

2. Funkcionální charakteristiky stochastických procesů

2.1. Definice: Definice střední hodnoty a rozptylu SP, definice centrovaného a standardizovaného SP

2.2. Příklad: Necht' náhodná veličina X má střední hodnotu $E(X) = 2$ a rozptyl $D(X) = 9$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = X \cdot \cos \omega t$, $\omega > 0$ je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP.

Řešení:

$$\mu(t) = E(X_t) = E(X \cdot \cos \omega t) = \cos \omega t \cdot E(X) = 2 \cos \omega t$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(X \cdot \cos \omega t) = \cos^2 \omega t \cdot D(X) = 9 \cos^2 \omega t$$

2.3. Poznámka: Další funkcionální charakteristiky stochastického procesu

2.4. Definice: Definice autokovarianční a autokorelační funkce SP

2.5. Věta: Věta o vlastnostech autokovarianční funkce SP

2.6. Příklad: Najděte autokovarianční a autokorelační funkci SP z příkladu 2.2.

Řešení:

$$\begin{aligned} \gamma(t_1, t_2) &= C(X_{t_1}, X_{t_2}) = C(X \cdot \cos \omega t_1, X \cdot \cos \omega t_2) = \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 \cdot C(X, X) = \\ &= \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 \cdot D(X) = 9 \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 \end{aligned}$$

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \frac{9 \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2}{\sqrt{9 \cos^2 \omega t_1} \sqrt{9 \cos^2 \omega t_2}} = 1$$

2.7. Věta: Věta o střední hodnotě a autokovarianční funkci transformovaného SP

2.8. Definice: Definice slabě stacionárního SP

2.9. Poznámka: Vztah mezi striktní a slabou stacionaritou SP, zavedení autokovarianční funkce slabě stacionárního SP

2.10. Věta: Věta o vlastnostech autokovarianční funkce slabě stacionárního SP

2.11. Příklad: Necht' Y, Z jsou standardizované náhodné veličiny (tj. $E(Y) = 0, E(Z) = 0, D(Y) = 1, D(Z) = 1$), které jsou stochasticky nezávislé.

Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t$, $\omega > 0$ je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP a ukažte, že je slabě stacionární.

Řešení:

$$\mu(t) = E(X_t) = E(Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t) = \cos \omega t \cdot E(Y) + \sin \omega t \cdot E(Z) = 0$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t) = \cos^2 \omega t \cdot D(Y) + \sin^2 \omega t \cdot D(Z) = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

Aby byl SP slabě stacionární, musí mít konstantní střední hodnotu, konečný rozptyl a pro jeho autokovarianční funkci musí platit $\gamma(h) = \gamma(t, t+h)$. První dvě podmínky jsou splněny, ověříme třetí:

$$\begin{aligned}
\gamma(t, t+h) &= C(X_t, X_{t+h}) = C(Y \cdot \cos t + Z \cdot \sin t, Y \cdot \cos(t+h) + Z \cdot \sin(t+h)) = \\
&= \cos t \cdot \cos(t+h) \cdot C(Y, Y) + \sin t \cdot \cos(t+h) \cdot C(Z, Y) + \cos t \cdot \sin(t+h) \cdot C(Y, Z) + \\
&+ \sin t \cdot \sin(t+h) \cdot C(Z, Z) = \\
&= \cos t \cdot \cos(t+h) \cdot D(Y) + \sin t \cdot \sin(t+h) \cdot D(Z) = \cos t \cdot \cos(t+h) + \sin t \cdot \sin(t+h) = \\
&= \cos(t - (t+h)) = \cos(-h) = \cos(h) = \gamma(h)
\end{aligned}$$

2.12. Věta: Věta o vlastnostech autokorelační funkce slabě stacionárního SP

2.13. Příklad: Necht' je dán SP $\{X_t; t \in T\}$, kde náhodné veličiny $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_K}$ jsou stochasticky nezávislé a mají všechny stejnou distribuční funkci $\Phi(x)$. Určete střední hodnotu, rozptyl a autokorelační funkci tohoto SP.

Řešení: Protože náhodné veličiny $X_t, t \in T$ mají všechny stejnou distribuční funkci $\Phi(x)$, mají i stejnou střední hodnotu $E(X_t) = \mu$ a stejný rozptyl $D(X_t) = \sigma^2$. Dále opočítáme

autokovarianční funkci $\gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pro } t_1 = t_2 \\ 0 & \text{pro } t_1 \neq t_2 \end{cases}$. Jedná se tedy o slabě

stacionární SP. Nyní spočteme autokorelační funkci $\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \begin{cases} 1 & \text{pro } t_1 = t_2 \\ 0 & \text{pro } t_1 \neq t_2 \end{cases}$.

Znamená to, že neexistuje žádná závislost mezi realizacemi SP ve dvou různých okamžicích.