

8. Absorpční homogenní markovské řetězce

8.1. Definice: Definice absorpčního stavu.

8.2. Věta: Věta o vztahu mezi absorpčním stavem a trvalým stavem.

8.3. Definice: Definice absorpčního homogenního markovského řetězce.

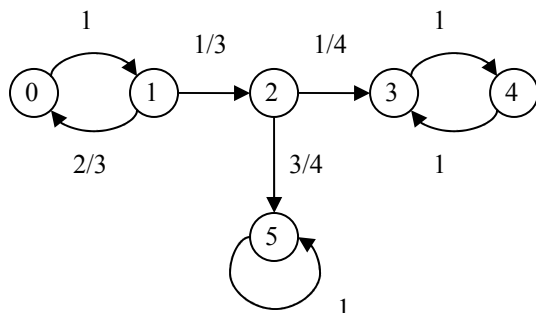
8.4. Příklad: Necht' $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů

$$J = \{0, 1, \dots, 5\} \text{ a maticí přechodu } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Zjistěte, zda jde o}$$

absorpční řetězec.

Řešení:

Přechodový diagram



$$J_T = \{3, 4\} \cup \{5\}, J_P = \{0, 1, 2\}.$$

Stavy 3 a 4 jsou trvalé, ale nejsou absorpční. Řetězec tedy není absorpční.

8.5. Definice: Definice fundamentální matice absorpčního řetězce.

8.6. Poznámka: Význam součtu prvků v i -tém řádku fundamentální matice \mathbf{M} .

8.7. Příklad: Dva hráči A a B dali dohromady do hry vklad 4 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhrává 1 Kč, když rub, prohrává 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů zruinován.

a) Popište situaci pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.

b) Ukažte, že řetězec je absorpční.

c) Najděte fundamentální matici a interpretujte její prvky.

b) Vypočítejte střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech.

Řešení:

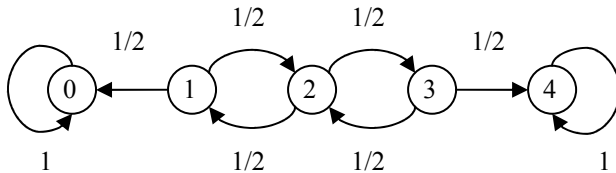
ad a) Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů

$J = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, přičemž $X_n = j$, když v n -tém kroku hry má hráč A právě j Kč.

Matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přechodový diagram:



ad b) $J_T = \{0\} \cup \{4\}$, $J_P = \{1, 2, 3\}$. Trvalé stavy 0 a 4 jsou absorpční, řetězec je tedy absorpční.

ad c) Matice přechodu v kanonickém tvaru:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Interpretace: Podívejme se např. na druhý řádek matice \mathbf{M} . Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak lze očekávat, že před skončením hry bude mít v průměru jedenkrát 1 Kč, dvakrát 2 Kč a jedenkrát 3 Kč.

ad d) Podle poznámky 8.6. dostáváme:

$$\mathbf{t} = \mathbf{M}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Interpretace: Má-li hráč A v daném okamžiku buď 1 Kč nebo 3 Kč, tak v průměru po třech krocích hra skončí. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak v průměru po čtyřech krocích hra skončí.

8.8. Věta: Věta o pravděpodobnostech přechodu do absorpčních stavů.

8.9. Definice: Definice matice přechodu do absorpčních stavů daného absorpčního řetězce.

8.10. Příklad: Pro zadání z příkladu 8.7. vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretejte její prvky.

Řešení:

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Interpretace: Má-li hráč A v daném okamžiku 1 Kč, pak bude s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ zruinován on a s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ bude zruinován hráč B. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak bude s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ zruinován on a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ bude zruinován hráč B. Má-li hráč A v daném okamžiku 3 Kč, pak bude s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ zruinován on a s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ bude zruinován hráč B.