

3. Markovské řetězce s diskretním časem

3.1. Definice: Definice markovského řetězce s diskretním časem

3.2. Věta: Věta o simultánní pravděpodobnostní funkci markovského řetězce s diskretním časem

3.3. Příklad: Necht' Y_1, Y_2, \dots jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které nabývají hodnot z množiny $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (jde o tzv. celočíselné náhodné veličiny). Položme

$X_0 = 0, X_n = \sum_{i=1}^n Y_i, n \geq 1$. Dokažte, že stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský

řetězec.

Řešení: Dokážeme, že levá strana v markovské vlastnosti se rovná pravé straně.

Levá strana:

$$P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge K \wedge X_0 = 0) = \frac{P(X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1} \wedge K \wedge X_0 = 0)}{P(X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge K \wedge X_0 = 0)}.$$

Jevy zapsané pomocí náhodných veličin X_0, X_1, \dots, X_n se budeme snažit zapsat pomocí náhodných veličin Y_1, Y_2, \dots, Y_n , které jsou stochasticky nezávislé.

$X_0 = 0, X_1 = X_0 + Y_1 \Rightarrow Y_1 = X_1 - X_0, X_2 = X_1 + Y_2 \Rightarrow Y_2 = X_2 - X_1, \dots, X_n = X_{n-1} + Y_n \Rightarrow Y_n = X_n - X_{n-1}$, tedy

$$\{X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1} \wedge K \wedge X_1 = j_1 \wedge X_0 = 0\} = \\ = \{Y_n = j_n - j_{n-1} \wedge Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2} \wedge K \wedge Y_1 = j_1\}$$

Dále

$$\{X_{n-1} = j_{n-1} \wedge K \wedge X_1 = j_1 \wedge X_0 = 0\} = \{Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2} \wedge K \wedge Y_1 = j_1\}.$$

Po dosazení do levé strany:

$$\frac{P(X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1} \wedge K \wedge X_0 = 0)}{P(X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge K \wedge X_0 = 0)} = \frac{P(Y_n = j_n - j_{n-1})P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2}) \cdot K \cdot P(Y_1 = j_1)}{P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2}) \cdot K \cdot P(Y_1 = j_1)} = \\ = P(Y_n = j_n - j_{n-1})$$

Pravá strana:

$$P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1}) = \frac{P(X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1})}{P(X_{n-1} = j_{n-1})} = \\ = \frac{P(Y_n = j_n - j_{n-1})P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2})}{P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2})} = P(Y_n = j_n - j_{n-1})$$

Protože levá strana se rovná pravé straně, je daný stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ markovský řetězec.

Speciální případ – náhodná procházka na přímce.

3.4. Příklad: Galtonův – Watsonův proces větvení

3.5. Označení

3.6. Věta: Věta o vlastnostech markovského řetězce s diskretním časem

3.7. Poznámka: Zápis vlastností markovského řetězce s diskretním časem v maticovém tvaru

3.8. Příklad: Necht' je dán markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0,1\}$.

Pravděpodobnosti přechodu 1. řádu jsou dány maticí $\mathbf{P}(n, n+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Vektor

absolutních pravděpodobností v okamžiku n je $\mathbf{p}(n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Jaká je pravděpodobnost, že po jednom kroku bude řetězec ve stavu 0 (resp. 1)?

Řešení: Podle zákona evoluce máme: $\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n) \mathbf{P}(n, n+1) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3}, \frac{3}{8} + \frac{1}{6} \right) = \left(\frac{11}{24}, \frac{13}{24} \right) = (0,4583; 0,5417)$$

Po jednom kroku tedy bude řetězec ve stavu 0 s pravděpodobností 0,4583 a ve stavu 1 s pravděpodobností 0,5417.

3.9. Definice: Definice stochastického vektoru a stochastické matice