4. Homogenní markovské řetězce s diskrétním časem

4.1. Definice: Definice homogenního markovského řetězce (s diskrétním časem)

4.2. Příklad: Na okružní trase je umístěno 2m bodů. Mezi nimi převáží auto náklady. Náklad se z každého bodu převáží do následujícího s pravděpodobností p nebo do předchozího s pravděpodobností q = 1 – p. Zavedeme stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$, kde $X_n = j$, když v okamžiku n je auto v bodě j, j = 0, 1, ..., 2m. Ukažte, že tento stochastický proces je homogenní markovský řetězec a najděte jeho matici přechodu.

Řešení: Daný stochastický proces je markovský řetězec, protože jeho budoucí stav závisí pouze na stavu přítomném a nikoliv na stavech minulých. Je to homogenní markovský řetězec, protože pravděpodobnosti přechodu 1. řádu nezávisí na okamžiku n.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & K & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & K & 0 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3. Věta: Vlastnosti homogenního markovského řetězce

4.4. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1,2}, vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1/2, 1/6, 1/3) a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Určete vektor absolutních pravděpodobností po čtyřech krocích.

Řešení: $$p(4) = p(0)P^4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{6}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{6}{16} \end{pmatrix} = \left(\frac{31}{96}, \frac{31}{96}, \frac{34}{96}\right)$$

4.5. Poznámka: Přechodový diagram v rozvinutém a nerozvinutém tvaru.

4.6. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0,1,2} a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Nakreslete přechodový diagram.

4.7. Příklad: Najděte matici přechodu k danému přechodovému diagramu.

4.8. Příklad: Model havarijního pojištění
Počet výskytů pojistné události v n-tém pojistném období je náhodná veličina Y_n, n = 1, 2, ….
Předpokládáme, že náhodné veličiny Y_n jsou stochasticky nezávislé a všechny se řídí rozložením Po(λ). Existují tři kategorie pojistného: 0 … základní pojistné, 1 … pojistné s bonusem 30%, 2 … pojistné s bonusem 50%. V prvním pojistném období platí klient základní pojistné. Jestliže pojistné období má bezeškodní průběh, je klient v dalším pojistném období zařazen o kategorii výše. Pokud uplatní jeden pojistný nárok, je v příštím období zařazen o kategorii níže. Při uplatnění dvou a více pojistných událostí je zařazen o dvě kategorie níže. Nechť náhodná veličina X_n značí kategorii pojistného v n-tém pojistném období. Lze snadno odvodit, že platí

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min\{X_{n+1}, 2\} \text{pro } Y_n = 0 \\ \max\{X_{n-1}, 0\} \text{pro } Y_n = 1 \\ 0 \text{ pro } Y_n \geq 2 \end{cases}$$

Stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0, 1, 2} je markovský řetězec, protože jeho budoucí stav závisí pouze na stavu přítomném a nikoliv na stavech minulých.
Protože pravděpodobnosti přechodu 1. řádu nezávisí na okamžiku n, jde o homogenní markovský řetězec.
a) Najděte vektor počátečních pravděpodobností a matici přechodu. (Návod: využijte toho, že matice přechodu je stochastická matice.
b) Nakreslete přechodový diagram.