsonova procesu větvení.

13.2. Označení: Označení pro počet potomků k-tého jedince v n-té generaci.

13.3. Věta: Věta o pravděpodobnostech přechodu.

13.4. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je Galtonův – Watsonův proces větvení s množinou stavů J = {0, 1, 2, ...} a vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) = (¼, ¼ , ½ , 0, ...). Najděte matici přechodu **P**.

Řešení:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & \ldots \\ 1/16 & 2/16 & 5/16 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

13.5. Věta: Věta o pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny X_n.

13.6. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je Galtonův – Watsonův proces větvení, přičemž pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny X_1 má tvar $g_X(z) = 1 - \alpha(1-z)^\beta$, kde $0 < \alpha, \beta < 1$ jsou konstanty. Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny X_n.

Řešení: $g_{X_2}(z) = g_X(g_X(z)) = 1 - \alpha\left\{1 - \left[1 - \alpha(1-z)^\beta\right]\right\}^\beta = 1 - \alpha\left[\alpha(1-z)^\beta\right]^\beta = 1 - \alpha^{\beta+1}(1-z)^{\beta^2}$

$g_{X_3}(z) = g_{X_2}(g_X(z)) = 1 - \alpha^{\beta+1}\left\{1 - \left[1 - \alpha(1-z)^\beta\right]\right\}^{\beta^2} = 1 - \alpha^{\beta+1}\left[\alpha^{\beta^2}(1-z)^{\beta^3}\right] = 1 - \alpha^{1+\beta+\beta^2}(1-z)^{\beta^3}$

Obecně: $g_{X_n}(z) = 1 - \alpha^{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n}(1-z)^{\beta^n}$ pro n = 1, 2, ...

13.7. Věta: Věta o střední hodnotě a rozptylu náhodné veličiny X_n.

13.8. Příklad: Pro zadání příkladu 13.4. vypočtěte střední hodnotu a rozptyl počtu potomků v n-té generaci.

Řešení:

$$E(X_1) = \mu = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4},$$

$$D(X_1) = \sigma^2 = E\left(X_1{}^2\right) - [E(X_1)]^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}$$

$$E(X_n) = \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

$$D(X_n) = \frac{\sigma^2 \mu^{n-1}\left(\mu^n - 1\right)}{\mu - 1} = \frac{11}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} \cdot \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n - 1\right]$$

13.9. Věta: Věta o pravděpodobnost vyhynutí v n-té generaci.

13.10. Věta: Věta o limitní hodnotě pravděpodobnosti vyhynutí v n-té generaci.

13.11. Příklad: Pro Galtonův – Watsonův proces z příkladu 13.4. najděte limitní hodnotu pravděpodobnosti vyhynutí.
Řešení:
V příkladu 13.8. bylo vypočteno, že $E(X_1) = \frac{5}{4}$. Protože $\frac{5}{4} > 1$, podle tvrzení b) věty 13.10.

$\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \xi$, kde $\xi \in (0,1)$ je nejmenší kladný kořen rovnice z = g_X(z) = $\sum\limits_{k=0}^{2} p_k z^k =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}z^2 \Rightarrow 4z = 1 + z + 2z^2, 2z^2 - 3z + 1 = 0 \Rightarrow z_{12} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right.$. Podmínku

splňuje kořen ½, tedy limitní hodnota pravděpodobnost i vyhynutí je 0,5.

13.12. Poznámka: Zobecnění na případ, kdy nultá generace je tvořena $k_0 \geq 1$ jedinci.