5. Stacionární a limitní rozložení homogenních markovských řetězců

5.1. Definice: Definice stacionárního vektoru

5.2. Příklad: Najděte stacionární vektor stochastické matice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Řešení: $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$

$$(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$a_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}$ $a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_3}{3}$ $a_3 = \frac{a_2}{2} + \frac{2a_3}{3}$ $a_1 + a_2 + a_3 = 1$	$6a_1 = 3a_1 + 2a_2$ $6a_2 = 3a_1 + a_2 + 2a_3$ $6a_3 = 3a_2 + 4a_3$ $a_1 + a_2 + a_3 = 1$

$$\mathbf{a} = \left(\frac{4}{19}, \frac{6}{19}, \frac{9}{19}\right) = (0{,}211;\ 0{,}316;\ 0{,}474)$$

5.3. Definice: Definice stacionárního rozložení homogenního markovského řetězce

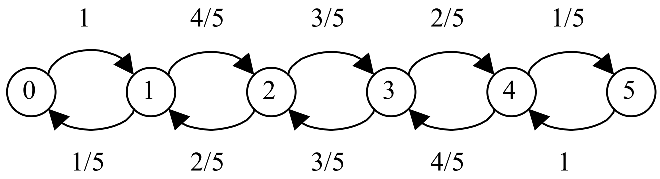
5.4. Věta: Věta o existenci limity vektoru absolutních pravděpodobností

5.5. Příklad: Máme černou a bílou urnu a pět koulí. Na počátku pokusu jsou všechny koule v černé urně. V každém kroku pokusu náhodně vybereme jednu kouli, přičemž výběr každé koule je stejně pravděpodobný a přemístíme ji do druhé urny. Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, ..., 5}, kde $X_n = j$, když po n-tém kroku bude v černé urně právě j koulí.

a) Najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce.
c) Vypočtěte střední hodnotu počtu koulí v černé urně po stabilizaci pokusu.

Řešení:

ad a) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



ad b) $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$a_0 = \frac{1}{5} a_1$$

$$a_1 = a_0 + \frac{2}{5} a_2$$

$$a_2 = \frac{4}{5} a_1 + \frac{3}{5} a_3$$

$$a_3 = \frac{3}{5} a_2 + \frac{4}{5} a_4$$

$$a_4 = \frac{2}{5} a_3 + a_5$$

$$a_5 = \frac{1}{5} a_1$$

$a_1 = 5a_0$, $a_2 = 10a_0$, $a_3 = 10a_0$, $a_4 = 5a_0$, $a_5 = a_0$

Protože $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$, dostáváme $a_0 + 5a_0 + 10a_0 + 10a_0 + 5a_0 + a_0 = 1 \Rightarrow$

$$a_0 = \frac{1}{32}$$

Stacionární rozložení: $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{10}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32} \right)$

ad c) $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{10}{32} + 3 \cdot \frac{10}{32} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{80}{32} = 2{,}5$

Výsledek je ve shodě s očekáváním, že po dostatečně velkém počtu pokusů bude v obou urnách v průměru stejný počet koulí.

5.6. Poznámka: Pro daný homogenní markovský řetězec příslušné stacionární rozložení nemusí existovat.

5.7. Definice: Definice limitního rozložení a ergodického řetězce

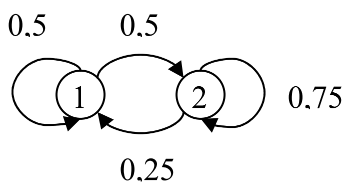
5.8. Poznámka: Interpretace ergodického řetězce

5.9. Věta: Věta o vztahu mezi limitním a stacionárním rozložením u ergodického řetězce

5.10. Věta: Markovova věta

5.11. Příklad: Uvažme provoz výrobní linky, která se může nacházet ve dvou stavech: v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2). Dlouhodobým sledováním provozu výrobní linky se dospělo k následujícím závěrům: pokud se výrobní linka v jednom období nacházela v provozu, tak v následujícím období v 50% případů zůstala v provozu a v 50% případů se nacházela v opravě. Pokud se výrobní linka nacházela v jednom období v opravě, pak v dalším období zůstala v 75% případů v opravě a v 25% případů se vrátila do provozu.
a) Modelujte tuto situaci pomocí homogenního markovského řetězce.
b) Najděte matici přechodu **P** a nakreslete přechodový diagram.
c) Najděte limitní rozložení daného homogenního řetězce a interpretujte ho.
Řešení:
ad a) $\{X_n ; n \in N_0\}$, $X_n = j$, když v n-tém období je linka ve stavu j, j = 1, 2.

ad b) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$



ad c) $(a_1, a_2) = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$, $a_1 + a_2 = 1$

$$(1 - a_2, a_2) = (1 - a_2, a_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a_2 = \frac{1 - a_2}{2} + \frac{3a_2}{4} = \frac{2a_2}{4} \Rightarrow 4a_2 = 2 + a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3}, a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Znamená to, že po dostatečně dlouhé době bude linka v provozu s pravděpodobností 1/3 a v opravě s pravděpodobností 2/3.