6. Klasifikace stavů homogenního markovského řetězce

6.1. Označení: Označení prvků matice $\mathbf{P}^n$

6.2. Definice: Definice doby prvního návratu do stavu j.

6.3. Označení: Označení pravděpodobnostní funkce doby prvního návratu do stavu j.

6.4. Definice: Definice trvalého a přechodného stavu.

6.5. Věta: Kritérium pro klasifikaci trvalých a přechodných stavů.

6.6. Příklad: Provádíme posloupnost opakovaných nezávislých hodů kostkou. Nechť náhodná veličina X_n udává maximální číslo dosažené v prvních n hodech, n = 1, 2, 3, ... Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {1, 2, ..., 6}, kde $X_n = j$, když v prvních n hodech bylo nejvyšší dosažené číslo j. Najděte matici přechodu **P** a klasifikujte stavy na trvalé a přechodné.

Řešení:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zajímají nás jen diagonální prvky matice $\mathbf{P}^n$, protože zkoumáme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$.

$$p_{11} = \frac{1}{6}, p_{11}(2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2, p_{11}(3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3, \ldots$$

$$p_{22} = \frac{2}{6}, p_{22}(2) = \left(\frac{2}{6}\right)^2, p_{22}(3) = \left(\frac{2}{6}\right)^3, \ldots$$

Obecně: $p_{jj}(n) = \left(\frac{j}{6}\right)^n$, j = 1, ..., 6

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{j}{6}\right)^n$ absolutně konverguje pro j = 1, 2, 3, 4, 5 a diverguje pro j = 6. Tedy $J_T = \{6\}$, $J_P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

6.7. Definice: Definice trvalého nenulového stavu a trvalého nulového stavu.

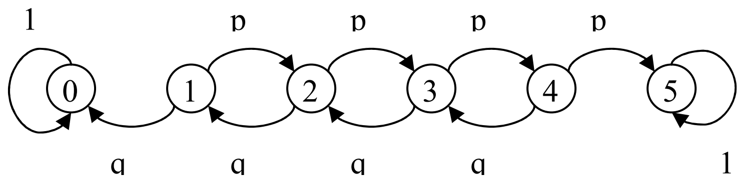
6.8. Důsledek: Kritérium pro klasifikaci trvalých nenulových stavů a trvalých nulových stavů.

6.9. Poznámka: Lze ukázat, že homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů nemůže mít trvalé nulové stavy.

6.10. Definice: Definice periodického stavu, neperiodického stavu, ergodického stavu.

6.11. Příklad: Na úsečce délky 5 jsou vyznačeny body 0, 1, ..., 5. V bodě 3 se nachází kulička. Kulička koná náhodnou procházku po úsečce tak, že s pravděpodobností p se posune o jednotku napravo a s pravděpodobností q = 1 – p se posune o jednotku nalevo. Dosáhne-li bodu 0 nebo bodu 5, setrvá tam. Popište proces pomocí homogenního markovského řetězce a klasifikujte stany na periodické a neperiodické.

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, kde $X_n = j$, když v okamžiku n je kulička v bodě j.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p_{00}(n) = 1$ pro $\forall n \in N \Rightarrow$ stav 0 je neperiodický.
$p_{55}(n) = 1$ pro $\forall n \in N \Rightarrow$ stav 5 je neperiodický.
$p_{11}(1) = 0$, $p_{11}(2) = pq$, $p_{11}(3) = 0$, $p_{11}(4) = pqp$, ... Největší společný dělitel čísel 2, 4, 6, ... je 2, tedy stav 1 je periodický s periodou 2. Stejně to dopadne se stavy 2, 3, 4.

6.12. Věta: Výpočet střední hodnoty doby prvního návratu do ergodického stavu j a trvalého nenulového periodockého stavu j.

6.13. Příklad: Nechť je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0, 1, 2} a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$. Vypočtěte střední hodnoty dob 1. návratů do stavů 0, 1, 2.

Řešení: Jelikož matice **P** je regulární matice, bude matice $\mathbf{P}^n$ konvergovat k limitní matici (viz věta 4.10. c)), jejíž všechny řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru **a** matice **P**.

$$(a_0, a_1, a_2) = (a_0, a_1, a_2) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{6} \\
a_1 &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \\
a_2 &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{2} \\
a_0 &+ a_1 + a_2 = 1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= \frac{6}{25} \\ a_1 &= \frac{10}{25} \\ a_2 &= \frac{9}{25} \end{aligned}$$

$$\overline{\mathbf{p}} = \left(\frac{6}{25}, \frac{10}{25}, \frac{9}{25}\right), \boldsymbol{\mu} = \left(\frac{25}{6}, \frac{25}{10}, \frac{25}{9}\right)$$

6.14. Věta: Rekurentní vyjádření pravděpodobnostní funkce doby 1. návratu do stavu j pomocí pravděpodobností přechodu.

6.14. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$. Je-li vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0)$, vypočtěte pravděpodobnost, že doba 1. návratu do stavu 0 bude n, n = 1, 2, 3, ... a vypočtěte pravděpodobnost, že řetězec se vůbec někdy vrátí do stavu 0.

Řešení: $\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 + \alpha\beta & (1-\alpha)\alpha + (1-\beta)\alpha \\ (1-\alpha)\beta + \beta(1-\beta) & \alpha\beta + (1-\beta)^2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 + \alpha\beta & (1-\alpha)\alpha + (1-\beta)\alpha \\ (1-\alpha)\beta + \beta(1-\beta) & \alpha\beta + (1-\beta)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta & 1 - p_{00}(3) \\ 1 - p_{11}(3) & (1-\alpha)\alpha\beta + 2(1-\beta)\alpha\beta + (1-\beta)^3 \end{pmatrix}$$

$f_0(1) = p_{00} = 1 - \alpha$

$f_0(2) = p_{00}(2) - p_{00}f_0(1) = (1-\alpha)^2 + \alpha\beta - (1-\alpha)^2 = \alpha\beta$

$f_0(3) = p_{00}(3) - p_{00}(2)f_0(1) - p_{00}f_0(2) = (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta - [(1-\alpha)^2 + \alpha\beta](1 - \alpha) - (1-\alpha)\alpha\beta = (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta - (1-\alpha)^3 - (1-\alpha)\alpha\beta - (1-\alpha)\alpha\beta = (1-\beta)\alpha\beta$

Obecně: $f_0(n) = \begin{cases} 1-\alpha \ \text{ pro } n = 1 \\ (1-\beta)^{n-2}\alpha\beta \ \text{ pro } n = 2,3,... \end{cases}$

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_0(n) = 1 - \alpha + \sum_{n=2}^{\infty}(1-\beta)^{n-2}\alpha\beta = 1 - \alpha + \alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}(1-\beta)^n = 1 - \alpha + \alpha\beta\frac{1}{1-(1-\beta)} = 1$$