7. Rozložitelné a nerozložitelné homogenní markovské řetězce

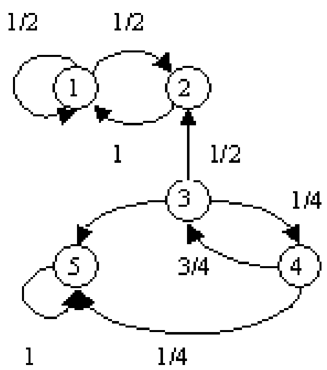
7.1. Definice: Definice dosažitelných a sousledných stavů.

7.2. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů

$J = \{1, 2, ..., 5\}$ a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nakreslete přechodový diagram a sestavte tabulku dosažitelných stavů a tabulku sousledných stavů.

Řešení:
Přechodový diagram



Tabulka dosažitelných stavů

stav	dosažitelný stav				
	1	2	3	4	5
1	+	+	-	-	-
2	+	+	-	-	-
3	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+
5	-	-	-	-	+

Tabulka sousledných stavů

stav	sousledný stav				
	1	2	3	4	5
1	+	+	-	-	-
2	+	+	-	-	-
3	-	-	+	+	-
4	-	-	+	+	-
5	-	-	-	-	+

7.3. Definice: Definice třídy trvalých stavů a třídy přechodných stavů.

7.4. Příklad: Pro homogenní markovský řetězec z příkladu 7.2. najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Řešení: $J_T = \{1,2\} \cup \{5\}, J_P = \{3,4\}$

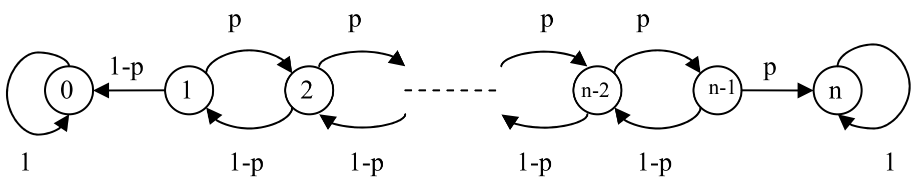
7.5. Poznámka: Poznámka o podřetězci homogenního markovského řetězce.

7.6. Důsledek: Důsledek pro třídu trvalých stavů a pro třídu přechodných stavů.

7.7. Věta: Kritérium pro stanovení třídy trvalých stavů.

7.8. Definice: Definice rozložitelného a nerozložitelného homogenního markovského řetězce.

7.9. Příklad: Uvažme náhodnou procházku s pohlcujícími stěnami, tj. homogenní markovský řetězec $\{X_n ; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, ..., N-1, N} a přechodovým diagramem



Zjistěte, zda tento řetězec je rozložitelný. Pokud ano, najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Řešení: Z přechodového diagramu okamžitě vyplývá, že stavy 0 a N jsou sousledné jenom samy se sebou. Ostatní stavy 1, 2, ..., N-1 jsou sousledné, řetězec je tedy rozložitelný a $J_T = \{0\} \cup \{N\}, J_P = \{1,2,K\ , N-1\}$.

7.10. Definice: Definice stavů stejného typu.

7.11. Věta: Věta o sousledných stavech.

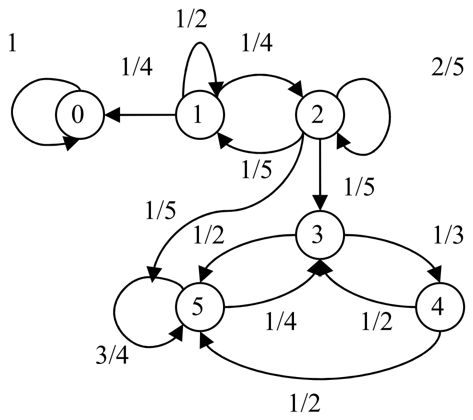
7.12. Důsledek: Důsledek pro nerozložitelný homogenní markovský řetězec.

7.13. Věta: Věta o množině stavů dosažeitelných z trvalého stavu.

7.14. Poznámka: poznámka o rozkladu množiny stavů J a o kanonickém tvaru matice přechodu.

7.15. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0,1, ..., 5\}$ a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$. Najděte kanonický tvar matice **P**.

Řešení:
Přechodový diagram



$J_1 = \{0\}$, $J_2 = \{3, 4, 5\}$, $J_P = \{1, 2\}$.

Kanonický tvar matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Vidíme tedy, že

$$\mathbf{P}_1 = (1)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

7.16. Definice: Definice fundamentální matice nerozložitelného homogenního markovského řetězce.

7.17. Věta: Věta o výpočtu středních hodnot dob prvních vstupů řetězce do stavu j za předpokladu, že vychází ze stavu i.